JULIO REY PASTOR

PEDRO PI CALLEJA

CÉSAR A. TREJO

517
REY



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
5311905081

Análisis matemático

Volumen II: Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones.







EDITORIAL
KAPELUSZ
Moreno 372 • Buenos Aires

R. 51.597

X-53-017669-5

Todos los derechos reservados por (©, 1957) EDITORIAL KAPELUSZ, S.A. Buenos Aires. Hecho el depósito que establece la ley 11.723. Séptima edición enero de 1968. LIBRO DE EDICION ARGENTINA – Printed in Argentina.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO XVIII

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES. DIFERENCIACIÓN

PÁG.

CAPÍTULO XIX

FÓRMULA DE TAYLOR DE VARIAS VARIABLES

PÁG.

CAPÍTULO XX

GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

PÁG.

CAPÍTULO XXI

INTEGRALES GENERALIZADAS. SERIES E INTEGRALES MÚLTIPLES

PÁG.

CAPÍTULO XXII

INTEGRALES PARAMÉTRICAS

PÁG.

CAPÍTULO XXIII

INTEGRALES CURVILÍNEAS. ANÁLISIS VECTORIAL

PÁG.

PRESENTACIÓN

La exposición sistemática y rigurosa del Cálculo infinitesimal en forma de Cours d'Analyse, realizada por CAUCHY para l'École Polytechnique, dió la pauta a varias generaciones de matemáticos franceses para engarzar en torno a sus lecciones, dadas en diversos centros de enseñanza superior, esenciales ampliaciones que convertían sus cursos en tratados. MÉRAY, JORDAN, HUMBERT, GOURSAT, HADAMARD, VALIRON... han proseguido dignamente la tradición de CAUCHY, como su egregio colega DE LA VALLÉE POUSSIN, influyendo con hondura en la cultura matemática de la Europa continental y de las Américas. En Alemania fué el gran tratado de JORDAN el texto universitario clásico, hasta que lo sustituyeron los de KOWALEWSKI y VON MANGOLDT, y en Italia fueron apareciendo excelentes tratados de DINI, LEVI, PICONE, SEVERI... Antes de estos últimos, había realizado GARCÍA DE GALDEANO el épico esfuerzo de publicar en castellano su ingente obra enciclopédica, con ambicioso plan muy superior a sus insuficientes fuerzas, desproporción que realza su mérito. También es meritorio el esfuerzo del distinguido profesor peruano LOSADA Y PUGA al publicar su obra en tres voluminosos tomos (1945-47-54). Finalmente, como coronación de varios libros del firmante, publicados en las últimas décadas (1916-56), donde se han formado varias generaciones de estudiosos hispánicos, muy a fondo ampliados y perfeccionados por dos competentes colaboradores, prosigue su publicación con este volumen II (al que pronto seguirá el último), este Tratado de Análisis clásico, organizado desde un punto de vista moderno, con la pretensión de servir no sólo de exposición didáctica, sino también de obra de consulta a los estudiosos hispano-parlantes, que en él encontrarán lógicamente organizados multitud de conocimientos cuya búsqueda en numerosos libros extranjeros (puntualmente citados en minuciosas reseñas bibliográficas) exigirían gran esfuerzo en el lector.

Precisamente para satisfacer mejor a estas pretensiones, que suelen dejar de lado los grandes tratados de otros países, donde cada finalidad tiene su libro adecuado, hemos abandonado el primer plan de condensar el abundante material en dos

volúmenes; y gracias a la favorable disposición de la Editorial Kapelusz, estimulada por la excelente acogida que el público de idioma español dispensó al volumen I, hemos podido librarnos de esta traba, desarrollando con holgura, y por ende con mayor claridad, las más acreditadas teorías clásicas, con orientación actual.

No se arredre el lector ante la imponente mole; pues la preocupación didáctica preside toda la obra, y la muy elaborada ordenación facilitará la digestión gradual del abundante contenido. Sin claudicaciones de rigor, ni escamoteos de dificultades, éstas han sido relegadas, como en el volumen I, en algunos casos a los párrafos complementarios, impresos en tipo menor, para que el principiante salte por ellos, sin desviarse del cauce de los conceptos fundamentales, por las acequias secundarias en segunda lectura, muchas de estas disgresiones que le parecían oscuras y tediosas, le perfilarán más nítidamente el torso conceptual del Análisis, como las costillas precisan y delimitan la columna dorsal.

Confían los autores en que el abundante material —ausente o escaso en muchos tratados— de notas aclaratorias, ejemplos explicados y ejercicios resueltos, permitirá a profesores y alumnos sacar el máximo fruto de la obra; no para aprender todo su contenido —frase que sólo tendría sentido para un epítome—; pero sí para entenderla y manejarla, extrayendo de ella varios cursos orientados hacia la misma meta por senderos diferentes.

J. REY PASTOR.

Madrid, enero de 1957.

CONTENIDO DEL VOLUMEN II

En el plan de la obra incluído en el volumen I se expuso su finalidad y estructura; ahora nos remitimos sólo a señalar alguna particularidad que creemos importante en el desarrollo, enfoque o carácter de los temas tratados en este volumen, pues el índice general inicial da también el programa ordenado de todos ellos.

La geometría lineal y cuadrática del capítulo XVII se trata con método vectorial, cuyo valor sintético queda patente al comprobar que con él muchos problemas del plano y del espacio son idénticos. Siguiendo la tendencia moderna, creemos con BIEBERBACH *que el método vectorial es más que un sistema estenográfico, pues su ventaja es preponderantemente conceptual y especialmente adecuada a la intuición geométrica.*

Con preocupación didáctica de ir siempre de lo sencillo a lo complicado, de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, tratamos inicialmente el álgebra vectorial en forma geométricamente intuitiva, aunque en las notas intermedias van señalándose los conceptos y proposiciones que estructuran una teoría axiomática general, cuyo esbozo y trascendencia se pergeña en las notas de fin de capítulo. Se abrevia la exposición del álgebra lineal incluyendo en los ejercicios muchos teoremas sencillos con demostración resumida en las respuestas al fin del volumen. En la impresión es cómodo el uso de caracteres en negrita, a sustituir en la pizarra por un sobrerrayado.

Damos a las transformaciones lineales y al conexo concepto de matriz toda la importancia que ha adquirido en la matemática pura, aplicada e incluso ingenieril. Al final del parágrafo queda expuesta la sistematización que se obtiene por el estudio de los grupos de transformaciones lineales según el programa de Erlangen.

Un estudio resumido de las cuádricas trata de obviar deficiencias de preparación que dificultan luego la comprensión de su empleo en cuestiones superiores y en la ejemplificación de la teoría de las funciones de varias variables.

La introducción del concepto de tensor doble como función vectorial lineal homogénea de la dirección, con significado físico obvio, facilita mucho la comprensión del álgebra tensorial y de su tratamiento abstracto, también incluído. En el producto tensorial de vectores se aclara la conexión del concepto general con el histórico de diada o expresión diádica de GIBBS, *ya incluído en el parágrafo dedicado a transformaciones lineales. Señalamos bien la importancia de los autovalores y autovectores, y al estudiar el signo de una forma cuadrática damos una demostración muy sencilla del teorema que caracteriza las definidas positivas. Aplicamos el anterior estudio a la clasificación de las cuádricas y aún nos sirve la demostración constructiva de la ley de inercia para explicar el rápido y útil método de formación de cuadrados.*

El cálculo de matrices posibilita ahora dedicar una nota de fin de

capítulo a la resolución práctica de los sistemas de ecuaciones lineales, tema de empleo constante en la matemática aplicada y en la que los ingenieros tanto pueden oprender de los geodestas en el terreno de lo útil y eficaz.

En el capítulo XVIII sobre límites y diferenciación de las funciones de varias variables, señalamos el cuidadoso tratamiento de los límites sucesivos, de la continuidad, de la diferenciabilidad con su significado geométrico y su aplicación a las funciones compuestas, de las funciones homogéneas. Se empieza el estudio de las funciones implícitas con la ejemplificación y manejo que familiaricen al estudiante con el concepto, para dar luego con toda precisión y rigor los correspondientes teoremas de existencia; lo mismo se hace respecto de la dependencia funcional. Cuestión que es fuente de confusión para el técnico que tenga poco desarrollado su sentido crítico es la de discriminar en la diferenciación de un sistema de ecuaciones las variables dependientes y las independientes, a cuya aclaración dedicamos atención y contribuímos con adecuados ejemplos. En dos notas de fin de capítulo sólo se procura señalar la trascendencia que en la matemática moderna tiene el estudio de los espacios topológicos y métricos y el de la compacidad.

El capítulo XIX se dedica a la fórmula de TAYLOR *con previo tratamiento de la derivación sucesiva y su conmutabilidad cuidadosamente estudiada. Se aclaran con ejemplos las distinciones entre las diversas clases de extremos absolutos o relativos en sentido estricto o amplio y se estudia detenidamente su obtención para las funciones de dos, tres o más variables independientes con especial introducción de los casi-extremos en el caso dudoso, para lo cual son muy útiles los resultados del capítulo XVII sobre el signo de una forma cuadrática. Se ejemplifican y explican también las paradojas que surgen en el estudio de los extremos de funciones con variables ligadas, incluyendo el método de los multiplicadores de* LAGRANGE. *En las aplicaciones geométricas se estudian los puntos ordinarios y múltiples de las curvas y para el caso de punto parabólico se completan en los ejercicios los criterios susceptibles de aplicación, todo ello adecuadamente ejemplificado.*

Creemos haber alcanzado una gran precisión sintética en el tratamiento vectorial de las propiedades diferenciales de curvas y superficies desarrollado en el capítulo XX. Se analizan las conexiones mutuas sobre las distintas representaciones que pueden darse de las curvas y las superficies, incluyendo su moderno concepto según FRÉCHET. *En los ejercicios se introducen los números derivonormados y su aplicación, en contribución original al teorema de incrementos finitos para funciones vectoriales, llegando así por el método de* ZYGMUND *al teorema de* L. SCHEEFFER *en este caso.*

Se analizan cuidadosamente las distintas definiciones que pueden darse de plano osculador y respecto de éste los dos tipos de curva dextrógira o levógira, su distinta nomenclatura según varios autores, con estudio sintético de las curvaturas de flexión y de torsión, quedando el signo de esta última claramente especificado. Las fórmulas de FRENET *con su signo, y el vector de* DARBOUX *resultan así fácilmente introducidos.*

Con numerosos ejemplos críticos se hace un detenido estudio de la teoría de envolventes de curvas y superficies dadas según sus distintas representaciones.

El método vectorial resulta especialmente apropiado y se consigue con él una clara visión sintética, cuando se aplica al estudio de las superficies regladas; en nuestra exposición se muestra también, por ejemplo, para la línea de estricción, la fácil deducción de largas expresiones cartesianas a partir de las vectoriales, rápida y adecuadamente obtenidas.

Después de estudiar las formas fundamentales de las superficies, el tensor de curvatura, las aplicaciones del teorema de MEUSNIER *y las líneas notables de una superficie, llegando a la demostración del teorema "egregio" de* GAUSS *en los ejercicios, se dedica el último parágrafo de este capítulo a la representación de superficies, en especial las de* MERCATOR, *estereográfica polar, cilíndrica transversa, tanto en el caso de superficie esférica como de elipsoide de revolución, estudio que se complementa en las notas de fin de capítulo con la caracterización incluída en la admirable obra de* TISSOT *(citada en nota V, 7) y la obtención de los desarrollos útiles en los trabajos cartográficos.*

El capítulo XXI se dedica a integrales generalizadas y a series e integrales múltiples. La integral de RIEMANN-STIELTJES *se introduce como límite según el conjunto dirigido de particiones del intervalo de definición y para dar rigor a la exposición se demuestran los teoremas fundamentales sobre límites dirigidos o generales. Esta integral generalizada se relaciona con la restringida de* RIEMANN-STIELTJES *introducida como límite según la norma y también con la ordinaria de* RIEMANN *vista en el § 49 del volumen I, delicada cuestión adecuadamente aclarada. Del teorema sobre funcionales lineales continuas se da sólo un esbozo de demostración. Se muestra bien la importancia del concepto de integral de* STIELTJES *en la integración por partes, y del segundo teorema del valor medio se dan demostraciones sencillas en condiciones muy generales, con interpretaciones gráficas aclaratorias.*

Las integrales simples impropias se estudian detenidamente, dando variados criterios de convergencia absoluta y condicional. La generalización de HARNACK *que sigue la pauta de* CAUCHY *se estudia también; en la nota II del capítulo XXIV en el volumen III, se verá su entroncamiento con la teoría general de la integración.*

Como exordio a las integrales múltiples y complemento al § 22 sobre series numéricas, se dedica el § 81 a series múltiples para cuyo estudio es también útil el concepto de límite dirigido. Se da una sencilla demostración del teorema fundamental de las series dobles absolutamente convergentes y mediante el ejemplo de CESÀRO *se muestra su distinto comportamiento respecto de las series dobles de términos positivos.*

Para estudiar adecuadamente las condiciones de integrabilidad (R) de una integral múltiple, se introducen los conceptos de conjuntos de extensión nula y de medida nula, cuestión a completar en el capítulo XXIV del volumen III. Se explica en condiciones muy amplias el cálculo de integrales dobles por integrales reiteradas y se da rigurosamente demostrado el teorema de existencia de éstas cuando la integral doble existe, aclarando la hoy injustificada impugnación de STOLZ *al ejemplo de* DU BOIS REYMOND. *Se da una cuidadosa demostración del teorema del cambio de variable en una integral doble, y se tratan extensamente y con ejemplos las aplicaciones de las integrales múltiples, introduciendo con precisión el concepto y cálculo del área de una superficie alabeada; en nota de fin de capítulo se da ligeramente modificado el clásico ejemplo de* SCHWARZ *sobre una definición errónea de este concepto, la interesante observación de* FRÉCHET *sobre el área de las superficies poliedrales y una definición axiomática funcional del concepto como invariante de carácter geométrico. En el volumen III y con los recursos de la teoría general de la medida se completará este estudio. (Cap. XXIV, nota III).*

El capítulo XXII trata de integrales paramétricas. Como exordio del

tema y complemento del § 43 sobre series funcionales, se estudia ahora su integración y derivación en condiciones cuidadosamente establecidas. En el parágrafo siguiente se desarrolla con precisión y rigor el estudio de la continuidad, integración y derivación de las integrales paramétricas propias e impropias, mostrando en la gama de teoremas establecidos, ejemplos aclaratorios y ejercicios finales, todos los matices delicados que ofrece el tema. Las integrales múltiples impropias sirven también para tratar con su ayuda la integral de POISSON, *las de* FRESNEL *con interesante aplicación de la existencia del límite doble implicando la del límite reiterado, y la integral de* CAYLEY *que muestra las cuestiones de convergencia condicional que surgen en las distintas definiciones que pueden darse de integrales múltiples impropias.*

El capítulo XXIII, final de este volumen, se dedica a integrales curvilíneas y análisis vectorial. Las integrales curvilíneas se introducen primero tomadas sobre arcos regulares, aunque luego se consideran también las tomadas sobre arcos meramente rectificables, se estudian cuidadosamente las convenciones de signo para contornos orientados en el cálculo de áreas y momentos por integrales curvilíneas y se da la aplicación de la fórmula de RIEMANN *a la obtención de fórmulas de integración por partes para integrales dobles. La integración de diferenciales exactas y la existencia de función potencial, se estudia con precisión no acostumbrada, incluyendo la condición de que el recinto sea simplemente conexo sólo donde es exigible. Las integrales de superficie se introducen después de estudiar adecuadamente la orientabilidad de superficies con los limitados recursos topológicos que suele poseer un lector de formación matemática aún poco avanzada.*

En el estudio de los campos vectoriales se distinguen bien las líneas de fuerza o flujo de las líneas de corriente, se da el tratamiento matemático y la interpretación física de la divergencia, de la circulación, del potencial y del rotor, así como la aplicación del operador nabla de HAMILTON *a la obtención de relaciones vectoriales y tensoriales. Los teoremas integrales se enuncian y demuestran con intención predominantemente física. Los operadores diferenciales se tratan también en coordenadas curvilíneas. Se dan aplicaciones físicas sobre campos newtonianos, así como a la hidrodinámica. En los ejercicios se completa ampliamente el contenido del texto con el potencial logarítmico, polinomios de* LEGENDRE *y funciones conexas a la teoría del potencial, tal las armónicas esféricas ya sólidas, ya de superficie, cuestión que también será objeto de la nota IV en el capítulo XXVIII del volumen III.*

Al final de este capítulo XXIII, después de un par de notas sobre potencial newtoniano de doble capa y fórmulas de GREEN, *se traza un breve esbozo de análisis tensorial que permita captar idea de su carácter, así como de las formas diferenciales exteriores y su aplicación al teorema de* STOKES, *dando explicación elemental del cálculo de* GRASSMANN-CARTAN *suficiente para comprender su naturaleza y para justificar el cuidado con que se han tratado las cuestiones de signo en las integrales de superficie.*

El volumen III, ya redactado, comprenderá teoría de la medida e integral de LEBESGUE, *series e integral de* FOURIER *con la teoría de los espacios funcionales, ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales con cálculo de variaciones y problemas lineales de la física, un resumen de la teoría de funciones analíticas y apéndices sobre homogeneidad dimensional, ecuaciones integrales, cálculo operacional, probabilidades con teoría de errores, y nomografía.*

CAPÍTULO XVII

GEOMETRÍA LINEAL Y CUADRÁTICA

§ 60. ÁLGEBRA VECTORIAL

1. Vectores libres. Combinación lineal. — *a*) *Elementos de un vector.* — Dentro de la geometría elemental, situados en el espacio euclídeo, ya en § 1-6, ejemplo 2 hemos definido un *vector libre* mediante la equipolencia entre segmentos orientados. Representaremos un vector **a** por una flecha PQ de *origen* P y *extremo* Q (fig. 192); dos flechas equipolentes son dos representantes (§ 1-6) de un mismo vector (**a** = PQ = RS), que así queda determinado por estas características:

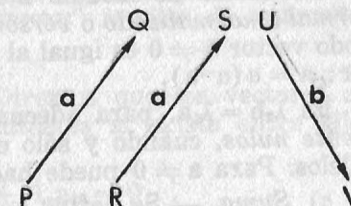


Fig. 192

1ª) *Módulo*:

$$\text{mód } \mathbf{a} = |\mathbf{a}| = |PQ| = a \quad ,$$

indicado por la longitud de la flecha en una cierta unidad;

2ª) *Dirección*: la del haz impropio (§ 1-6, ej. 1) formado por las rectas sobre las que actúan las flechas que lo representan;

3ª) *Sentido*, indicado en cada dirección por los signos + ó —.

EJEMPLO. En los vectores **a** = PQ = RS y **b** = UV de la figura 192, es $a = b$ pero $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

NOTAS: 1. Al único vector de módulo 0 lo indicaremos con **0**; en él están indeterminados dirección y sentido. Convendremos en considerarlo como paralelo a cualquier otro vector y también a cualquier plano.

2. Por oposición a los vectores, las magnitudes independientes del sistema de coordenadas cuyas cantidades pueden ordenarse como el conjunto de los números reales, se llaman *escalares*. Por ejemplo, son escalares: el peso, densidad, volumen, módulo de un vector, trabajo, potencial. En cambio, la proyección de un vector sobre un eje de referencia (que puede cambiarse) no es un escalar, a pesar de expresarse por un número real (cfr. § 63-1, a).

3. Otras relaciones de equivalencia entre segmentos dirigidos o flechas conducen a definir otras clases de vectores.

El *vector axial o deslizante* resulta de considerar como equivalentes a dos flechas sólo cuando además de ser equipolentes, actúan en una misma recta, llamada entonces *línea de acción* del vector. Un ejemplo es la *fuerza* en sistemas rígidos.

El *vector fijo* resulta de considerar equivalentes dos flechas que además de ser equipolentes, tienen el mismo origen, llamado *punto de aplicación* del vector (ej.: fuerza en sistemas deformables). *Aplicar* un vector libre a al punto P es considerar el vector fijo de origen P equipolente al **a**.

b) *Producto por un número real.* — Definiremos el producto $\lambda\mathbf{a}$ del vector **a** por el número real λ poniendo $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (nota 1), y si $\lambda \neq 0$, como el vector paralelo a **a**, de igual u opuesto sentido según sea $\lambda > 0$ ó $\lambda < 0$, y de módulo

$$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot a.$$

Un vector de módulo 1 se llama *vector unitario* o *vector normal* o *normalizado* o *versor*. *Versor de* $\mathbf{a} \neq 0$ es el versor $a^{-1}\mathbf{a}$. Todo vector $\mathbf{a} \neq 0$ es igual al producto de su módulo por su versor: $\mathbf{a} = a\,(a^{-1}\mathbf{a})$.

Es $\lambda_2\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}$, para adecuados λ_1 y λ_2 reales *no simultáneamente nulos*, cuando y sólo cuando los vectores **a** y **b** son paralelos. Para $\mathbf{a} \neq 0$ puede hacerse $\lambda_2 = 1$. (Ver nota 1).

c) *Suma.* — Se define la *suma* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ como el vector que se obtiene colocando **a** y **b** sucesivamente, es decir, uno a continuación del otro, a partir de un punto O, y considerando la flecha que va desde el origen del primero hasta el extremo del último (cfr. § 9-5, *a*). Cualquiera que sea el punto O, se obtienen flechas equipolentes, y por tanto el mismo vector (fig. 193; cfr § 2-4, ej.). La suma de vectores es *conmutativa*, pues sumando en el orden inverso se completa un paralelogramo (fig. 193). También se demuestra geométricamente que es asociativa (fig. 194), por cuya razón pondremos $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ para indicar $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

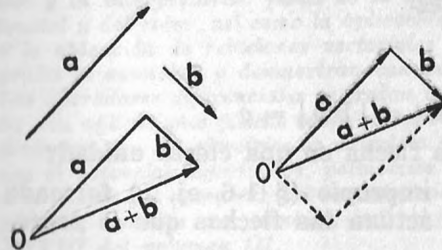


Fig. 193

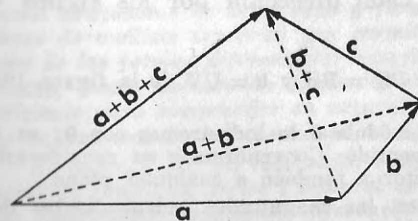


Fig. 194

d) *Diferencia. Combinación lineal.* — Definiremos (cfr. § 60-2, nota 3) la diferencia $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ de dos vectores así: $\mathbf{d} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$.

Poniendo $(-1)\mathbf{b} = -\mathbf{b}$ (vector opuesto a **b**) resulta

[60-1] $$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Más generalmente, las operaciones introducidas en *b* y en *c* permiten definir una expresión de la forma

[60-2] $$\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n ,$$

que será un nuevo vector llamado *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$, con los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.

NOTA 4. Cualquiera sea el punto O se tiene $PQ = OQ - OP$, por lo cual suele usarse la notación $PQ = Q - P$ de un vector como "diferencia de puntos".

Conviniendo en que la expresión $P + \mathbf{a} = Q$ signifique $\mathbf{a} = Q - P$, la operación de sumar a un punto un vector significa aplicar al punto la traslación correspondiente. El nombre "vector" proviene de transportar (latín: vehere).

2. Dependencia lineal.

— *a*) Diremos que los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ son *linealmente dependientes* si existe entre ellos una *relación lineal*

[60-3] $$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} ,$$

con coeficientes no todos nulos. Se llamarán *linealmente independientes* si no son linealmente dependientes, es decir si de [60-3] se deduce $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$.

EJEMPLO. Si $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ son linealmente dependientes, pues se verifica [60-3] con $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$.

b) Los siguientes teoremas caracterizan geométricamente los conceptos de combinación lineal y dependencia lineal.

TEOR. 1. *Condición necesaria y suficiente para que dos vectores* $\mathbf{a}_1$ *y* $\mathbf{a}_2$ *sean paralelos es que sean linealmente dependientes.*

Si uno al menos de los vectores es nulo, ambos son paralelos (§ 60-1, nota 1) y linealmente dependientes (*a*, ej.). Si son ambos no nulos el teorema es inmediato, pues

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0},\ (\lambda_1 \neq 0), \quad \text{equivale a} \quad \mathbf{a}_1 = (-\lambda_2/\lambda_1)\mathbf{a}_2.$$

Si varios vectores libres son paralelos a un mismo plano, los llamaremos *coplanares*, pues en tal caso pueden representarse en un mismo plano.

TEOR. 2. *Dados dos vectores* $\mathbf{e}_1$ *y* $\mathbf{e}_2$ *no paralelos* (y por lo tanto no nulos), *toda combinación lineal es coplanar con*

ellos, y recíprocamente, todo vector **r** *coplanar con* $\mathbf{e}_1$ *y* $\mathbf{e}_2$ *puede expresarse unívocamente como combinación lineal de ellos.*

DEM. 1º) Es $\lambda_k\mathbf{e}_k$ paralelo a $\mathbf{e}_k$, y los vectores $\lambda_1\mathbf{e}_1$, $\lambda_2\mathbf{e}_2$ y $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2$ son coplanares, pues con ellos puede formarse un triángulo.

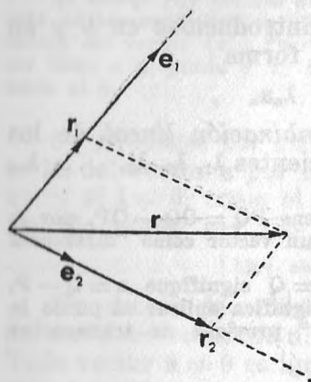


Fig. 195

2º) Se demuestra geométricamente que todo vector **r** coplanar con $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ puede descomponerse en una suma $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ de dos vectores paralelos a $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ (fig. 195), y como por § 60-1, *b*, es $\mathbf{r}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{r}_2 = \lambda_2\mathbf{e}_2$, resulta

[60-4] $$\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2.$$

Si $\mathbf{r} = \lambda'_1\mathbf{e}_1 + \lambda'_2\mathbf{e}_2$ resulta de [60-4]

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0},$$

pero al ser $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ no paralelos, son linealmente independientes por el teorema 1, y entonces $\lambda'_1 = \lambda_1$, $\lambda'_2 = \lambda_2$, es decir, la expresión [60-4] es única.

TEOR. 3. *Condición necesaria y suficiente para que tres vectores* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ *sean coplanares, es que sean linealmente dependientes.*

DEM. 1º) Si dos de los vectores, por ejemplo $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$, son paralelos, los tres son coplanares, y linealmente dependientes por serlo el subconjunto $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ por el teorema 1.

2º) Si $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ no son paralelos, la relación lineal

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \quad (\lambda_1 \neq 0, \text{ teor. } 1),$$

equivale a $\mathbf{a}_1 = (-\lambda_2/\lambda_1)\mathbf{a}_2 + (-\lambda_3/\lambda_1)\mathbf{a}_3$, lo que a su vez por el teorema 2 equivale a que $\mathbf{a}_1$ es coplanar con $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.

En forma análoga al teorema 2 se prueba, como se indica esencialmente en la figura 196:

TEOR. 4. *Dados tres vectores* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *no paralelos a un mismo plano, cualquier vector del espacio euclídeo de tres dimensiones puede expresarse unívocamente como combinación lineal de ellos:*

[60-5] $$\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3.$$

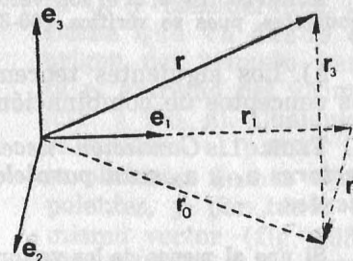


Fig. 196. — Expresión de un vector como combinación de tres no coplanares, previa descomposición: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3$.

Consecuencia de los teoremas anteriores es:

TEOR. 5. *En el espacio euclídeo de tres dimensiones, cuatro* (o más) *vectores son siempre linealmente dependientes.*

Basta tomar tres de ellos y aplicar el teorema 3 ó el 4 según sean o no coplanares.

NOTAS: 1. Los conjuntos: E_1, de todos los vectores de (paralelos a) una recta; E_2, de los vectores de (paralelos a) un plano; E_3, de todos los vectores del espacio euclídeo de tres dimensiones; forman grupos abelianos (§ 5-12, *b*) respecto de la suma, y se cumplen para esta operación y el producto por un número real las leyes distributivas, asociativa y modular:

[60-6] $$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}; \quad (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a};$$

[60-7] $$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a});$$

[60-8] $$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Por consiguiente (Cap. II, nota III, *b*), E_1, E_2 y E_3 son espacios vectoriales o lineales respecto al cuerpo de los números reales. Ver también nota I de este capítulo.

2. De los teoremas 1 a 4 resulta que un vector $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$ es una *base* (Cap. II, nota III, *b*) para el espacio E_1 de los vectores paralelos a él; dos vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ no paralelos forman una base para el espacio E_2 de los vectores coplanares con ellos; y tres no coplanares $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ una base del espacio E_3. Entonces (Cap. II, nota III, *b*) E_1, E_2 y E_3 son espacios vectoriales de 1, 2 y 3 dimensiones respectivamente. Ver también nota I.

3. En la definición axiomática de espacio vectorial, el vector **0** es el módulo del grupo aditivo. Dicho módulo coincide con $0 \cdot \mathbf{c}$ para un vector **c** arbitrario, pues en virtud de [60-8] y la segunda [60-6] es $\mathbf{c} = (1 + 0)\mathbf{c} = \mathbf{c} + 0 \cdot \mathbf{c}$ y basta sumar a los miembros extremos el inverso de **c** en el grupo aditivo para obtener por la ley asociativa de la suma $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{c}$. De aquí deducimos que el vector opuesto $(-1)\mathbf{b} = -\mathbf{b}$ al **b** es también su inverso en el grupo aditivo, pues $\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = (1 - 1)\mathbf{b} = 0 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Por tanto, aplicando la propiedad asociativa de la suma, se prueba que la diferencia definida en [60-1] es la operación inversa de la suma, pues

$$\mathbf{d} + \mathbf{b} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

Recíprocamente, si se define la diferencia **d** como operación inversa de la suma $\mathbf{d} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$, basta agregar $-\mathbf{b}$ a ambos miembros para obtener [60-1].

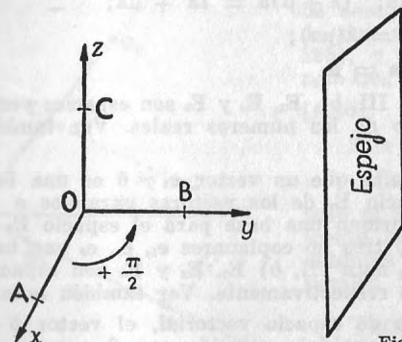
3. **Expresión en coordenadas.** — *a*) Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el espacio $O(x, y, z)$, determinado por *tres ejes* por O, dos a dos perpendiculares, y una *unidad* sobre cada uno: OA, OB, OC, que en adelante y mientras no se diga lo contrario, supondremos iguales (fig. 197, *a*). Con esto sabemos por Geometría analítica * que a cada punto del espacio corresponde una terna de números reales (sus *coordenadas*) y recíprocamente. Recordemos también que dos ternas ortogonales $O(x, y, z)$ y $O'(x', y', z')$ *no siempre se pueden superponer ordenadamente* mediante un movimiento; por ejemplo, no puede superponerse ordenadamente una terna con su imagen en un espejo. Por ello convendremos en clasificar los sistemas de coordenadas cartesianas en *directos* e *inversos* como lo indica la figura 197, donde los ejes x y x' se suponen *hacia adelante*.

Adoptaremos el sistema directo, llamado también *destror-*

* Ver, por ejemplo, J. REY PASTOR, L. A. SANTALÓ y M. BALANZAT, *Geometría analítica* (Kapelusz, Buenos Aires, 19)5), § 33.

sum, dextrógiro o *inglés*; el segundo se llama también *sinistrorsum, levógiro* o *francés*.

b) El sistema de coordenadas queda determinado por el origen O y los versores en la dirección y sentido de cada eje (*versores fundamentales*) : i = OA, j = OB, k = OC.



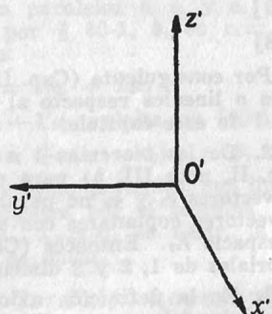


Fig. 197

a) Sistema *directo*: el observador situado según Oz ve superponerse Ox con Oy girando un ángulo menor que un llano en el sentido positivo de la trigonometría.

b) La imagen especular de un sistema directo forma un sistema inverso.

Un sistema cualquiera (no necesariamente ortogonal) queda determinado en la misma forma, con la única condición de que los versores fundamentales no sean coplanares.

Como consecuencia del teorema 4 de § 60-2, cualquier vector a del espacio euclídeo tridimensional se puede expresar unívocamente como combinación lineal de los versores fundamentales i, j, k (fig. 198):

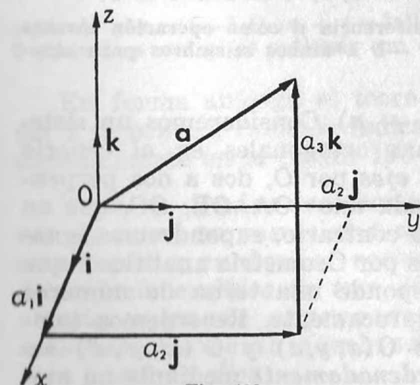


Fig. 198

[60-9] $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

que llamaremos *expresión lineal* del vector a en el sistema O(i, j, k). Los vectores a_1i, a_2j, a_3k (o también los números reales a_1, a_2, a_3, cfr. § 60-4) suelen llamarse *componentes* del vector a respecto del sistema O(i, j, k).

Dados varios vectores por sus expresiones lineales, es muy fácil formar sumas, diferencias y otras combinaciones lineales con ellos.

EJEMPLO. Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, tendremos:
$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 3(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 2(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 7\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.
Conviene ordenar los cálculos escribiendo en columna los vectores y frente a cada uno el respectivo coeficiente numérico:

$$\begin{array}{rrcl} 3) & \mathbf{a} &=& 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ -2) & \mathbf{b} &=& \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \hline & 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &=& 7\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 7\mathbf{k}. \end{array}$$

NOTA. El vector a = PQ de origen P(x_1, y_1, z_1) y extremo Q(x_2, y_2, z_2) tiene por expresión lineal

[60-10] $\mathbf{a} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$.

En efecto, es a = OQ — OP siendo

$$OQ = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} \;, \quad OP = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}.$$

4. Proyección de un vector sobre un eje. — Un *eje* es una recta orientada, es decir, una recta sobre la cual se ha fijado un sentido, indicado por una flecha; por ejemplo, los ejes de un sistema de coordenadas.

Llamaremos *medida de la proyección* (ortogonal) a_e de un vector a = PQ sobre un eje e, o *componente* o *valor* del vector en la dirección y sentido del eje (cfr. § 60-3, *b*), a (la medida de) la longitud del segmento *orientado* P′Q′ determinado por

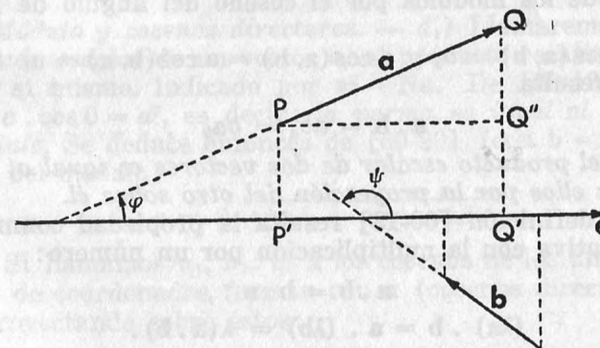


Fig. 199. — $a_e > 0$, pues P′Q′ tiene el sentido de e, en cambio $b_e < 0$.

las proyecciones del origen y extremo de a. El signo será + ó — según que dicho segmento esté orientado en el sentido del eje o en el sentido contrario (fig. 199).

TEOR. 1. *La medida de la proyección de un vector sobre un eje es igual al producto del módulo del vector por el coseno del ángulo que el eje forma con dicho vector*:

[60-11] $a_e = a \,.\, \cos\varphi$.

En efecto, en el triángulo rectángulo PQ″Q (fig. 199), se tiene

$$a_e = P'Q' = PQ'' = PQ \,.\, \cos\varphi = a\cos\varphi.$$

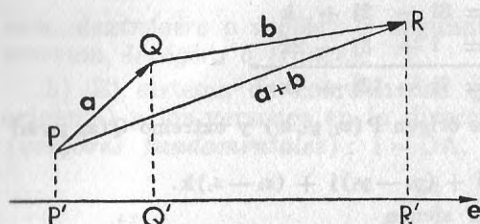


Fig. 200. — $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|_e = a_e + b_e$.

Para medir el ángulo $\varphi = (\mathbf{e}, \mathbf{a})$ deben tenerse en cuenta los sentidos del vector y del eje [fig. 199, $\psi = (\mathbf{e}, \mathbf{b})$]. Es inmediato (fig. 200) el siguiente teorema:

TEOR. 2. *La proyección de la suma de dos (o más) vectores es igual a la suma de las proyecciones de los mismos*:

[60-12] $$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|_e = a_e + b_e.$$

5. **Multiplicación escalar.** — *a*) *Definición y propiedades.* — Se llama *producto escalar* o *interno* $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$ de dos vectores, al escalar

[60-13] $$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \ ,$$

producto de los módulos por el coseno del ángulo de los vectores.

De $b\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = b_a$ y $a\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a\cos(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = a_b$ (§ 60-4, teor. 1) resulta

[60-14] $$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = ab_a = ba_b \ ,$$

es decir: *el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

De la definición [60-13] resulta la propiedad conmutativa y la asociativa con la multiplicación por un número:

[60-15] $$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\,.\,\mathbf{a} \ ,$$

[60-16] $$(\lambda\mathbf{a})\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,.\,(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}) \,.$$

De [60-14] y el teorema 2 de § 60-4 resulta la *distributividad respecto de la suma vectorial*; en efecto

[60-17] $$\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = a\,|\mathbf{b}+\mathbf{c}|_a = a(b_a + c_a) = ab_a + ac_a = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\,.\,\mathbf{c} \,.$$

b) *Expresión en coordenadas.* — Para los versores fundamentales (§ 60-3, *b*) de un sistema *ortonormal* de coordenadas, se tiene por [60-13]:

[60-18] $$\mathbf{i}\,.\,\mathbf{i} = \mathbf{j}\,.\,\mathbf{j} = \mathbf{k}\,.\,\mathbf{k} = 1 \ , \quad \mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} = \mathbf{j}\,.\,\mathbf{k} = \mathbf{k}\,.\,\mathbf{i} = 0.$$

Por consiguiente, si

[60-19] $$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \ , \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \ ,$$

tendremos por [60-17] y [60-16]:

[60-20] $$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

NOTA 1. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se expresan como combinaciones lineales de tres vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ no coplanares

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \ , \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \ ,$$

resulta para el producto escalar la forma bilineal (ver nota II, $\mathbf{a}_2$)

$$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = \Sigma g_{ik}a_ib_k \ , \ \text{con} \ \ g_{ik} = \mathbf{e}_i\,.\,\mathbf{e}_k = g_{ki} \ ,$$

componentes del determinante simétrico (llamado determinante de GRAM de la terna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) $g = \det\{g_{ik}\} > 0$, pues veremos (§ 60-7, nota) que es igual al cuadrado del volumen del paralelepípedo construído sobre $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ como aristas.

c) *Condición de perpendicularidad.* — De [60-13] resulta que la condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ sean perpendiculares es (cfr. nota II, a_3)

[60-21] $$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = 0.$$

NOTA 2. Esto nos muestra que el producto escalar admite divisores del cero (cfr. § 5-12, *c*). Por otra parte, como un vector (no nulo) no puede ser perpendicular a todo vector del espacio, se tiene la llamada *condición de plenitud* (cfr. § 97-7):

[60-22] Si $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = 0$ cualquiera que sea $\mathbf{a}$, es $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

d) *Módulo y cosenos directores.* — d_1) Llamaremos *norma* o *cuadrado escalar* de un vector $\mathbf{a}$, al producto escalar del vector por sí mismo, indicado por $\mathbf{a}^2 = \mathrm{N}\mathbf{a}$. De [60-13] resulta $\mathbf{a}^2 = a\,.\,a\,.\cos 0 = a^2$, es decir: *la norma es igual al cuadrado del módulo.* Se deduce entonces de [60-20] (con $\mathbf{b} = \mathbf{a}$) la expresión del módulo

[60-23] $$a = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

d_2) Si llamamos α_1, α_2, α_3 a los cosenos de los ángulos que los ejes de coordenadas forman con $\mathbf{a}$ (cosenos directores), se tiene proyectando sobre éstos:

[60-24] $$a_1 = a\cos(\mathbf{i}, \mathbf{a}) = a\alpha_1 \ , \quad a_2 = a\alpha_2 \ , \quad a_3 = a\alpha_3 \ , \ \therefore$$

[60-25] $$\alpha_1 = a^{-1}a_1 \ , \quad \alpha_2 = a^{-1}a_2 \ , \quad \alpha_3 = a^{-1}a_3 \ ;$$

es decir: *los cosenos directores de un vector* $\mathbf{a}$ *son las componentes de su versor* $a^{-1}\mathbf{a}$. Éste se expresa entonces en la forma:

[60-26] $$a^{-1}\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}.$$

Diremos "dirección $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$" para caracterizar una dirección y sentido por un versor $\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$. Si tres números son proporcionales a los cosenos directores α_i, se llaman *parámetros* o *coeficientes directores* del vector $\mathbf{a}$, o de su dirección. En especial lo son las coordenadas o componentes a_i.

De [60-26] resulta la relación fundamental entre los cosenos directores de una dirección:

[60-27] $$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

e) *Ángulo de dos vectores.* — De [60-13], [60-20] y [60-23] resulta:

[60-28] $$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

o bien en base a los cosenos directores, con [60-26] y su análoga $b^{-1}\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}$,

[60-29] $$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

En algunos casos interesa expresar $\operatorname{sen}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Restando de la igualdad $1 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)$, la que resulta de elevar al cuadrado ambos miembros de [60-29], se obtiene después de simplificar:

[60-30] $$\operatorname{sen}^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2.$$

NOTA 3. Por cumplir el producto escalar las condiciones [60-15], [60-16], [60-17], [60-22] se dice que los espacios vectoriales E_1, E_2, E_3 (§ 60-2, notas 1 y 2) son *euclídeos* (nota II, a_1), y *propiamente euclídeos* (nota II, *b*) por ser la norma definida positiva $N\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant 0$ y sólo $= 0$, si $\mathbf{a} = 0$. En muchos textos se designan como espacios *seudoeuclídeos* a los euclídeos que no lo son propiamente. En la nota II se generaliza el concepto de espacio euclídeo para un número cualquiera de dimensiones, definiéndose el ángulo mediante el producto escalar.

f) *Trabajo de una fuerza.* — Si un vector **F** representa una fuerza constante, y otro **e** el desplazamiento de un punto al que se aplica, el producto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}$ representa el trabajo, por ser igual al desplazamiento por la componente de la fuerza sobre él.

6. Multiplicación vectorial.

— *a*) Llamaremos *producto vectorial* o *externo* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ de dos vectores, a otro vector **p** de módulo $p = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = a \cdot b \operatorname{sen}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, perpendicular al plano $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y que forma con **a** y **b** un triedro $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})$ del mismo sentido que el elegido para el triedro de coordenadas (§ 60-3, *a*), en nuestro caso, directo.

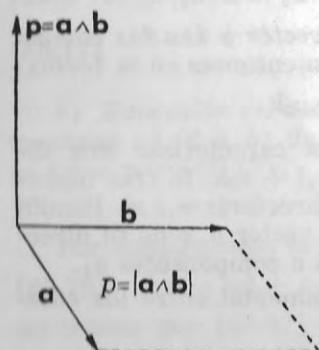


Fig. 201

El módulo del producto vectorial es, por lo tanto, igual al área del paralelogramo construído sobre los dos vectores (figura 201).

Al permutar **a** y **b** cambia el sentido del triedro, luego:

[60-31] $$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}.$$

b) Condición necesaria y suficiente para que dos vectores **a** y **b** sean paralelos es $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$. En particular $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$.

Una condición más sencilla de paralelismo, que resulta de § 60-2, teor. 1, es que existan λ y μ tales que $\lambda a_i + \mu b_i = 0$, o sea si $b_i \neq 0$:

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3\ ,$$

y si por ejemplo $b_1 = 0$: $a_1 = 0$, $a_2/b_2 = a_3/b_3$.

c) Probaremos que el producto vectorial de los vectores [60-19] está dado en forma de determinante por:

[60-32] $$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}\ ,$$

para lo cual bastará verificar que este vector cumple las condiciones de la definición dada en *a*).

c_1) El cuadrado del módulo es:

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

expresión que mediante [60-24], su análoga para el vector **b**, y [60-30], se reduce a $a^2 b^2 \operatorname{sen}^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

c_2) Es perpendicular a **a** y a **b** pues, por ejemplo, su producto escalar por **a** es (§ 13-3, c_2, Cor.):

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

c_3) Para ver que el sentido es el que corresponde al triedro de coordenadas basta aplicar [60-32] al caso $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$. Resulta

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}.$$

Al variar las componentes de **a** y **b** en [60-32], por continuidad el sentido de la terna será siempre el mismo.

d) De la expresión en coordenadas [60-32] y la regla de descomposición de un determinante en suma de otros de igual orden (§ 13-4, c_1), resulta la *propiedad distributiva*

[60-33] $$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}.$$

e) El área del triángulo de vértices $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ es por *a*), [60-32], § 60-3, nota, y [60-23]

$$S = \tfrac{1}{2}\,|\,PQ \wedge PR\,| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Cada determinante de segundo orden representa el área de la proyección del rectángulo construído sobre los vectores, sobre una cara del triedro de coordenadas.

f) El producto vectorial se ha introducido como una generalización natural del *momento* de un vector **a** fijo, o bien axial (§ 60-1, nota 3)

respecto de un punto P, al cual podremos ahora definir como *producto vectorial del vector que tiene el origen* P *y el extremo en la recta de* **a**, *por el vector* **a**.

De [60-33] resulta: *el momento de una suma de vectores es la suma de sus momentos.*

g) *Notaciones vectoriales.* — Todavía se usan diversas notaciones para el producto vectorial, única operación nueva de la Aritmética vectorial, ya que el producto escalar, por ser generalización del producto de números, debe designarse como se hace en Álgebra, es decir, con un punto o sin signo ninguno, de igual modo que la adición y la sustracción se siguen representando por + y —.

El signo $\wedge$ de BURALI-FORTI es usado por los autores italianos y también por algunos de otros países (BUTTY, GARNIER, LAINÉ, ...). Algunos alemanes siguen usando la notación (A . B) para el producto escalar y la [A . B] para el vectorial.

El cómodo signo $\times$ se va imponiendo en los libros modernos franceses (JUVET, VERONNET, ...), alemanes (KOWALEWSKI, LAGALLY, ...), españoles, etc., aunque por usarse también en muchos textos, sobre todo italianos, para representar el producto escalar, puede dar lugar a confusiones. Para evitarlas, representamos el producto escalar por el punto . y el vectorial por $\wedge$ que cuando son usados tienen para todos los autores estos significados.

7. Productos reiterados. — *a*) El *producto mixto* $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) . \mathbf{c}$ es un escalar cuya expresión en coordenadas se obtiene aplicando [60-20] a los vectores [60-32] y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) . \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Como la otra manera de asociar los factores, $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} . \mathbf{c})$, carece de sentido, puede omitirse el paréntesis. Puesto que un determinante de tercer orden no altera permutando cíclicamente las filas, resulta

$$[60\text{-}34] \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} . \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} . \mathbf{a} = \mathbf{a} . \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad ,$$

por lo cual pueden suprimirse también los signos $\wedge$ y . , indicando el producto mixto así: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

El producto mixto es en valor absoluto igual al volumen del paralelepípedo construído sobre los tres vectores como aristas concurrentes, indicando su signo el sentido directo (+) *o inverso* (—) *del triedro formado por ellos.* En efecto, si $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{p}$, tendremos por [60-14], $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{p} . \mathbf{c} = pc_p$, representando el primer factor la base (§ 60-6, *a*) en sentido directo, y el segundo la altura orientada, del paralelepípedo en cuestión.

Por consiguiente: *condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean coplanares, es que se anule su producto mixto.*

NOTA. Multiplicando por filas (§ 13-6) los determinantes que expresan en coordenadas los productos mixtos, se tiene por [60-20]

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') = \begin{vmatrix} \mathbf{a}.\mathbf{a}' & \mathbf{a}.\mathbf{b}' & \mathbf{a}.\mathbf{c}' \\ \mathbf{b}.\mathbf{a}' & \mathbf{b}.\mathbf{b}' & \mathbf{b}.\mathbf{c}' \\ \mathbf{c}.\mathbf{a}' & \mathbf{c}.\mathbf{b}' & \mathbf{c}.\mathbf{c}' \end{vmatrix} \quad ;$$

este determinante, formado por productos escalares, se llama *determinante de las ternas* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ y $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$, indicado por $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a}' & \mathbf{b}' & \mathbf{c}' \end{pmatrix}$, y es entonces igual al producto de los volúmenes de los paralelepípedos construídos sobre cada terna, con signo + ó — según que ambas tengan igual sentido o no. Si las dos ternas coinciden se tiene el *determinante de* GRAM ya considerado en § 60-5, nota 1; $G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \geqslant 0$, y sólo $= 0$ si **a**, **b** y **c** son coplanares.

b) El *doble producto vectorial* $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ es un vector situado en el plano (**b**, **c**) por ser normal al vector $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ que a su vez es normal al plano. Será entonces (§ 60-2) combinación lineal de **b** y **c**, y se demuestra (ver ejercicio 21 de § 60) que

$$[60\text{-}35] \qquad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a}.\mathbf{b} & \mathbf{a}.\mathbf{c} \end{vmatrix} .$$

8. Aplicaciones: rectas y planos. — *a*) *Recta y plano en formas vectorial y paramétrica.* — a_1) *Recta.* — Una recta queda determinada por la condición de pasar por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y ser paralela a un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \neq 0$. Es $P(x, y, z)$ un punto de la recta si y sólo si son paralelos los vectores P_0P y **a**, y entonces (§ 60-2, teor. 1) $P_0P = u\mathbf{a}$, o llamando $\mathbf{r}_0 = OP_0$, $\mathbf{r} = OP$ a los vectores que sitúan los puntos P_0 y P con respecto al origen O

$$P_0P = OP - OP_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = u\mathbf{a}.$$

Así, resulta

$$[60\text{-}36] \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} \quad , \quad (\mathbf{a} \neq 0) \quad ,$$

llamada *ecuación vectorial paramétrica de la recta.* Para cada valor del *parámetro u* se tiene un punto P de la recta, dado por el vector que lo sitúa desde el origen, y recíprocamente.

NOTAS: 1. En un espacio vectorial E_n (nota I) los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ forman un subespacio vectorial o lineal (nota I, a_5) de una dimensión, siendo **a** una base. Por tal razón los vectores **r** dados por [60-36] *definen* (nota I, a_6) una *variedad lineal de una dimensión*, también llamada *línea recta.*

2. En E_3, [60-36] es equivalente a poner $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{a} = 0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

EJERCICIO 1. Condiciones para que [60-36] y

$$[60\text{-}37] \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{b} \quad , \quad (\mathbf{b} \neq 0) \quad ,$$

representen la misma recta.

Proyectando [60-36] sobre cada eje de coordenadas, o sea multiplicando escalarmente por **i**, **j**, **k** sucesivamente, se obtienen las *ecuaciones paramétricas de la recta*

$$[60\text{-}38] \qquad x = x_0 + ua_1 \quad , \quad y = y_0 + ua_2 \quad , \quad z = z_0 + ua_3 .$$

Si **a** es unitario o normal (§ 60-1, *b*), de componentes (cosenos directores, § 60-5, d_1) α_1, α_2, α_3, se tienen las *ecuaciones paramétricas normalizadas*

[60-39] $$x = x_0 + u\alpha_1 \ , \quad y = y_0 + u\alpha_2 \quad , \quad z = z_0 + u\alpha_3 .$$

NOTA 3. El parámetro u en [60-36], [60-38] ó [60-39] es la abscisa sobre la recta, en un sistema de origen P_0, unidad $a = |\mathbf{a}|$, y sentido el de **a**. En particular, en [60-39] es u = distancia entre P_0 y P.

a_2) *Plano.* — Un plano queda determinado por la condición de pasar por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y ser paralelo a dos vectores no paralelos, o sea (§ 60-2, teor. 1) linealmente independientes $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Es $P(x, y, z)$ un punto del plano, si y sólo si son coplanares los vectores P_0P, **a** y **b**, o sea (§ 60-2, teor. 3) si y sólo si existe entre ellos una relación lineal. En ella ha de ser no nulo el coeficiente de P_0P, pues de lo contrario serían **a** y **b** linealmente dependientes contra lo supuesto; entonces puede despejarse $P_0P = OP - OP_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ dando

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \ ,$$

o sea

[60-40] $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \ ,$$

(**a**, **b** *linealmente independientes*),

llamada *ecuación vectorial paramétrica del plano*. Para cada par de valores de los *parámetros u, v*, se tiene un punto P del plano, dado por el vector que lo sitúa desde el origen, y recíprocamente.

NOTAS: 4. En un espacio vectorial E_n (nota I) los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ forman un subespacio vectorial o lineal (nota I, a_5) de dos dimensiones, siendo **a**, **b** una base. Por tal razón los vectores **r** dados por [60-40] *definen* (nota I, a_6) una *variedad lineal de dos dimensiones*, también llamada *plano*.

5. En E_3, [60-40] es equivalente a poner $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) . (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0$, es decir (§ 60-7):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

EJERCICIO 2. Condición para que [60-40] y

[60-41] $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{c} + v\mathbf{d} \ , \quad (\mathbf{c}, \mathbf{d} \textit{ linealmente independientes}),$$

representen el mismo plano.

Proyectando [60-40] sobre cada eje de coordenadas, o sea multiplicando escalarmente por **i**, **j**, **k**, se obtienen las *ecuaciones paramétricas del plano*

[60-42] $$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \ , \quad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \ ,$$
$$z = z_0 + ua_3 + vb_3 .$$

NOTA 6. Los parámetros u, v en [60-40] ó [60-42] son coordenadas cartesianas en el plano, en un sistema de origen P_0 y vectores de referencia **a**, **b**.

b) *El plano como variedad ortogonal. Otras formas de la ecuación del plano.* — b_1) Un plano en E_3 queda también determinado por la condición de pasar por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y ser perpendicular a un vector $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. El punto $P(x, y, z)$ estará en el plano si y sólo si son perpendiculares los vectores **n** y $P_0P = OP - OP_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, o sea (§ 60-5, *c*) si y sólo si

[60-43] $$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) . \mathbf{n} = 0 \quad , \quad (\mathbf{n} \neq \mathbf{0}) \quad ,$$

llamada *ecuación vectorial del plano como variedad ortogonal.* Si **n** es unitario, el primer miembro de [60-43] representa la distancia de P al plano [60-43] (§ 60-5, *a*).

En el plano, [60-43] representa la recta perpendicular al vector **n** por el punto P_0 tal que $OP_0 = \mathbf{r}_0$.

En un espacio vectorial E_n (nota I) los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ son por [60-43] todos los ortogonales a **n** (o al subespacio vectorial E_1 de base **n**) y forman un subespacio E_{n-1} de $n - 1$ dimensiones, llamado *subespacio ortogonal* de **n** (o de E_1). Entonces los vectores **r** forman (nota I, a_6) una variedad lineal, que por tener dimensión $n - 1$ se llama *hiperplano*. En el espacio E_3 los hiperplanos son los planos; en el plano los hiperplanos son las rectas (nota 5).

EJERCICIO 3. Condición para que [60-43] y

[60-44] $$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) . \mathbf{m} = 0 \quad (\mathbf{m} \neq \mathbf{0}) \ ,$$

representen el mismo plano.

Expresando [60-43] en coordenadas (§ 60-5, *b*) se tiene la ecuación cartesiana del plano por un punto

[60-45] $$(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0 \ ,$$

donde n_1, n_2, n_3 son parámetros directores (cosenos directores si **n** es unitario) de la normal al plano; se los llama también *parámetros directores (cosenos directores) del plano.*

EJEMPLO 1. El plano por $P_0(1, 0, -2)$ y perpendicular al vector $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ tiene por ecuación:

$$3(x - 1) - 4y + 0(z + 2) = 0 \quad ó \quad 3x - 4y - 3 = 0.$$

Sus cosenos directores (cosenos directores de la normal) son 3/5, —4/5, 0, y entonces el plano es paralelo al eje z (por ser su normal **n** perpendicular a z).

b_2) *Ecuación normal o hessiana.* — Por la distributividad del producto escalar (§ 60-5, *a*) puede escribirse [60-43] en la forma

[60-46] $$\mathbf{r} . \mathbf{n} = \mathbf{r}_0 . \mathbf{n} \ ,$$

y observando que si **n** es unitario:

1º) Sus componentes son los cosenos directores del plano, que llamaremos α_1, α_2, α_3;

2º) $\mathbf{r}_0 . \mathbf{n}$, por ser (§ 60-5, *a*) la proyección de $\mathbf{r}_0$ sobre $\mathbf{n}$, da la distancia p del origen O al plano (medida desde O al plano en el sentido elegido para $\mathbf{n}$) ; tendremos:

[60-47] $x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = p.$

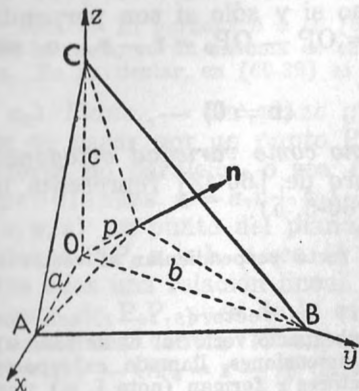


Fig. 202

En esta ecuación, llamada *normal* o *hessiana*, la distancia de O al plano es $p > 0$ si se elige $\mathbf{n}$ hacia el semiespacio que *no* contiene el origen O (fig. 202).

NOTA 7. En el plano, la *ecuación normal o hessiana de la recta* es (cfr. nota 5)

[60-48] $x\alpha_1 + y\alpha_2 = p$,

siendo p la distancia del origen O a la recta, y α_1, α_2 los cosenos directores de su normal.

*b*₃) *Ecuación general. Cosenos directores y distancia a un punto.* — Vimos (b_1, b_2) que un plano se representa por *una* ecuación de *primer grado en x, y, z.* Recíprocamente, toda ecuación de primer grado

[60-49] $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$

con a_1, a_2, a_3 no simultáneamente nulos, representa un plano, por lo cual se llama a [60-49] *ecuación general del plano.* En efecto, dividiendo [60-49] por $\pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ se la lleva a la forma normal [60-47], y entonces los coeficientes a_1, a_2, a_3 son parámetros directores del plano [60-49] siendo sus cosenos directores, y la distancia del origen a él, dados por:

[60-50] $$\alpha_i = \frac{a_i}{\pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \,, \quad (i = 1, 2, 3)\,;$$

[60-51] $$p = \frac{-a_4}{\pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \,.$$

En general (cfr. nota 8) elegiremos el signo de las raíces de modo que resulte $p > 0$ (cfr. b_2). En la aplicación práctica es importante recordar que si un coseno director resulta positivo (negativo) se refiere a un ángulo agudo (obtuso).

EJEMPLO 2. Sea el plano $2x - 3y + 6z = 5$.
La ecuación no es normal, pues la raíz de la suma de cuadrados de los coeficientes directores es $\sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, pero se convierte en normal dividiendo por 7 y resulta:

$$\frac{2x}{7} - \frac{3y}{7} + \frac{6z}{7} = \frac{5}{7} \,.$$

Los cosenos directores son: 2/7, —3/7, 6/7, y la distancia del origen al plano es 5/7.

NOTA 8. En los haces de planos paralelos conviene adoptar para todos éstos los coeficientes α_i de uno (lo que equivale a fijar un sentido en la normal) y entonces toma p valores positivos o negativos según la posición del plano.

La distancia entre dos planos paralelos:

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \quad ; \quad a_1x + a_2x + a_3x + a'_4 = 0$$

es por consiguiente $a'_4 - a_4$ si estas ecuaciones están en forma normal. En caso contrario, habrá que dividirlas precisamente por $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

La distancia del punto (x_0, y_0, z_0) al plano [60-49] se obtiene trazando por este punto el plano paralelo

$$a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0 \,,$$

o sea

[60-52] $a_1x + a_2y + a_3z = a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0$,

y la distancia del punto al plano [60-49] es la distancia entre los planos [60-49] y [60-52], es decir

[60-53] $$d = \frac{a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \,.$$

Luego, *la distancia de un punto a un plano es el valor que toma en ese punto el cuatrinomio de la ecuación normal.*

Para $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ se obtiene el signo de d en [60-53] que corresponde al lado del plano donde está el origen, una vez fijado el signo del radical del denominador.

*b*₄) *Casos particulares.* — 1º) La condición para que el plano [60-49] pase por el origen es $a_4 = 0$, es decir que se anule el término independiente (cfr. b_2).

2º) Si y sólo si en [60-49] falta una variable, es decir se anula su coeficiente, el plano es paralelo al respectivo eje de coordenadas. Por ejemplo si $a_3 = 0$, la ecuación

$$a_1x + a_2y + a_4 = 0 \,,$$

que en el plano (x, y) representa una recta s, representa en el espacio (x, y, z) un plano por s y paralelo al eje z, pues si $P_0(x_0, y_0)$ es un punto de s, satisfacen a la ecuación todos los puntos del espacio (x_0, y_0, z) con z arbitrario. Cfr. ejemplo 1.

*b*₅) *Plano por tres puntos.* — Dados tres puntos no alineados (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), la ecuación

[60-54] $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



es de primer grado y se satisface por las coordenadas de los tres puntos; luego, representa el plano determinado por éstos.

Otro modo de escribir la misma ecuación es:

[60-55] $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

que se deduce restando la segunda fila de cada una de las otras.

EJEMPLO 3. Plano determinado por los puntos (2, —1, 5), (4, 0, —3), (1, 2, 1).

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 2 & 1 & -8 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

NOTAS: 9. En el caso en que la ecuación [60-54] o su equivalente [60-55] tenga todos los coeficientes nulos, es decir, sean nulos los tres menores complementarios de los elementos de la primera fila de [60-55] y por tanto se verifique:

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_1} = \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$$

están alineados los tres puntos en virtud de [60-39].

10. Los puntos $P(x, y, z)$ y $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $(i = 1, 2, 3)$, son coplanares si y sólo si lo son los vectores P_1P, P_1P_2, P_1P_3 y así resulta también de § 60-7, *a*, la ecuación [60-55] y su equivalente [60-54]. Esta deducción muestra también que para *cualquier* punto $P(x, y, z)$, el *volumen del tetraedro* de vértices P y P_i, es *la sexta parte del primer miembro de* [60-54], *en valor absoluto*.

b_6) *Forma segmentaria.* — Si los parámetros directores a_1, a_2, a_3 y el término independiente a_4 de [60-49] son distintos de cero, es decir (b_4) si el plano no es paralelo a ningún eje de coordenadas ni pasa por el origen, obtenemos una interpretación geométrica interesante. Haciendo $y = z = 0$, el segmento a que el plano interseca con el eje x, o sea la abscisa de la intersección con el eje de abscisas, resulta $a = -a_4/a_1$. Análogamente (fig. 202) $b = -a_4/a_2$, $c = -a_4/a_3$. Luego, dividiendo [60-49] por $-a_4$ resulta esta ecuación, que puede formarse directamente, conocidos a, b, c

[60-56] $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

EJEMPLO 4. Plano que interseca sobre los ejes segmentos 2, + 3, — 1. La ecuación de dicho plano es

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1.$$

c) *Otras formas de las ecuaciones de la recta.* — c_1) *Formas direccionales.* — c_{11}) *Rectas por un punto.* — Eliminando el parámetro u entre las [60-38], o bien [60-39], resultan estas formas (la segunda normalizada) de las ecuaciones de la recta por un punto P y parámetros (cosenos) directores a_1, a_2, a_3 (α_1, α_2, α_3):

[60-57] $$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

[60-58] $$\frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\alpha_2} = \frac{z-z_0}{\alpha_3}.$$

NOTA 11. Si se anula uno de los cosenos directores, el reemplazo directo en [60-58] pierde significación, pero al ser la recta perpendicular al correspondiente eje, es constante la respectiva coordenada, de modo que por ejemplo si $\alpha_3 = 0$ las ecuaciones de la recta son

[60-59] $$\frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\alpha_2}; \quad z - z_0 = 0.$$

Con el convenio de anular el numerador cuando se anula el denominador, pueden adoptarse las ecuaciones [60-58] como válidas en todos los casos.

c_{12}) *Recta por dos puntos.* — Si la recta [60-57] pasa también por $P_1(x_1, y_1, z_1)$, las diferencias de coordenadas homólogas $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$ son parámetros directores (§ 60-3, nota) y resulta entonces de [60-57]

[60-60] $$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

NOTA 12. Si P_0 y P_1 tienen dos coordenadas homólogas iguales, el reemplazo directo en [60-60] pierde significación; pero al ser la recta perpendicular al correspondiente eje, es constante la respectiva coordenada, de modo que por ejemplo si $z_0 = z_1$ las ecuaciones de la recta son (cfr. nota 11)

[60-61] $$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}; \quad z - z_0 = 0.$$

c_2) *Forma general de las ecuaciones de la recta y consecuencias.* — c_{21}) Vimos en c_1 que una recta se representa por dos ecuaciones de primer grado en x, y, z. Pero recíprocamente, un par de ecuaciones de primer grado en x, y, z:

[60-62] $$\begin{cases} P \equiv a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \\ Q \equiv b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0 \end{cases},$$

representa una recta como intersección de dos planos. Pues los puntos (x, y, z) que satisfacen ambas ecuaciones [60-62] son los que están en ambos planos a la vez, es decir los de su intersección y sólo ellos.

c_{22}) Cualquiera sea λ, el plano

[60-63] $$P - \lambda Q = 0$$

pasa por la recta [60-62], pues todo punto de la recta $P = Q = 0$ verifica [60-63]. Considerando λ como un parámetro, [60-63] representa un *haz de planos de arista* $P = Q = 0$.

c_{23}) Entre los planos del haz [60-63], los que proyectan la recta [60-62] paralelamente a cada eje de coordenadas se obtienen eliminando entre ambas ecuaciones [60-62] la correspondiente variable (b_4). Procediendo así se obtienen las llamadas *ecuaciones reducidas* de la recta

[60-64] $$y = mx + h \quad ; \quad z = nx + k \ ,$$

como intersección de dos planos proyectantes.

EJEMPLO 5. Planos proyectantes de la recta de ecuaciones

$$3x - 2y + z = 1;$$
$$x + y - z = 2.$$

Sumando, se elimina z y resulta: $4x - y = 3$

Sumando a la 1ª ecuación el duplo de la 2ª: $5x - z = 5$

Restando de la 1ª ecuación el triplo de la 2ª: $5y - 4z = 5$.

Si se desea proyectar la recta P = Q = 0, desde un punto propio (x_1, y_1, z_1), el método más sencillo y rápido es éste: para que un plano del haz [60-63] pase por el punto (x_1, y_1, z_1), éste debe satisfacer a la ecuación, y sustituyendo las coordenadas se despeja el valor de λ.

EJEMPLO 6. Sea la recta de ecuaciones:

$$2x - 3y - z = 2$$
$$x + 5y - 2z = 2.$$

El plano que la proyecta desde el origen, se obtiene eliminando el término constante, y para ello basta restar, resultando así el plano: $x - 8y + z = 0$.

Para proyectar la misma recta desde el punto $(1, -2, 1)$, restaremos de cada una de ellas, la otra multiplicada por λ

$$(2x - 3y - z - 2) = \lambda(x + 5y - 2z - 2).$$

Y sustituyendo las coordenadas $(1, -2, 1)$ resulta: $\lambda = -{}^5/_{13}$.

Por tanto, la ecuación del plano proyectante es: $31x - 14y - 23z = 36$.

NOTA 13. LEY DE DUALIDAD. — Los coeficientes u, v, w de la ecuación del plano:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

se llaman *coordenadas plückerianas* del mismo. Fijados, x, y, z, todos los planos (u, v, w) que satisfacen a esta ecuación forman la radiación que tiene ese vértice. Toda propiedad de incidencia de puntos, rectas y planos tiene su *correlativa* o *dual* sustituyendo los puntos por planos y viceversa.

d) *Ángulos, paralelismo y perpendicularidad.* — Teniendo presente que los cosenos directores de un plano son los de su recta normal, que el ángulo de dos planos es igual al de sus normales y el que forma una recta con un plano es complementario del que forma con su normal, que una recta es perpendicular (paralela) a un plano si y sólo si es paralela (perpendicular) a su normal, resulta de §§ 60-5, *c* y *e*, y 60-6, *a*,

que si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ son ternas de cosenos directores de dos elementos geométricos de los que estamos considerando (rectas y planos):

d_1) *Para elementos homogéneos* (recta con recta o plano con plano):

[60-65] $\cos\theta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$, ($\theta$ = *ángulo que forman*).

[60-66] $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$, *y en especial* $\alpha_i = \pm\, \beta_i$: *paralelismo.*

[60-67] $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$: *perpendicularidad.*

d_2) *Para elementos heterogéneos* (recta con plano):

[60-68] $\operatorname{sen}\theta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$, ($\theta$ = *ángulo que forman*).

[60-69] $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$: *paralelismo.*

[60-70] $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$, *y en especial* $\alpha_i = \pm\, \beta_i$: *perpendicularidad.*

EJERCICIOS

1. Verificar que con la notación de § 60-1, nota 4, se tiene:
$$(A - B) + (B - C) + (C - D) = A - D \ ,$$
es decir, el mismo resultado que simplificando formalmente.

2. Dada la recta r, ($y = 2x - 1$, $z = -x + 3$) determinar: 1º) Las componentes del vector axial cuya línea de acción es dicha recta r, forma ángulo agudo con el semieje $z > 0$ y tiene módulo 6; 2º) El módulo y las otras componentes del vector axial cuya línea de acción es la recta r y tiene como segunda componente $+4$.

3. Módulo, componentes y línea de acción orientada r del vector fijo cuyo origen es el punto $(0, -1, 3)$ y el extremo $(2, 3, 1)$.

4. Probar que la condición necesaria y suficiente para que los extremos de tres [cuatro] vectores **a**, **b**, **c** [**a**, **b**, **c**, **d**] con el mismo origen, estén en una recta [plano] es que existan tres [cuatro] números α, β, γ [$\alpha, \beta, \gamma, \delta$] no simultáneamente nulos y tales que: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$, [$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = 0$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$].

5. Determinar una relación entre las componentes a_i del vector **a** para que sean linealmente dependientes los vectores $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(2, -1, 7)$ y $\mathbf{c}(3, -6, 3)$. Caracterizar geométricamente la condición hallada.

6. Descomponer el vector $\mathbf{a} = 14\mathbf{i} - 13\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ en tres vectores **r**, **s**, **t** cuyas respectivas direcciones tengan parámetros directores $(2, 1, 5)$, $(-2, 4, 0)$, $(-1, -3, 4)$. Discusión de casos imposibles e indeterminados.

7. Probar que la ecuación OX OA = OA . OA representa un plano por A y perpendicular a OA.

8. Demostrar el *teorema del coseno* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ mediante el producto escalar.

9. En el plano de dos vectores **a** y **b** no paralelos, dar un vector **c** perpendicular a **a**.

10. Si en un tetraedro ABCD dos pares de aristas opuestas son ortogonales, lo mismo ocurre con el tercer par.

11. Sea ABC un triángulo esférico, O el centro de la esfera, B_1 y C_1 las proyecciones de B y C sobre OA. Multiplicando escalarmente las igualdades:

$$OB = OB_1 + B_1B \quad , \quad OC = OC_1 + C_1C \quad ,$$

obtener el *teorema del coseno* de la trigonometría esférica:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A .$$

12. Probar e interpretar geométricamente las identidades:

1º) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2)$;

2º) $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

13. Si cada cara de un tetraedro se representa por un vector normal hacia el exterior y de módulo proporcional a su área, la suma de los vectores es **0**.

14. Siendo la incógnita el vector **x**, resolver: 1º) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$; 2º) $\mathbf{a}.\mathbf{x} = \mathbf{a}.\mathbf{b}$; 3º) El sistema de las dos ecuaciones anteriores.

15. Probar que si **a**, **b**, **c** no son coplanares, el sistema de ecuaciones: $\mathbf{a}.\mathbf{x} = \alpha$; $\mathbf{b}.\mathbf{x} = \beta$; $\mathbf{c}.\mathbf{x} = \gamma$ tiene la solución única

$$\mathbf{x} = [\alpha\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \beta\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + \gamma\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}]/(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

16. Dada la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ y definida la *base recíproca* $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ mediante las condiciones

$$\mathbf{e}_r . \mathbf{e}^s = \delta_{rs} \quad , \quad (\delta_{rs} = 0 \text{ si } r \neq s; \ = 1 \text{ si } r = s) \quad ,$$

probar que es

$$\mathbf{e}^1 = (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)/(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \quad ; \quad \mathbf{e}^2 = (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1)/(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \quad ;$$

$$\mathbf{e}^3 = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)/(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \quad ; \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) = 1 .$$

Aplicarlo al caso

$$\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{e}_3 = -1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} .$$

17. Condición necesaria y suficiente para que una base sea autorecíproca.

18. Demostrar que las componentes llamadas *contravariantes* (u^1, u^2, u^3) de un vector **u** respecto de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se encuentran mediante $u^i = \mathbf{u}.\mathbf{e}^i$ $(i = 1, 2, 3)$, mientras que las componentes llamadas *covariantes* (v_1, v_2, v_3) de un vector **v** respecto de la base recíproca $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ se encuentran mediante $v_i = \mathbf{v}.\mathbf{e}_i$, $(i = 1, 2, 3)$. Demostrar que el producto escalar viene dado por $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \Sigma_i u^i v_i = \Sigma_i u_i v^i$.

19. Productos escalar y vectorial de los vectores

$$\mathbf{u} = 5\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \quad , \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$$

sirviéndose del sistema recíproco $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ del $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ donde

$$\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{e}_2 = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{e}_3 = -1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} .$$

20. Determinar el volumen del paralelepípedo abarcado por tres vectores **u**, **v**, **w** referidos a una base cualquiera $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$; aplicar a los datos del ejercicio anterior con $\mathbf{w} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3$.

21. *a*) De la ortogonalidad de $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ a **u** y a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ deducir que ha de ser

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \mathbf{uv} & \mathbf{uw} \end{vmatrix} ;$$

b) Aplicando la fórmula anterior a $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$, mediante el módulo, dirección y sentido de $\{\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})\} \wedge \mathbf{v}$, demostrar que es

$$\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \mathbf{v}^2 & \mathbf{vw} \end{vmatrix} ;$$

c) Deducir de ésta que en *a*) es siempre $\lambda = +1$, es decir, [60-35].

22. *a*) Demostrar [60-35] mediante las expresiones en coordenadas; *b*) De ella deducir $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

23. Indicar los casos en que se cumple $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$.

24. De [60-34] y [60-35] deducir la *identidad de* LAGRANGE para el producto escalar de dos productos vectoriales:

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) . (\mathbf{u}' \wedge \mathbf{v}') = \begin{vmatrix} \mathbf{u}.\mathbf{u}' & \mathbf{u}.\mathbf{v}' \\ \mathbf{v}.\mathbf{u}' & \mathbf{v}.\mathbf{v}' \end{vmatrix} .$$

25. Del ejercicio anterior deducir (CAUCHY-SCHWARZ, cfr. nota II, *b*):

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = u^2 . v^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2 \geqslant 0 \quad ,$$

dándose la igualdad cuando y sólo cuando **u** y **v** son linealmente dependientes.

26. De [60-31], [60-34] y [60-35] deducir:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a} = (\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}.$$

27. Del ejercicio anterior deducir la siguiente expresión de un vector **d** como combinación lineal de tres vectores no coplanares **a**, **b**, **c**:

$$\mathbf{d} = \frac{(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}\mathbf{a} - \frac{(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}\mathbf{b} + \frac{(\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}\mathbf{c}.$$

28. Sea ABC un triángulo esférico y O el centro de la esfera de radio 1 que lo contiene. Aplicando el ejercicio 26 a los vectores OA, OB, OC, OA y OA, OB, OC, OB, deducir la relación (*teorema del seno*):

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C} .$$

29. *a*) Ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -2, 1)$ y es perpendicular al plano $3x - y + z = 5$; *b*) Ecuación del plano que pasa por $(2, 4, -3)$ y es perpendicular a la recta $y = 3x + 2$, $z = 2x - 1$; *c*) Ecuaciones de los planos perpendiculares a la recta anterior y a la distancia 2 del origen.

30. Ángulo de la recta $x/\sqrt{3} = y$, $z = 0$, con el plano $2x + \sqrt{3}y + \sqrt{2}\,z = 4$.

31. Intersección del plano $3x - 2y + z = -6$ con la recta de ejercicio 29, *b*.

32. Probar que el punto G tal que (cfr. § 84-6):

$$OG = \frac{m_1 OA_1 + \ldots + m_k OA_k}{m_1 + \ldots + m_k} ,$$

llamado *baricentro* del sistema de puntos $A_1, \ldots, A_k$, con las masas $m_1, \ldots, m_k$, no depende del punto O, y en consecuencia (tomando O = G) está caracterizado por la propiedad: $\Sigma m_i GA_i = 0$.

33. Probar que si a cada punto A_i (ejercicio anterior) se aplica una fuerza $m_i\mathbf{g}$, la suma de los *momentos* $GA_i \wedge m_i\mathbf{g}$ respecto del baricentro G es nula cualquiera sea el vector **g**, y respecto de otro punto M, igual al momento de una única fuerza $\mathbf{f} = (m_1 + \ldots + m_k)\mathbf{g}$ (resultante), aplicada en G.

34. Interpretar geométricamente las identidades triviales:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \left(\mathbf{a} + 2\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\right) = \left(\mathbf{b} + 2\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}\right) = \left(\mathbf{c} + 2\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\right) ,$$

cuando $\mathbf{a} = OA$, $\mathbf{b} = OB$, $\mathbf{c} = OC$.

35. Probar que dados un punto O y dos vectores libres **u** y **m** tales

que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{m}=0$, existe un único vector deslizante $\{\mathbf{u}, r\}$ (§ 60-1, nota 3; vector $\mathbf{u}$ en la recta r) de momento $\mathbf{m}$ respecto de O. Entonces el vector deslizante puede indicarse $\mathrm{O}(\mathbf{u},\mathbf{m})$, por sus *coordenadas vectoriales* respecto del punto O.

36. Probar que si $\mathrm{OO}'=\mathbf{a}$, es (ejercicio anterior):

$$\mathrm{O}(\mathbf{u},\mathbf{m}) = \mathrm{O}'(\mathbf{u}, \mathbf{m}-\mathbf{a}\wedge\mathbf{u}).$$

§ 61. TRANSFORMACIONES LINEALES

1. **Transformación de coordenadas.** — *a*) Dado un punto $\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3)$ en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales $\mathrm{O}(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$, nos proponemos calcular sus coordenadas x'_1, x'_2, x'_3 en otro sistema también ortogonal $\mathrm{O}'(\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}')$. Ante todo debemos ubicar el nuevo sistema con respecto al primitivo, dando las coordenadas (x_1^0, x_2^0, x_3^0) de O′, y el cuadro de cosenos directores de cada uno de los nuevos ejes, que es a la vez cuadro de productos escalares de los versores fundamentales de una y otra terna:

[61-1]

	x'_1	x'_2	x'_3
x_1	λ_{11}	λ_{21}	λ_{31}
x_2	λ_{12}	λ_{22}	λ_{32}
x_3	λ_{13}	λ_{23}	λ_{33}

$$;\quad \begin{cases} \lambda_{11} = \mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}, \ \ldots \\ \lambda_{12} = \mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}, \ \ldots \\ \lambda_{13} = \mathbf{i}'\cdot\mathbf{k}, \ \ldots \end{cases}$$

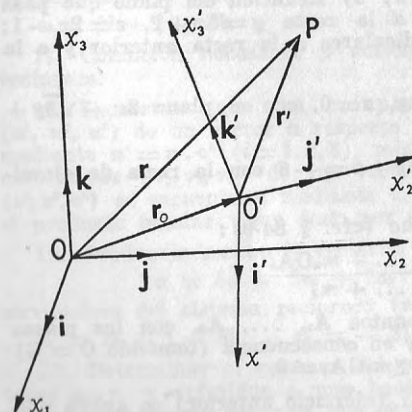


Fig. 203

Entre los vectores $\mathbf{r}=\mathrm{OP}$, $\mathbf{r}'=\mathrm{O'P}$ que sitúan el punto P en uno y otro sistema de coordenadas, y el $\mathbf{r}_0=\mathrm{OO}'$, existe la relación (fig. 203; nota III, *a*)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\ ,$$

o sea

$$[61\text{-}2]\quad x'_1\mathbf{i}' + x'_2\mathbf{j}' + x'_3\mathbf{k}' = (x_1 - x_1^0)\mathbf{i} + (x_2 - x_2^0)\mathbf{j} + (x_3 - x_3^0)\mathbf{k}.$$

Multiplicando escalarmente por $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ y $\mathbf{k}'$ resultan las fórmulas de transformación para pasar del sistema $\mathrm{O}(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ al $\mathrm{O}'(\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}')$:

$$[61\text{-}3]\quad \begin{cases} x'_1 = \lambda_{11}(x_1 - x_1^0) + \lambda_{12}(x_2 - x_2^0) + \lambda_{13}(x_3 - x_3^0) \\ x'_2 = \lambda_{21}(x_1 - x_1^0) + \lambda_{22}(x_2 - x_2^0) + \lambda_{23}(x_3 - x_3^0) \\ x'_3 = \lambda_{31}(x_1 - x_1^0) + \lambda_{32}(x_2 - x_2^0) + \lambda_{33}(x_3 - x_3^0). \end{cases}$$

Para obtener las fórmulas para pasar recíprocamente del

sistema $\mathrm{O}'(\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}')$ al $\mathrm{O}(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ basta multiplicar escalarmente [61-2] por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$[61\text{-}4]\quad \begin{cases} x_1 = \lambda_{11}x'_1 + \lambda_{21}x'_2 + \lambda_{31}x'_3 + x_1^0 \\ x_2 = \lambda_{12}x'_1 + \lambda_{22}x'_2 + \lambda_{32}x'_3 + x_2^0 \\ x_3 = \lambda_{13}x'_1 + \lambda_{23}x'_2 + \lambda_{33}x'_3 + x_3^0. \end{cases}$$

b) *Casos particulares.* — b_1) Si el nuevo sistema se ha obtenido por *traslación* del primitivo, se tiene $\lambda_{rs} = \delta_{rs}$, donde el símbolo δ_{rs} (delta de KRONECKER) vale 1 si $r=s$, 0 si $r \neq s$, y las [61-3] se reducen a

$$[61\text{-}5]\quad x'_1 = x_1 - x_1^0\ ,\quad x'_2 = x_2 - x_2^0\ ,\quad x'_3 = x_3 - x_3^0.$$

b_2) Si los orígenes coinciden: $\mathrm{O}' \equiv \mathrm{O}$, se tiene:

$$[61\text{-}6]\quad x'_i = \sum_{k=1}^{3} \lambda_{ik}x_k,\ \text{ó}\ \begin{cases} x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\ x'_2 = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\ x'_3 = \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{cases}$$

$$[61\text{-}7]\quad x_i = \sum_{k=1}^{3} \lambda_{ki}x'_k,\ \text{ó}\ \begin{cases} x_1 = \lambda_{11}x'_1 + \lambda_{21}x'_2 + \lambda_{31}x'_3 \\ x_2 = \lambda_{12}x'_1 + \lambda_{22}x'_2 + \lambda_{32}x'_3 \\ x_3 = \lambda_{13}x'_1 + \lambda_{23}x'_2 + \lambda_{33}x'_3. \end{cases}$$

c) Multiplicando escalarmente entre sí los versores fundamentales de una u otra terna se ve que los elementos del cuadro [61-1] cumplen las siguientes 12 relaciones que el lector hará bien en escribir *in extenso*:

$$[61\text{-}8]\quad \sum_{r=1}^{3} \lambda_{rs}\lambda_{rt} = \delta_{st}\ ;\quad \sum_{r=1}^{3} \lambda_{sr}\lambda_{tr} = \delta_{st}\ ,\quad (s,t = 1,2,3,).$$

De estas relaciones resulta que si $\Delta = \det\{\lambda_{rs}\}$ es el determinante formado con los elementos del cuadro [61-1], es (§ 13-6):

$$[61\text{-}9]\quad \Delta^2 = \det\{\lambda_{rs}\}^2 = 1 \quad \therefore \quad |\Delta| = 1\ ,$$

lo que también resulta de § 60-7, *a*.

2. **Transformaciones lineales y matrices.** — *a*) De un grupo de fórmulas de transformación tal como [61-6] pueden darse dos interpretaciones geométricas: como relación entre las coordenadas de un mismo punto P en dos sistemas (tal como en § 61-1), o como *transformación* o *representación* del espacio en sí mismo, que hace corresponder al punto $\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3)$ otro punto $\mathrm{Q}(y_1, y_2, y_3)$, ambos referidos al mismo sistema de coor-

denadas. De estas dos interpretaciones, que llamaremos *alias* (el mismo punto es llamado de otro modo) y *alibi* (el punto se transforma en otro) nos convendrá ahora adoptar la segunda.

b) La [61-6] es un caso especial de transformación *lineal*, ya definida en § 15-7. Limitándonos en este apartado al plano, una transformación lineal A es la que hace corresponder a cada punto $P(x_1, x_2)$ otro punto $Q(y_1, y_2)$ mediante las relaciones

[61-10] $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad , \quad y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad ;$

donde los coeficientes a_{ik} son constantes.

EJEMPLOS: 1. Una rotación R_φ en un ángulo φ alrededor del origen es una transformación lineal, pues

[61-11] $y_1 = x_1 \cos\varphi - x_2 \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad y_2 = x_1 \operatorname{sen}\varphi + x_2 \cos\varphi .$

Estas ecuaciones pueden obtenerse fácilmente observando que se pasa del número complejo $x = x_1 + ix_2$ al $y = y_1 + iy_2$ multiplicando por $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$ (§§ 9-5, *b*, y 45-3, *b*).

2. La homología especial H_k:

[61-12] $y_1 = x_1 \quad , \quad y_2 = kx_2 .$

3. Para $k = 0$ en el ejemplo anterior, se tiene la *proyección sobre el eje x*, $H_0 \equiv P$:

[61-13] $y_1 = x_1 \quad , \quad y_2 = 0 .$

La transformación [61-10] entre los *puntos* P del plano, puede interpretarse también como transformación entre los vectores $\mathbf{x} = \mathrm{OP}$ que los sitúan desde el origen, y pondremos:

[61-14] $\mathbf{y} = A\mathbf{x} .$

De [61-10] resulta enseguida:

[61-15] $A(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha A\mathbf{a} + \beta A\mathbf{b} \quad ,$

es decir: *el vector transformado de una combinación lineal es igual a la combinación lineal, con los mismos coeficientes, de los vectores transformados.*

Recíprocamente, *toda transformación A que cumpla la condición* [61-15] *es lineal.*

En efecto, considerando los transformados de los versores fundamentales **i**, **j**, expresados a su vez en coordenadas

[61-16] $A\mathbf{i} = \alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{21}\mathbf{j} \quad , \quad A\mathbf{j} = \alpha_{12}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j} \quad ,$

tendremos por [61-15]:

$$\mathbf{y} = A(x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) = x_1 A\mathbf{i} + x_2 A\mathbf{j} = \\ = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2)\mathbf{i} + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)\mathbf{j} \quad ,$$

lo que nos muestra que la transformación A se puede escribir

[61-17] $y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \quad . \quad y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \quad ,$

y es por consiguiente lineal.

Llamaremos *matriz* de una transformación lineal [61-10] en un sistema de coordenadas, a la matriz

$$\mathbf{A} = \{a_{ik}\} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} .$$

Comparando [61-16] y [61-17] vemos que las componentes de los transformados de los versores fundamentales, dan las *columnas* de la matriz de la transformación. Esta observación, que vale también en el espacio y en cualquier número de dimensiones, facilita la escritura de las fórmulas de transformación en dos pasos así:

1º) Se escriben las expresiones de $A\mathbf{i}$ y de $A\mathbf{j}$, y con ello la matriz (por columnas);

2º) Se utiliza dicha matriz (por filas) para escribir las ecuaciones de la transformación.

EJEMPLO 4. Para la rotación R_φ (ej. 1) es:

1º) $R_\varphi \; \mathbf{i} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{j}$,

$R_\varphi \; \mathbf{j} = \cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\pi)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\varphi + \tfrac{1}{2}\pi)\mathbf{j} = -\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}$,

y entonces:

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{Bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{Bmatrix}$$

2º) De aquí resultan las ecuaciones [61-11].

3. Producto de transformaciones. Transformación inversa. — *a*) Si a un punto $P(x_1, x_2)$ del plano $[P(x_1, x_2, x_3)$ del espacio$]$ le corresponde $Q(y_1, y_2)$ $[Q(y_1, y_2, y_3)]$ por la transformación lineal A:

[61-18] $y_i = \Sigma_k a_{ik} x_k \quad ,$

y a Q le corresponde R por la transformación lineal B:

[61-19] $z_j = \Sigma_i b_{ji} y_i \quad ,$

se pasa directamente de P a R por una transformación *lineal*:

[61-20] $z_j = \Sigma_i b_{ji}(\Sigma_k a_{ik} x_k) = \Sigma_k(\Sigma_i b_{ji} a_{ik})\, x_k = \Sigma_k c_{jk} x_k \quad ,$

con

[61-21] $c_{jk} = \Sigma_i b_{ji} a_{ik} .$

La transformación lineal [61-20] se llama (ver § 15-7) *producto BA* de las transformaciones lineales [61-18] y [61-19], y la matriz $\mathbf{C} = \{c_{jk}\}$ de elementos c_{jk} dados por [61-21] se

llama *matriz producto* de las matrices $\mathbf{B} = \{b_{ik}\}$ y $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$, indicado por

[61-22] $$\mathbf{C} = \mathbf{BA}$$

de modo que el elemento de fila j y columna k en la matriz producto es el "producto escalar" de la fila j del primer factor **B** por la columna k del segundo **A**. La definición de producto se aplica a matrices rectangulares cualesquiera, pero como estas líneas deben tener igual longitud, el número de columnas del primer factor **B** debe ser igual al número de filas del segundo **A**. A una matriz $\mathbf{A}_{m,n}$ de m filas y n columnas la llamaremos matriz de *clase* (m, n). Las matrices (cuadradas) de clase (n, n) se llamarán de *orden* n.

De § 13-6 resulta: *el determinante o módulo* (§ 15-7) *del producto de dos transformaciones lineales es el producto de los módulos de ambas.*

Obsérvese que en [61-22] los factores se consideran *de derecha a izquierda* en lo concerniente al orden en que deben aplicarse las transformaciones lineales.

b) En § 61-1 hemos podido expresar con cada transformación $(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, y_3) \equiv (x'_1, x'_2, x'_3)$ de las allí estudiadas, con módulo $\Delta = \pm 1 \neq 0$, (§ 61-1, *c*), su inversa $(y_1, y_2, y_3) \to (x_1, x_2, x_3)$. En general, si el módulo de la transformación [61-18] es $\mathrm{A} = \det\{a_{ik}\} \neq 0$, la transformación es *biunívoca*, y por la regla de CRAMER (§ 15-4) podrán expresarse las x_k linealmente en las y_i:

[61-23] $$x_k = \Sigma \lambda_{ki} y_i .$$

La matriz $\{\lambda_{ki}\}$ se llama *inversa* de **A**, indicada por $\mathbf{A}^{-1}$. El producto de las transformaciones [61-18] y [61-23] en un orden u otro, conduce a la *transformación idéntica*:

$$y_i = y_i \quad , \quad \text{o bien} \quad x_k = x_k \quad ,$$

de matriz $\mathbf{I} = \{\delta_{ik}\}$, $(\delta_{ik} = 1$ si $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k)$, llamada *matriz unidad*, con elementos iguales a 1 en la diagonal principal y a cero fuera de ella. Se tiene entonces

[61-24] $$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad ; \quad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \quad ,$$

siendo además para matrices cuadradas de igual orden:

[61-25] $$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

4. **Operaciones con matrices y aplicaciones.** — *a*) Algunas propiedades del producto de matrices se deducen fácilmente interpretando éstas como transformaciones lineales. Tal ocurre con la propiedad *asociativa*:

[61-26] $$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad ,$$

pues mejor que calcular los productos es probar que ambos co-

rresponden a la misma transformación lineal, realización sucesiva de **C**, **B** y **A**.

En cambio el producto de matrices *no es conmutativo* (§ 15-7), y *la matriz inversa de un producto* es el producto de las matrices inversas, pero en orden inverso:

[61-27] $$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad ,$$

pues $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.

Llamando *matriz traspuesta* de **A** a la matriz **A′** obtenida cambiando filas por columnas $(a'_{ik} = a_{ki})$, resulta de la regla de formación del producto:

[61-28] $$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'.$$

b) Definiendo la *suma* de las matrices $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ y $\mathbf{B} = \{b_{ik}\}$ de la misma clase (m, n), y el *producto por un número* λ, mediante

[61-29] $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{a_{ik} + b_{ik}\} \quad , \quad \lambda\mathbf{A} = \{\lambda a_{ik}\} \quad ,$$

se comprueban de inmediato las leyes distributivas:

[61-30] $$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A} \\ \lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}. \end{array} \right.$$

El módulo (§ 3) de la operación suma de matrices es la *matriz nula* $\mathbf{O} = \{0\}$ cuyos elementos son todos ceros. Hay una matriz nula $\mathbf{O}_{m,n}$ en cada clase (m, n).

Una matriz cuadrada **A** se llama *simétrica* (cfr. § 13-7, *c*) si

[61-31] $$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \quad \text{o sea} \quad a_{ki} = a_{ik} \quad ,$$

y *antisimétrica* o *hemisimétrica* (cfr. § 13-7, *d*) si

[61-32] $$\mathbf{A}' = (-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A} \quad \text{o sea} \quad a_{ki} = -a_{ik} \quad , \quad (\therefore \quad a_{ii} = 0).$$

Toda matriz cuadrada **A** puede expresarse unívocamente como suma de una matriz simétrica y una matriz hemisimétrica así:

[61-33] $$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}') + \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}').$$

c) Las *potencias naturales de una matriz* se definen por los productos de ella por sí misma, siendo por definición

[61-34] $$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}.$$

Dado un polinomio cualquiera

[61-35] $$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \quad ,$$

tendrá sentido escribir

[61-36] $$f(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + \ldots + c_n\mathbf{A}^n \quad ,$$

por ser una expresión que representa una matriz cuyos elementos están dados por las operaciones consignadas en el segundo miembro. Aún más, en el caso de que la serie que representa cada elemento sea convergente, puede generalizarse lo anterior a *funciones trascendentes de matrices* y así tendrá sentido hablar de la matriz

$$[61\text{-}37] \quad \mathbf{B} = e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \ldots \;;$$

en este caso son siempre convergentes las series que representan cada uno de los n^2 elementos de **B**, supuesta **A** cuadrada de orden n.

d) Las matrices *vectoriales*, o matrices no cuadradas de una sola línea (fila o columna) resultan muy útiles para expresar mediante productos las transformaciones lineales, así como formas bilineales y cuadráticas.

d_1) Así, con las matrices:

$$[61\text{-}38] \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} \;;\; \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Bmatrix} \;;\; \mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{Bmatrix} \;;$$

las transformaciones lineales [61-18], [61-19] y [61-20] pueden representarse por los productos de matrices:

$$[61\text{-}39] \quad \mathbf{Y} = \mathbf{AX} \quad,\quad \mathbf{Z} = \mathbf{BY} \quad,\quad \mathbf{Z} = \mathbf{CX} = \mathbf{BAX}.$$

NOTA. El orden de las matrices factores en el producto [61-22] es inverso al de aplicación de las correspondientes transformaciones lineales. Esto es consecuencia de la notación empleada. Si hubiéramos definido en cambio las transformaciones lineales A y B así (con las $\sum$ desarrolladas en columna):

$$(A) \quad y_i = \textstyle\sum_k x_k a_{ki} \quad;\quad \{a_{ki}\} = \mathbf{A} \quad;$$

$$(B) \quad z_j = \textstyle\sum_i y_i b_{ij} \quad;\quad \{b_{ij}\} = \mathbf{B} \quad;$$

tendríamos

$$(AB) \quad z_j = \textstyle\sum_i (\sum_k x_k a_{ki}) b_{ij} = \sum_k x_k (\sum_i a_{ki} b_{ij}) = \sum_k x_k d_{kj}$$

siendo, con la misma definición de producto de matrices,

$$\{d_{kj}\} = \mathbf{AB}.$$

Las transformaciones anteriores se expresan mediante las matrices vectoriales de una *fila* $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$, $\mathbf{Z}'$, traspuestas de las [61-38] así:

$$[61\text{-}40] \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{X}'\mathbf{A} \quad;\quad \mathbf{Z}' = \mathbf{Y}'\mathbf{B} \quad:\quad \mathbf{Z}' = (\mathbf{X}'\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{X}'(\mathbf{AB}).$$

d_2) La *forma bilineal de orden n* (ó *n-aria*)

$$[61\text{-}41] \quad \mathrm{F} = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k = \sum_{i,\,k=1}^{n} x_i a_{ik} y_k \;,$$

es un polinomio lineal homogéneo en las variables x_i, y también en las y_k; puede expresarse como producto de matrices:

$$[61\text{-}42] \quad \mathbf{X}'\mathbf{AY} \;,$$

cuyo resultado es la matriz de un solo elemento, igual a F.

d_3) Para $y_i = x_i$ en [61-41] se tiene la *forma cuadrática de orden n* (ó *n-aria*):

$$[61\text{-}43] \quad \Phi = \Sigma a_{ik} x_i x_k = \Sigma x_i a_{ik} x_k = \mathbf{X}'\mathbf{AX}.$$

En ésta podemos suponer que la matriz **A** de los coeficientes es *simétrica.* Basta para ello aplicar la descomposición [61-33] y observar que la forma cuadrática $\Sigma h_{ik} x_i x_k$ de una matriz hemisimétrica es idénticamente nula, pues sus términos se anulan dos a dos, por ejemplo

$$h_{12} x_1 x_2 + h_{21} x_2 x_1 = (h_{12} + h_{21}) x_1 x_2 = 0.$$

5. **Transformaciones degeneradas. Dimensión.** — *a*) Si la transformación lineal [61-18] que supondremos en el espacio tridimensional (i, $k = 1, 2, 3$) *tiene módulo nulo* $\mathrm{A} = \det \{a_{ik}\} = 0$, se llama *singular* o *degenerada.* En este caso la característica h (§ 14-3) de la matriz $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ puede valer 0, 1 ó 2.

a_0) Si $h = 0$ es $a_{ik} = 0$, y [61-18] transforma todo punto $\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3)$ en el único punto $\mathrm{Q}(0, 0, 0)$.

a_1) Si $h = 1$ podemos suponer que hay en la primera fila de **A** un elemento $a_{1k} \neq 0$; entonces (§ 14-3, *a*) las otras filas serán combinaciones lineales de la primera, o sea múltiplos de ella, con coeficientes m y n, y por tanto [61-18] transforma todo punto $\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3)$ en un punto Q de la recta

$$y_2 = m y_1 \quad,\quad y_3 = n y_1.$$

Cada punto de esta recta es (§ 15-5) correspondiente de infinitos puntos (x_1, x_2, x_3) que forman un plano.

a_2) Si $h = 2$ podemos suponer que hay un menor principal (§ 14-3) extraído de las dos primeras filas. Será entonces combinación lineal de éstas la tercera, con coeficientes α y β, y por tanto [61-18] transforma todo punto $\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3)$ en un punto Q del plano:

$$y_3 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Cada punto de este plano es (§ 15-5) correspondiente de infinitos puntos (x_1, x_2, x_3) que forman una recta.

a_3) Si $h = 3$, el módulo de la transformación no es nulo, la correspondencia es biunívoca y la transformación lineal se llama *regular* o *biunívoca.*

b) Análogamente puede discutirse el caso de transformaciones lineales en el plano, o en un espacio lineal afín de n dimensiones (nota III) y resulta: el conjunto de vectores transformados por [61-18] *es un subespacio vectorial* (nota I, a_5) *cuya dimensión es igual a la característica h de la matriz* $\mathrm{A} = \{a_{ik}\}$.

NOTA. *Diadas y expresiones diádicas.* — Una transformación lineal A en el espacio E_3 queda determinada si se conocen los transformados $A\mathbf{i} = \mathbf{i}'$, $A\mathbf{j} = \mathbf{j}'$, $A\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ de los vectores de la terna ortogonal **i, j, k**,

[61-44] $$\mathbf{x} = (\mathbf{x}.\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{x}.\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{x}.\mathbf{k})\mathbf{k}$$

resulta por la linealidad:

[61-45] $$A\mathbf{x} = (\mathbf{x}.\mathbf{i})\mathbf{i}' + (\mathbf{x}.\mathbf{j})\mathbf{j}' + (\mathbf{x}.\mathbf{k})\mathbf{k}'.$$

La transformación $A\mathbf{x}$ corresponderá a un movimiento, si la terna **i′, j′, k′** es también ortogonal, y del mismo sentido que **i, j, k**.

La forma [61-45] de la transformación A sugiere de inmediato la generalización para cuando las ternas **i, j, k** é **i′, j′, k′**, se reemplazan por ternas de vectores:

[61-46] $$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \quad ; \quad \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$$

ortogonales o no; linealmente independientes o no.

Si $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ es la base recíproca (§ 60, ejercicios 16 a 19) de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, puede expresarse todo vector **x** *linealmente dependiente de ambas ternas mediante*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}.\mathbf{a}_1)\mathbf{a}^1 + (\mathbf{x}.\mathbf{a}_2)\mathbf{a}^2 + (\mathbf{x}.\mathbf{a}_3)\mathbf{a}^3.$$

Toda transformación lineal $A\mathbf{x}$ será entonces expresable mediante

[61-47] $$A\mathbf{x} = (\mathbf{x}.\mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{x}.\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 + (\mathbf{x}.\mathbf{a}_3)\mathbf{b}_3 \quad ,$$

si es $A\mathbf{a}^1 = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}_2$, $A\mathbf{a}^3 = \mathbf{b}_3$.

La transformación [61-47] suele expresarse así:

$$(\mathbf{x}.\mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{x}.\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 + (\mathbf{x}.\mathbf{a}_3)\mathbf{b}_3 = \mathbf{x}[\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3] ,$$

donde $[\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3]$ suele llamarse *expresión diádica* y caracteriza la transformación A por el paso de la terna recíproca de la $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ a su transformada $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

Si se toma en lugar de una terna cualquiera $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, toda transformación lineal $A\mathbf{x}$ se expresa por una expresión diádica de la forma $[\mathbf{i}\mathbf{i}' + \mathbf{j}\mathbf{j}' + \mathbf{k}\mathbf{k}']$. Cuando **i′, j′, k′** son no-coplanares, la expresión diádica se llama *completa* y el conjunto de los vectores transformados por A es todo el espacio vectorial.

Si **i′, j′, k′** son coplanares pero no colineales, serán combinación lineal de una base $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, y resulta

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= (\mathbf{x}.\mathbf{i})(\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2) + (\mathbf{x}.\mathbf{j})(\mu_1\mathbf{b}_1 + \mu_2\mathbf{b}_2) + \\ &+ (\mathbf{x}.\mathbf{k})(\nu_1\mathbf{b}_1 + \nu_2\mathbf{b}_2) = (\mathbf{x}.\mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{x}.\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 = \\ &= \mathbf{x}[\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2] , \end{aligned}$$

donde $\mathbf{a}_1 = \lambda_1\mathbf{i} + \mu_1\mathbf{j} + \nu_1\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = \lambda_2\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \nu_2\mathbf{k}$ y es $A\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2$ si $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ forman una base ortonormal. La expresión diádica transforma todos los vectores del espacio tridimensional en los de un plano.

Si **i′, j′, k′** son colineales y paralelos al vector **b**, resulta

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{x}\mathbf{i})\lambda\mathbf{b} + (\mathbf{x}\mathbf{j})\mu\mathbf{b} + (\mathbf{x}\mathbf{k})\nu\mathbf{b} = (\mathbf{x}\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{x}[\mathbf{a}\mathbf{b}] ,$$

donde $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k}$ y es $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si **a** es unitario.

En este caso la expresión diádica se llama (GIBBS) *diada* (aunque muchos autores llaman también diada a una expresión diádica completa o también plana) y transforma todos los vectores del espacio tridimensional en los paralelos a **b**.

Finalmente, si $\mathbf{i}' = \mathbf{j}' = \mathbf{k}' = 0$, se tiene la expresión diádica *nula*. Las expresiones diádicas no completas se llaman *degeneradas*; lo son las planas, lineales y nula.

La condición necesaria y suficiente para que una expresión diádica sea completa es que ambas ternas $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ y $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ sean no coplanares.

6. Transformaciones lineales biunívocas. — De § 61-3, *b*, y § 61-5, *a*, resulta que una transformación lineal es biunívoca cuando y sólo cuando es no-degenerada, es decir, su módulo es $\mathrm{A} \neq 0$.

a) *Transformación de variedades lineales.* — TEOR. 1. *En el espacio el transformado de un plano es un plano; en el plano la transformada de una recta es una recta.*

Refirámosnos al caso del plano [61-18] y [61-23] con $i, k = 1, 2$. La recta

[61-48] $$ax_1 + bx_2 + c = 0 \quad , \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

se transforma en

$$a' = \lambda_{11}a + \lambda_{21}b \quad , \quad b' = \lambda_{12}a + \lambda_{22}b \quad ,$$

que representa también una recta, pues los coeficientes

$$a' = \lambda_{11}a + \lambda_{21}b \quad , \quad b' = \lambda_{12}a + \lambda_{22}b \quad ,$$

no son simultáneamente nulos al no serlo a y b en [61-48] por ser $\det \{\lambda_{ik}\} = 1/\mathrm{A} \neq 0$.

TEOR. 2. *En el espacio, la transformada de una recta es una recta.*

TEOR. 3. *En el espacio (plano) los transformados de dos planos (rectas) paralelos, son paralelos.*

TEOR. 4. *En el espacio, las transformadas de dos rectas paralelas son paralelas.*

El teorema 2 resulta del 1 considerando una recta como intersección de dos planos; el 3 de la biunicidad de la correspondencia, el 4 del 1 y 2 y la biunicidad, pues al plano π de las rectas paralelas r y s, corresponde un plano π' que contiene a r' y s', que no pueden cortarse.

NOTA. Por conservarse la dependencia lineal entre vectores en una transformación lineal biunívoca, y más generalmente en el grupo afín (§ 61-7, *d*), la característica de las matrices de una forma bilineal [61-41] en distintos sistemas de coordenadas es la misma, llamada *característica o dimensión de la forma bilineal.* Si ésta es menor que el orden n (§ 61-4, d_8) de la forma, diremos que ésta es *degenerada.* Análogas definiciones pueden darse para una forma cuadrática.

b) Descomposición en transformaciones primitivas. — Una transformación lineal *primitiva* en el plano ($n = 2$) o el espacio ($n = 3$) es la que deja invariadas $n - 1$ coordenadas al pasar de P a Q.

TEOR. 5. *Toda transformación lineal biunívoca es producto de transformaciones primitivas.*

Refirámosnos al plano: [61-18] con $i, k = 1, 2$, donde podemos suponer $a_{11} \neq 0$, se descompone en las transformaciones primitivas

$$[61\text{-}49] \quad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \xi_2 = x_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y_1 = \xi_1 \\ y_2 = (a_{21}/a_{11})\,\xi_1 + (\mathrm{A}/a_{11})\,\xi_2 \end{cases} ;$$

de módulos a_{11} y A/a_{11} no nulos.

c) Significado geométrico del módulo. — TEOR. 6. *En el plano (espacio), una transformación lineal de módulo* $\mathrm{A} \neq 0$ *transforma un triángulo de área* S *(tetraedro de volumen* V*) en otro de área* AS *(volumen* AV*) y se conserva o invierte el sentido de rotación (sentido de una terna) según sea* $\mathrm{A} > 0$ *ó* $\mathrm{A} < 0$.

Limitándonos al caso del plano, basta considerar un triángulo OLM con un vértice en el origen. Considerando los vértices como puntos en el espacio: $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{L}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$, $\mathrm{M}(\mu_1, \mu_2, 0)$ y formando el producto vectorial

$$\mathrm{OL} \wedge \mathrm{OM} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

vemos que el valor absoluto del determinante es 2S, y su signo determina el sentido del recorrido OLM. El teorema quedaría demostrado si probamos que el determinante queda multiplicado por A al transformar el triángulo mediante [61-18], para lo cual bastará probar que se multiplica por a_{11} al aplicar la primera transformación [61-49] (pues análogamente se multiplicará por A/a_{11} al aplicar la segunda). Se obtiene, en efecto:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 & \lambda_2 \\ a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_1 & \lambda_2 \\ a_{11}\mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\lambda_2 & \lambda_2 \\ a_{12}\mu_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} .$$

7. Grupos de transformaciones lineales y afines. — *a)* Las transformaciones lineales biunívocas o no degeneradas (§ 61-6) del plano ($n = 2$) o del espacio ($n = 3$) forman un grupo (§ 5-12, *b*) respecto del producto de transformaciones (§ 61-3, *a*), que llamaremos *grupo lineal* L_n.

b) Las consideraciones del § 61-1 conducen a un importante subgrupo (Cap. III, nota I, *b*) de L_n. Una transformación lineal como [61-6] se llama *ortogonal* (lo mismo que su matriz), si se cumplen las relaciones [61-8] de ortogonalidad de líneas (cada línea está "normalizada" o es de "módulo 1" y "ortogonal" a otra paralela), que equivalen, llamando $\mathbf{L}'$ a la matriz traspuesta (§ 61-4, *a*) de $\mathbf{L} = \{\lambda_{ik}\}$ a:

$$[61\text{-}50] \qquad \mathbf{LL}' = \mathbf{L}'\mathbf{L} = \mathbf{I}, \quad \text{o sea:} \quad \mathbf{L}' = \mathbf{L}^{-1}$$

(obsérvese la transformación inversa [61-7]).

El producto de dos transformaciones ortogonales es ortogonal, como resulta del punto de vista *alias* en § 61-1, b_2, o bien de:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}'\mathbf{A}' = (\mathbf{AB})' \;;$$

en consecuencia, las transformaciones ortogonales forman grupo, llamado *grupo ortogonal* O_n, subgrupo de L_n.

Para el módulo de una transformación ortogonal caben por [61-9] los casos $\Delta = 1$, $\Delta = -1$. En virtud de § 61-6, *c*, sólo en el primero se conserva el sentido de las ternas (o de rotaciones en el plano). Las transformaciones *ortogonales unimodulares* (o de módulo 1) forman el subgrupo R_n de las rotaciones alrededor del origen, del sistema de coordenadas (alias) o del espacio (alibi), (R_2, rotaciones en el plano; R_3, en el espacio).

c) En el § 61-1 hemos considerado transformaciones más generales que las lineales, de la forma

$$[61\text{-}51] \qquad y_i = \Sigma a_{ik}x_k + a_i \;,$$

llamadas *afines*. Las biunívocas ($\mathrm{A} = \det\{a_{ik}\} \neq 0$) forman (en el plano o en el espacio) el *grupo afín* H_n. Subgrupos importantes de éste son el lineal L_n y el *grupo de las traslaciones* T_n: $y_i = x_i + a_i$, isomorfo al grupo abeliano que forman los vectores mismos respecto de la suma.

Otro subgrupo importante de H_n es el engendrado por las transformaciones de R_n y de T_n, es decir el grupo de las transformaciones que resultan del producto o realización sucesiva de traslaciones y rotaciones. Es el *grupo de los movimientos* M_n, formado por las transformaciones de la forma [61-3] ó [61-4] con $\{\lambda_{ik}\}$ ortogonal y $\Delta = 1$.

El subgrupo de H_n engendrado por O_n y T_n es más amplio, pues comprende movimientos y simetrías, se llama *grupo euclídeo* E_n, y es el formado por las transformaciones afines que conservan las *distancias* entre puntos, y sólo ellas. Dos figuras correspondientes en una transformación de E_n son *directa o inversamente iguales*.

d) El conjunto de las propiedades invariantes respecto de las transformaciones de un grupo constituye la *geometría* correspondiente al grupo. Así, por ejemplo, en la *Geometría afín* puede estudiarse la dependencia lineal de vectores, que es invariante respecto de las transformaciones de H_n, como lo es también la combinación lineal $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, pues [61-15] vale para toda transformación de H_n.

En la *Geometría métrica euclídea*, correspondiente al grupo E_n, el *invariante* métrico fundamental es la forma cuadrática (ver nota III, *b*) que representa la distancia. Toda propiedad afín es una propiedad mé-

trica (invariante en E_n), pues E_n es subgrupo de H_n; pero la recíproca no es cierta, por ejemplo la distancia no es invariante en H_n y entonces no cabe considerarla en la Geometría afín; una transformación afín conveniente puede llevar un vector unitario a otro de módulo no nulo arbitrario, respecto a la métrica euclídea.

Por la introducción de las coordenadas homogéneas usadas en Geometría proyectiva podríamos definir el *espacio proyectivo* y considerar en él el plano impropio; el *grupo homográfico* en este espacio proyectivo es el formado por el conjunto de todas las transformaciones lineales de determinante no nulo y su invariante fundamental es la razón doble de cuatro puntos. Entonces las transformaciones afines aparecen como un subgrupo de las homográficas, precisamente el formado por aquéllas que dejan invariante dicho plano impropio (es decir, que transforman puntos del plano impropio en puntos del plano impropio).

El grupo correspondiente a cada geometría introduce en el espacio que estudie dicha geometría la noción de "igualdad" que interesa en la misma (§ 1-5).

La sistematización de las diversas geometrías (las anteriores y muchas otras) mediante sus grupos correspondientes y el estudio de las propiedades invariantes respecto de las transformaciones del grupo fué propuesta por FÉLIX KLEIN en su célebre programa de Erlangen (1872).

EJERCICIOS

1. Fórmulas de transformación si el triedro directo (x_1, x_2, x_3) gira en un ángulo de 45° alrededor de la recta $x_1 = -x_3$. $x_2 = 0$. de modo que desde $P(-1, 0, 1)$ se ve girar el plano $x_1 = x_3$ en el sentido positivo de la trigonometría.

2. Si en § 61-1 es $O' \equiv O$ y las ternas de igual sentido, así como $O(\xi, x_3, x'_3)$ siendo $O\xi$ intersección de los planos Ox_1x_2, $Ox'_1x'_2$, probar que con los *ángulos de* EULER $\theta = (x_3, x'_3)$, $\varphi = (x_1, \xi)$, $\Psi = (\xi, x'_1)$ el cuadro [61-1] es:

	x'_1	x'_2	x'_3
x_1	$\cos\varphi \cos\Psi -$ $- \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\Psi \cos\theta$	$-\cos\varphi \operatorname{sen}\Psi -$ $- \operatorname{sen}\varphi \cos\Psi \cos\theta$	$\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$
x_2	$\operatorname{sen}\varphi \cos\Psi +$ $+ \cos\varphi \operatorname{sen}\Psi \cos\theta$	$-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\Psi +$ $+ \cos\varphi \cos\Psi \cos\theta$	$-\cos\varphi \operatorname{sen}\theta$
x_3	$\operatorname{sen}\Psi \operatorname{sen}\theta$	$\cos\Psi \operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$

Este resultado vale también si $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$ [con φ y Ψ indeterminados, $\varphi \pm \Psi = (x_1, x'_1)$], dando así la forma más general de una matriz ortogonal de orden 3.

3. Del ejercicio anterior obtener el *teorema del coseno* de la trigonometría esférica (cfr. § 60, ejercicio 11).

4. De [61-11] deducir las *fórmulas de adición*:

$$\cos(\alpha + \varphi) = \cos\alpha \cos\varphi - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \quad ; \quad \operatorname{sen}(\alpha + \varphi) = \ldots$$

5. Interpretar geométricamente las transformaciones en el plano: *a*) $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$; *b*) $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1$; *c*) $y_1 = 0$, $y_2 = x_1$.

6. Siendo

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{Bmatrix}, \quad X = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

1º) Calcular AX; 2º) ¿Está definido XA?

7. Con las matrices

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

probar que el producto de matrices admite divisores del cero **O**. Interpretar geométricamente.

8. 1º) Si una matriz cuadrada A tiene una inversa a derecha A_d^{-1} y una inversa a izquierda A_i^{-1} es *invertible* [es decir: *a*) ambas inversas son iguales, y *b*) únicas]; 2º) Si A es un divisor de cero a izquierda y tiene una inversa a derecha, tiene infinitas inversas a derecha.

9. Probar que toda matriz cuadrada A *conmutable* (AB = BA) con toda otra de igual orden, es de la forma $\lambda I = \{\lambda\delta_{ik}\}$ (*matriz escalar*), siendo $\{\lambda\delta_{ik}\}\{a_{ik}\} = \{\lambda a_{ik}\}$.

10. Probar que con las definiciones [61-29] las matrices de clase (m, n) forman un espacio lineal (Cap. II, nota III, *b*) $\mathbf{M}_{m,n}$. Dar una base para el mismo.

11. Probar que respecto de la suma [61-29] y producto (§ 61-3, *a*) las matrices cuadradas de orden n forman un anillo (§ 5-12, *b*).

12. Probar que $(A')^{-1} = (A^{-1})'$, (matriz *contragrediente* de A).

13. Calcular e^A siendo

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}.$$

§ 62. CUÁDRICAS

1. **Propiedades generales.** — *a*) Después de los planos, las superficies más sencillas son las definidas por ecuaciones de segundo grado en coordenadas cartesianas, llamadas *superficies de segundo grado* o *de segundo orden* o *cuádricas*:

$$[62\text{-}1] \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

La razón de elegir esta notación para los coeficientes se ve pasando a las *coordenadas homogéneas* usuales en Geometría *,

* El punto P de coordenadas homogéneas (x, y, z, t) será si es $t \neq 0$, el de coordenadas ordinarias $(x/t, y/t, z/t)$. Dos cuaternas de números no todos nulos se identifican como representantes de un mismo punto, con la relación de equivalencia (§ 1-5)

$$P(x, y, z, t) = P(x', y', z', t') \quad \text{si} \quad x/x' = y/y' = z/z' = t/t' \;,$$

donde uno o varios miembros pueden ser 0/0.

Estas coordenadas permiten representar igualmente los "puntos del infinito" o "pun-

es decir, poniendo x/t, y/t, z/t en lugar de x, y, z. Resulta entonces la ecuación en forma homogénea

$$[62\text{-}2] \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0 \ ,$$

que con las notaciones $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $t = x_4$ para las coordenadas homogéneas, puede escribirse:

$$[62\text{-}3] \quad \sum_{i,\,k=1}^{4} a_{ik}x_i x_k = 0 \quad , \quad a_{ik} = a_{ki} \quad ,$$

obteniéndose así la ecuación de una cuádrica por anulación de una forma cuadrática en *cuatro* variables, o de orden 4 (§ 61-4, d_3).

b) *Determinación de una cuádrica.* — Como la ecuación [62-1], o bien [62-2] ó [62-3], tiene diez coeficientes y podemos dividirla por uno de ellos no nulo, quedan nueve independientes. Son, pues, necesarias *nueve* condiciones para determinar una cuádrica.

Dar un punto (x_1, x_2, x_3, x_4) de la cuádrica es dar una relación $\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0$ entre los coeficientes; luego, *son necesarios nueve puntos para determinar una cuádrica.*

Cabe, sin embargo, que por nueve puntos dados pasen dos cuádricas. Basta, en efecto, imaginar dos cuádricas secantes y elegir nueve puntos de su intersección.

Pero si por nueve puntos pasan dos cuádricas $f = 0$, $\varphi = 0$, también pasan las infinitas cuádricas del haz $f - \lambda\varphi = 0$, cualquiera que sea el número λ, pues se satisfacen para las soluciones comunes a ambas, luego resulta:

Por nueve puntos pasa una sola cuádrica o bien infinitas.

Otros modos de determinar una cuádrica son los siguientes:

Por un punto y dos cónicas que tienen dos puntos comunes y están en distintos planos. En efecto, los dos puntos comunes, más otros tres elegidos en cada una, son ocho puntos. Sin embargo, el método más rápido para determinar cuádricas, cuando se dan cónicas, es el de la combinación lineal, que llamaremos "método de las λ".

EJEMPLO 1. Consideremos la cuádrica:

$$f = x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 2y = 0$$

y sus dos secciones por los planos $y = 0$, $z = 0$.

Para determinar una cuádrica que pase por estas dos cónicas y además por el punto $(1, 1, 2)$ consideremos la ecuación:

$$f - \lambda yz = 0$$

que representa un haz de cuádricas, cada una de las cuales pasa por los puntos comunes a aquella cuádrica y cada uno de los dos planos. Para

tos impropios" o "direcciones de las rectas" (§ 1-6, ej. 1) del espacio, para $t = 0$, conviniendo en que el punto impropio de la recta $(x - x_0)/a = (y - y_0)/b = (z - z_0)/c$ es $P(a, b, c, 0)$. El lector conocedor de Geometría proyectiva podrá suponer, para las propiedades que no sean métricas, coordenadas proyectivas.

determinar la que pasa por el punto $(1, 1, 2)$ basta sustituir estas coordenadas, y de la ecuación en λ que así resulta, se despeja el valor numérico de este parámetro, que es:

$$\lambda = \frac{f(1, 1, 2)}{1 . 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Luego, la ecuación de la cuádrica que cumple la condición impuesta es:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4yz - x + 2y = 0.$$

c) *Reducción de la ecuación.* — La ecuación general [62-1] no es adecuada para el estudio de la forma de la cuádrica. Éste se hace reduciendo [62-1] a una ecuación con menor número de términos, lo que haremos por traslación y rotación de los ejes de coordenadas (§ 61-1). El problema se completará en el § 63-8, pero es conveniente, sin embargo, comenzar por el estudio de las diversas clases de cuádricas (que haremos en §§ 62-2 y 62-3) suponiendo ya completada esa reducción.

d) *Centro de una cuádrica.* — Si la cuádrica [62-1] tiene un centro de simetría, tomándolo como origen de coordenadas desaparecen los términos de primer grado y recíprocamente. Para ver si existe un tal *centro* y hallarlo, efectuemos una traslación de ejes (§ 61-1) $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$, $z = Z + z_0$; tendremos

$$a_{11}(X + x_0)^2 + 2a_{12}(X + x_0)(Y + y_0) + \\ + 2a_{13}(X + x_0)(Z + z_0) + 2a_{14}(X + x_0) + \ldots = 0 \quad ,$$

donde sólo hemos escrito los términos que contienen X.

Anulando los coeficientes de X, Y, Z vemos que las coordenadas del centro (x_0, y_0, z_0) están dadas por el sistema de ecuaciones

$$[62\text{-}4] \quad a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3).$$

Para que este sistema no homogéneo (si fuera $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$ tendría [62-1] centro en el origen) tenga solución única debe ser

$$[62\text{-}5] \quad A_{44} = \det\{a_{ik}\} \neq 0 \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad ,$$

donde la notación A_{44} se debe a que este determinante es el complemento algebraico, o adjunto (§ 13-4, *a*) del elemento a_{44} en el determinante de la forma cuadrática [62-3]

$$[62\text{-}6] \quad A = \det\{a_{ik}\} \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad ,$$

llamado *discriminante* de la cuádrica, y cuya importancia veremos en § 62-5.

Si una cuádrica tiene discriminante no nulo (es decir no es degenerada, § 62-5), es [62-5] necesaria y suficiente para que exista centro, que entonces es único

[62-7] $$x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}}\ , \quad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}}\ , \quad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}}\ .$$

NOTA. Es útil observar que cada primer miembro en [62-4] es mitad de una derivada parcial (§ 66-1) del primer miembro $f(x, y, z)$ de la ecuación [62-1], de modo que el sistema para la determinación del eventual centro es

[62-8] $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

2. **Cuádricas con centro.** — *a*) Dejando de lado el caso en que se anula el discriminante [62-5], que trataremos en § 62-5, si existe centro es único (§ 62-1, *d*), y tomándolo como origen de coordenadas, la ecuación carece de términos lineales. Como por rotación pueden eliminarse los términos en xy, yz, zx (§§ 63-5 y 63-8), estas cuádricas se agrupan en cuatro tipos:

[62-9] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \textit{elipsoide;}$$

[62-10] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \textit{hiperboloide de una hoja;}$$

[62-11] $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \textit{hiperboloide de dos hojas;}$$

[62-12] $$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \textit{cuádrica imaginaria;}$$

y llevadas a estas formas son también simétricas respecto de los planos y de los ejes de coordenadas.

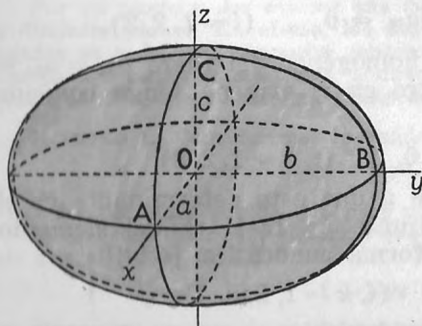


Fig. 204. — Elipsoide.

El cuarto caso corresponde a formas cuadráticas definidas negativas (§ 63-7, *a*), estudiándose ahora la representación geométrica de los otros tres. Haciendo cero las otras dos variables, vemos que el número de términos positivos de los primeros miembros de estas ecuaciones da el número de ejes coordenados *transversos* (de intersección real con la cuádrica), lo que una vez conocidas las formas de estas cuádricas (figs. 204, 205 y 206) constituye una regla cómoda para recordarlas.

b) El *elipsoide* [62-9], de semiejes a, b, c, está contenido en el paralelepípedo $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $|z| \leqslant c$, pues cada sumando es $\leqslant 1$ por ser todos no-negativos, y corta a los ejes de coordenadas en $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ respectivamente.

La sección de la superficie por el plano $z = z_0$ es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1\ , \quad z = z_0\ ,$$

llamando

$$k^2 = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \leqq 1 \quad ; \quad |z_0| \leqq c.$$

Los semiejes de esta elipse son: $ak \leqq a$; $bk \leqq b$ y van disminuyendo al crecer z_0, hasta anularse para $z_0 = c$, conservándose constante la razón $ak : bk = a : b$. Todas las elipses son, pues, semejantes; y para $z_0 > c$ no hay intersección (fig. 204).

Casos especiales: 1. En particular, tiene interés el caso $a = b$, pues las elipses secciones por planos paralelos al xy son circunferencias. El elipsoide se llama entonces *de revolución*, porque se puede engendrar haciendo girar la elipse meridiana de semiejes a y c alrededor del eje z. Si es $c > a$ se llama *elipsoide alargado*; si es $c < a$ se llama *elipsoide achatado*, o *esferoide*.

2. Si $a = b = c = r$ se tiene una *esfera* de radio r. Si el centro fuera $C(x_0, y_0, z_0)$ la ecuación es

[62-13] $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\ ,$$

pues los puntos que distan r de C verifican [62-13] y recíprocamente.

Desarrollando se llega a una ecuación de la forma

[62-14] $$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\ ,$$

sin términos en xy, yz, zx, y con coeficientes de x^2, y^2, z^2 iguales; determinándose centro y radio por

[62-15] $$x_0 = -\tfrac{1}{2}\alpha\ , \quad y_0 = -\tfrac{1}{2}\beta\ , \quad z_0 = -\tfrac{1}{2}\gamma\ ,$$
$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \delta\ ,$$

para lo cual debe ser $\delta < x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$.

NOTA. No es menester recordar en la práctica esta condición sobre δ, ni [62-15]. Basta llevar [62-14] a la forma [62-13] completando cuadrados, y en el segundo miembro, aparece r^2. Si este segundo miembro resulta nulo, suele decirse que la esfera es de *radio nulo*; y si resulta negativo, que la esfera es *imaginaria*.

EJEMPLOS: 1. Si la ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z = 0$, las coordenadas del centro son: $x_0 = -2$; $y_0 = 1$; $z_0 = 3$.

Para formar los cuadrados $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2$ es preciso sumar $4 + 1 + 9 = 14$ a los dos miembros, y por lo tanto el radio es $\sqrt{14}$.

2. Si la ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$, resulta $r = 0$; es decir, la superficie se reduce al único punto real: $x = -2$; $y = 1$; $z = 3$. (Cuádrica degenerada, con discriminante nulo).

Si en vez de $+14$ el término constante es cualquier otro número mayor que 14, en el segundo miembro quedará un término negativo y no existe superficie esférica. Suele decirse que la ecuación representa una superficie esférica imaginaria para indicar que todas las soluciones de la ecuación son imaginarias.

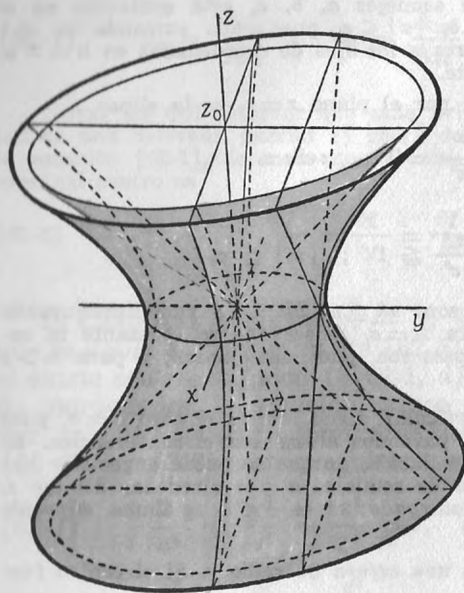


Fig. 205. — Hiperboloide de una hoja.

c) En el *hiperboloide de una hoja* [62-10] (fig. 205), al cortar por el plano $z = z_0$ resulta la elipse

$$\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1 \ , \qquad z = z_0 \ ;$$

siendo $k^2 = 1 + (z_0^2/c^2) \geqq 1$.

En este caso existe elipse sección para todo valor de z_0; y conservándose semejante, al aumentar z_0, va creciendo a uno y otro lado del plano xy, el cual determina la elipse mínima, de semiejes a, b, llamada *elipse de garganta*.

En la figura 205 se han representado también la intersección con el plano xz (hipérbola) y sus asíntotas; con el plano $y = b$ par de rectas $(x^2/a^2) - (z^2/c^2) = 0$), así como el cono cuádrico (§ 62-5, b_1) $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 0$, llamado *cono asintótico* por acercarse indefinidamente al hiperboloide, pues al cortar ambas superficies con un plano por el eje z, se obtiene una hipérbola y sus asíntotas.

Si $a = b$ el hiperboloide es de revolución alrededor del eje z.

d) En el *hiperboloide de dos hojas* [62-11] (fig. 206), las secciones con los planos $x = x_0$ son las elipses semejantes

$$\frac{y^2}{b^2k^2} + \frac{z^2}{c^2k^2} = 1 \ , \qquad x = x_0 \ ;$$

siendo $k^2 = (x_0^2/a^2) - 1 \geqslant 0$ para $|x_0| \geqslant a$.

En cambio para $|x_0| < a$ no hay intersección; esta superficie tiene, en consecuencia, una *hoja* en el semiespacio $x \geqslant a$, y otra en $x \leqslant -a$; se llama por eso, hiperboloide *de dos hojas*.

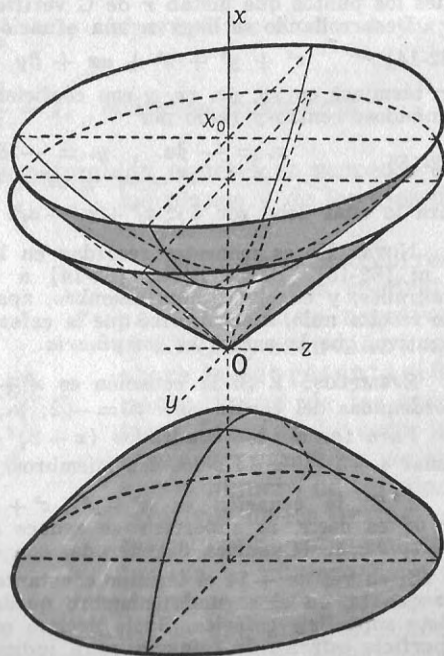


Fig. 206. — Hiperboloide de dos hojas.

En la figura 206 se han representado también intersecciones con tres planos, y el *cono asintótico* (cfr. *b*) $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 0$.

Si es $b = c$ la superficie es de revolución respecto del eje x.

3. Cuádricas sin centro. — *a*) Dejando de lado el caso de cuádricas de discriminante nulo (cuádricas degeneradas, § 62-5), no existe centro cuando y sólo cuando $A_{44} = 0$. Probaremos que entonces, con un movimiento de los ejes, la ecuación [62-1] puede llevarse a la forma

$$[62\text{-}16] \qquad a^*_{11}x^2 + 2a^*_{12}xy + a^*_{22}y^2 + 2a^*_{34}z = 0 .$$

En efecto, la transformación lineal:

$$Y = AX \quad ó \quad \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} ,$$

donde indicamos con x_1, x_2, x_3 las coordenadas no homogéneas x, y, z, es degenerada (§ 61-5, *a*) por ser $A_{44} = 0$, y entonces transforma el espacio en un plano por el origen (o parte de él). Tomándolo como plano $y_3 = 0$ resulta

$$\Sigma\, a_{3k}x_k = 0 \quad \text{para todo } X \quad \therefore \quad a_{3k} = a_{k3} = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, 3),$$

y entonces (volviendo a nuestra notación x, y, z) con una conveniente *rotación* de coordenadas puede hacerse que en los términos cuadráticos de [62-1] no aparezca z :

$$a^*_{11}x^2 + 2a^*_{12}xy + a^*_{22}y^2 + 2a^*_{14}x + 2a^*_{24}y + 2a^*_{34}z + a^*_{44} = 0 .$$

Con una *traslación* conveniente puede lograrse ahora que desaparezcan los términos en x, en y, e *independiente*, y la ecuación queda, en los nuevos ejes que seguiremos llamando x, y, z, en la forma [62-16].

b) Con una rotación alrededor del eje z puede hacerse desaparecer en [62-16] el término en xy (§ 63-5) y llegamos así a los dos tipos de cuádricas no degeneradas sin centro ($p > 0$, $q > 0$):

$$[62\text{-}17] \qquad \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z, \quad \textit{paraboloide elíptico;}$$

$$[62\text{-}18] \qquad \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z, \quad \textit{paraboloide hiperbólico.}$$

El carácter de los signos en ambas ecuaciones, ya nos dice que para la primera toda la superficie queda por encima del plano $z = 0$, mientras que éste es atravesado por la segunda superficie, lo que una vez conocidas las formas de ambas ayuda a recordarlas.

b_1) En el *paraboloide elíptico* [62-17] hemos escrito de ese modo los coeficientes, para que aparezcan las secciones por los planos coordenados, llamados *principales*, en esta forma:

$$x = 0 \quad , \quad y^2 = 2qz$$
$$y = 0 \quad , \quad x^2 = 2pz$$

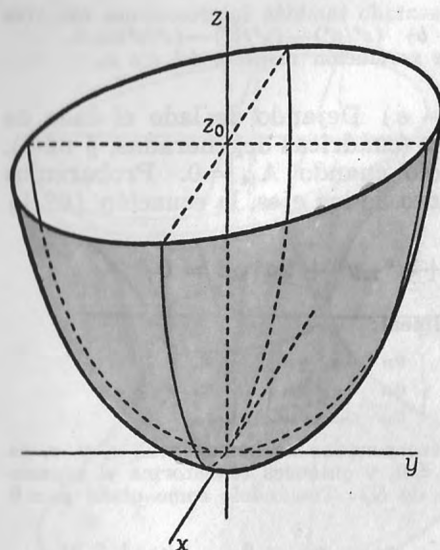


Fig. 207. — Paraboloide elíptico.

que representan dos parábolas de parámetros p y q, dirigidas ambas hacia las z positivas (fig. 207).

Las secciones por planos $z = z_0$ son elipses de semiejes a y b tales que:

$$a^2 = 2pz_0 \quad , \quad b^2 = 2qz_0$$

si es $z_0 > 0$; y estos semiejes van creciendo infinitamente con z_0; es decir, la superficie se extiende infinitamente en el sentido de las z positivas, siendo las secciones horizontales elipses semejantes. En cambio, para $z_0 < 0$ no resulta intersección real.

b_2) En el *paraboloide hiperbólico* [62-18], las dos parábolas secciones principales:

$$y = 0 \quad , \quad x^2 = 2pz \quad ;$$

$$x = 0 \quad , \quad y^2 = -2qz \quad ;$$

están dirigidas en sentidos contrarios (fig. 208).

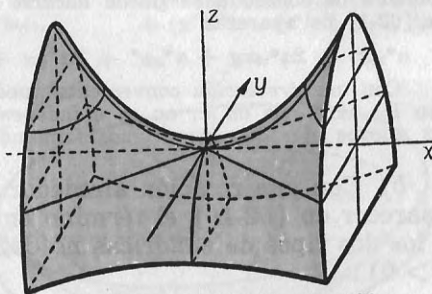


Fig. 208. — Paraboloide hiperbólico.

Las secciones por los planos $z = z_0$ son todas hipérbolas y por eso se llama *hiperbólico* este paraboloide.

Ésta es la única de las cuádricas no degeneradas (§ 62-5) que nunca es redonda o de revolución, por ser todas sus secciones planas hipérbolas o parábolas.

4. **Intersecciones. Plano tangente.** — *a*) *Intersecciones con una recta.* — Mediante una transformación de coordenadas podemos suponer que la recta sea el eje x; poniendo entonces $y = z = 0$ en [62-1] resulta

$$[62\text{-}19] \qquad a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0 \quad ,$$

de donde se obtienen las abscisas de los puntos de intersección. Puede haber un punto impropio común obtenible de [62-2]. Según que el número de puntos reales de intersección (propios o impropios) sea 2, 1 ó 0, la recta se llama *secante, tangente* o *exterior* a la cuádrica.

Si todos los coeficientes de [62-19] se anulan, pertenece a la cuádrica todo punto del eje x, que entonces debe considerarse como tangente a ella (cfr. § 62-6).

b) *Intersección con un plano.* — Mediante una transformación de coordenadas podemos suponer que el plano sea el xy; poniendo entonces $z = 0$ en [62-1] resulta

$$[62\text{-}20] \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0 \quad ,$$

que con $z = 0$ representa una *cónica propia o degenerada o ningún punto real.*

Si en [62-20] se anularan todos los términos cuadráticos ($a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$), haciendo $z = 0$ en la ecuación homogénea [62-2] resultaría

$$t(2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44}t) = 0$$

que en el plano $z = 0$ representa dos rectas, una de las cuales es la impropia $t = 0$.

Si se anulan todos los coeficientes de [62-20] todo punto del plano $z = 0$ pertenece a la cuádrica. Veremos en § 62-5 que en tal caso ésta degenera en un par de planos, eventualmente coincidentes.

Un plano π no perteneciente a una cuádrica se llamará:

1) *Exterior,* si no corta a la cuádrica;

2) *Secante,* si la corta según una cónica no degenerada;

3) *Tangente,* si la corta según una cónica degenerada: dos rectas, una recta, o un punto (en la Geometría compleja siempre dos rectas: reales distintas, reales y coincidentes, imaginarias).

c) *Plano tangente.* — c_1) Estudiemos con más detalle el caso 3) de *b*) para justificar la denominación de "tangente" dada al plano π. Si llamamos P al centro de la cónica degenerada D de intersección (que será entonces un par de rectas *por* P, llamándose *centro* al punto impropio común cuando sean paralelas, o una recta *por* P, o solamente P), como toda recta del plano π corta a la cuádrica según D, tendremos por *a*), para las del haz de centro P:

Si un plano π corta a una cuádrica no degenerada según una cónica degenerada D *de centro* P, *toda recta del plano que pase por* P *es tangente a la cuádrica.*

Recíprocamente, si dos rectas t y t' tangentes a la cuádrica se cortan en P y determinan un plano $\pi = (t, t')$, la cónica intersección con π, por tener un solo punto común con t y con t' es necesariamente degenerada y π es plano tangente, entonces:

El plano determinado por dos tangentes a una cuádrica en un mismo punto P, *contiene infinitas tangentes a la cuádrica, que forman un haz de centro* P, *y es el plano tangente a la cuádrica en* P.

c_2) Probaremos que la ecuación del plano tangente a la cuádrica [62-2] en un punto $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ es

[62-21] $$A_1x + A_2y + A_3z + A_4t = 0 \quad ,$$

con los coeficientes

[62-22] $$A_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}y_1 + a_{i3}z_1 + a_{i4}t_1 .$$

Para ello consideremos las matrices vectoriales (§ 61-4, *d*)

$$X_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{Bmatrix} \; ; \quad X = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Bmatrix} \; ; \quad X_1 + \lambda X = \begin{Bmatrix} x_1 + \lambda x \\ y_1 + \lambda y \\ z_1 + \lambda z \\ t_1 + \lambda t \end{Bmatrix} \; ;$$

formadas con las coordenadas homogéneas de P_1, de un punto P del espacio, y de la recta $P_1P = r$ al variar λ. Por estar P_1 en la cuádrica es $X_1'AX_1 = 0$; la otra intersección de r con la cuádrica se obtiene determinando λ a partir de

$$(X_1 + \lambda X)'A(X_1 + \lambda X) = \lambda^2 X'AX + 2\lambda X_1'AX = 0,$$

pues $X'AX_1 = (X'AX_1)' = X_1'AX$, porque la traspuesta de la matriz de un solo elemento es ella misma, aplicándose [61-28] y [61-31].

Será $\lambda = 0$ raíz doble, y esa otra intersección coincidirá con P_1, es decir $r = PP_1$ será una recta tangente a la cuádrica, si se anula el coeficiente de 2λ :

[62-23] $$X_1'AX = 0.$$

Esta ecuación de primer grado en x, y, z, t representa el plano tangente en P_1. Desarrollada da [62-21].

NOTA. Si llamamos $\varphi(x, y, z, t)$ al primer miembro de [62-2], la ecuación de la cuádrica puede escribirse (cfr. § 67-3):

$$x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z \frac{\partial\varphi}{\partial z} + t \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

y la del plano tangente en P, en una de las dos formas siguientes, indicando con subíndice 1 los valores de las derivadas parciales en el punto P_1 :

$$x \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1 + y \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1 + z \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_1 + t \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_1 = 0;$$

$$x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + t_1 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

d) *Secciones paralelas. — Las secciones reales de una cuádrica por planos secantes paralelos forman una o dos familias de curvas semejantes, estando en el segundo caso separadas ambas familias por un plano tangente.*

La intersección [62-20] de [62-1] con $z = 0$, y la intersección con el plano paralelo $z = k$ definida por éste y

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2(a_{13}k + a_{14})x + 2(a_{23}k + a_{24})y + \\ + (a_{33}k^2 + 2a_{34}k + a_{44}) = 0,$$

son cónicas con iguales términos cuadráticos; son entonces dos de ellas semejantes si al eliminar los términos lineales por traslación, resultan términos independientes de igual signo, siendo degenerada la que lo anule.

5. Puntos singulares y cuádricas degeneradas. — *a*) Si en la ecuación [62-21] del plano tangente en $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ se anulan los cuatro coeficientes, toda recta por P_1 es tangente a la cuádrica (§ 62-4, *a*) y todo plano por P_1 es tangente (§ 62-4, *b*), por cuya razón suele decirse también que no existe plano tangente. Tales puntos se llaman *singulares*.

Una cuádrica se llama *degenerada* cuando tiene por lo menos un punto singular, el que siempre es real por ser solución del sistema lineal de coeficientes reales que resulta de anular las [62-22]. Para que este sistema sea compatible debe anularse el discriminante [62-6].

NOTAS: 1. El discriminante A es invariante para toda transformación ortogonal de coordenadas, que en coordenadas homogéneas puede expresarse por $X = SY$, siendo S la matriz ortogonal

[62-24] $$S = \begin{Bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

con $\{\lambda_{ik}\}$ ortogonal. La cuádrica $X'AX = 0$ se transforma en $Y'S'ASY = 0$, con discriminante

$$A^* = \det(S'AS) = A \quad \text{pues} \quad \det S = \pm 1.$$

2. La operación de formar la matriz S (nota 1) con las matrices $\{\lambda_{ik}\}$ y la de único elemento 1, obviamente generalizada a matrices cualesquiera, se llama *suma directa*.

Es inmediato ver que la suma directa de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal. La matriz de una rotación alrededor de un eje de coordenadas es suma directa de dos matrices ortogonales de órdenes 1 y 2.

b) Una cuádrica degenerada pertenece, según que haya un punto singular propio o impropio, a uno u otro (o ambos) de los dos tipos siguientes, indiscernibles entre sí en el grupo proyectivo (§ 61-7, *d*).

b_1) *Conos cuádricos.* — Una ecuación de segundo grado *homogénea en* x, y, z

[62-25] $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0,$$

representa un cono con vértice en el origen O, pues si $P(x, y, z)$ satisface [62-25], lo mismo ocurre con todo punto $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ de la recta OP.

El determinante A se anula por anularse su cuarta fila $\{a_{4i}\}$ (y también su cuarta columna $\{a_{i4}\}$). El vértice es punto singular.

b_2) *Cilindros cuádricos.* — Una ecuación de segundo grado *en dos variables* x, y

[62-26] $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0 \quad ,$$

representa en el plano (x, y) una cónica C, y en el espacio (x, y, z) una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje z, pues con cada punto de la cónica C (directriz) satisfacen [62-26], los que resultan al variar solamente z.

Se anula A por ser $a_{i3} = 0$. Punto singular es el punto impropio común de las generatrices.

NOTAS: 3. Si en el cono [62-25] es $A_{44} \neq 0$, es el vértice O el único centro (§ 62-1, *d*). En el cilindro [62-26] es $A_{44} = 0$, hay centro si lo tiene la cónica directriz, y en este caso lo son todos los puntos de la paralela por él a las generatrices.

4. Si una cuádrica degenera en dos planos secantes puede considerarse como cilindro y (de infinitas maneras) como cono; y todo punto de la recta de intersección es singular. Si los planos son coincidentes todos los puntos son singulares. Si los planos son paralelos puede considerarse de infinitas maneras como cilindro, siendo singulares todos los puntos de su recta impropia común.

c) Veamos lo que representan ecuaciones de los tipos siguientes

[62-27] $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$, (*cuádricas con centro*);

[62-28] $Ax^2 + By^2 = z$, (*paraboloides*);

cuando se anula alguno de los coeficientes, distinguiendo tres casos esenciales:

c_1) *Término constante nulo*. Es decir: $D = 0$.

La ecuación homogénea:

[62-29] $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

representa, (b_1), un *cono*, cuyo vértice es el origen O (fig. 209, *a*). Dentro de este tipo cabe que algún término cuadrado se anule y el cono degenera reduciéndose a un par de planos: sea por ejemplo $C = 0$; la ecuación

[62-30] $$Ax^2 + By^2 = 0 \quad ; \quad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}}$$

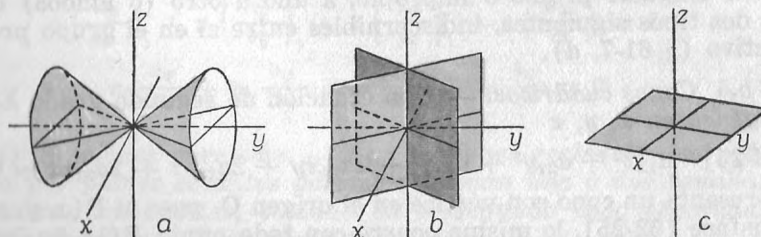


Fig. 209. — Conos con vértice en el origen; *b* y *c* son también cilindros, pues algunos de los infinitos vértices son impropios.

representa dos planos que pasan por el eje z (fig. 209, *b*); si A y B tienen igual signo, no existen tales planos, pues solamente los puntos $x = y = 0$ del eje z satisfacen a la ecuación (en la Geometría compleja representa *dos planos imaginarios*).

Sean $C = 0$, $B = 0$. La ecuación

[62-31] $$Ax^2 = 0 \quad ; \quad x^2 = 0$$

representa el plano $x = 0$, considerado como doble. Análogamente si $z^2 = 0$ (fig. 209, *c*).

c_2) *Ecuación no homogénea*. Suponiendo $D \neq 0$ en [62-27], sea, por ejemplo, $C = 0$;

$$Ax^2 + By^2 = D$$

representa un cilindro de generatrices paralelas al eje z (fig. 210, *a*).

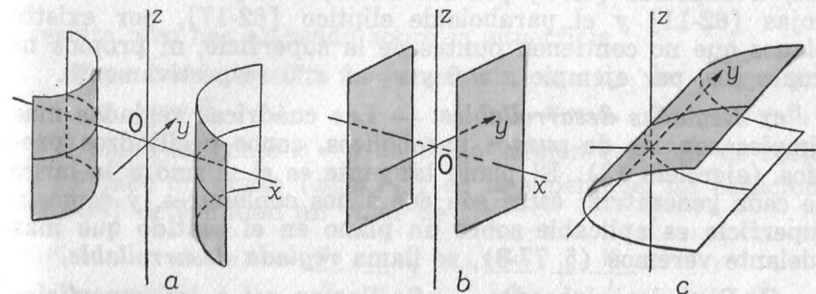


Fig. 210

Si es $C = 0$ y $B = 0$, la ecuación:

[62-32] $$Ax^2 = D \quad ; \quad x = \pm\sqrt{\frac{D}{A}}$$

representa dos planos paralelos (fig. 210, *b*), si D y A tienen el mismo signo; en caso contrario ningún punto (en la Geometría compleja dos planos paralelos imaginarios).

c_3) *Paraboloides degenerados*. Dentro del tipo [62-28], si se anula un término cuadrado, la ecuación se reduce al tipo:

[62-33] $$Ax^2 = z$$

que representa un cilindro parabólico de generatrices paralelas al eje y (fig. 210, *c*).

Si se anulan los dos términos cuadrados, la ecuación se reduce a $z = 0$ que representa el plano xy; representa además el plano del infinito, pues en coordenadas homogéneas el segundo miembro es zt.

Resumen: La ecuación incompleta, dentro de los tipos estudiados en las cinco cuádricas representa una *superficie cónica* (que se puede reducir a dos planos secantes) si es homogénea; y una *superficie cilíndrica* (que se puede reducir a dos planos paralelos o secantes).

6. Cuádricas regladas. — *a*) *Clasificación puntual de las cuádricas*. — Vimos en § 62-4, *a*, que una cuádrica C puede contener una recta, tangente entonces a la cuádrica en cada uno de sus puntos. Pero por un punto P no singular de C no pueden pasar más de dos rectas (ejercicio 12), y según que pasen ninguna, una o dos, el punto P se llama *elíptico*, *parabólico* o *hiperbólico* (cfr. § 70-2).

De ejercicios 13 y 14 se deduce que todos los puntos no singulares de una cuádrica son de la misma naturaleza, y podemos distinguir *cuádricas de puntos elípticos*, *cuádricas de pun-*

tos parabólicos y *cuádricas de puntos hiperbólicos.* Las de las dos últimas clases se llaman *regladas,* y sus rectas, *generatrices rectilíneas* (cfr. § 75-1). También es reglada una cuádrica que degenere en un par de planos, distintos o no, pero entonces todo punto es singular.

b) No pueden ser regladas, es decir, son de puntos elípticos, el elipsoide [62-9] por ser finito, el hiperboloide de dos hojas [62-11] y el paraboloide elíptico [62-17], por existir planos que no contienen puntos de la superficie, ni propios ni impropios, por ejemplo $x = 0$ y $z = k < 0$ respectivamente.

c) *Regladas desarrollables.* — Las cuádricas regladas más simples son las de puntos parabólicos, conos o cilindros propios (ejercicio 13). El plano tangente es el mismo a lo largo de cada generatriz; éstas son dos a dos coplanares, y como la superficie es aplicable sobre un plano en el sentido que más adelante veremos (§ 77-3), se llama *reglada desarrollable.*

d) *Regladas alabeadas.* — Se llaman así a las superficies regladas no desarrollables (§ 75-2). Entre las cuádricas lo son las de puntos hiperbólicos: hiperboloide de una hoja y paraboloide hiperbólico.

d_1) *Hiperboloide de una hoja.* — Su ecuación [62-10] puede escribirse así:

[62-34] $$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

o bien

$$\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\frac{x}{a} + 1\right) = \left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right).$$

Escrita en esa forma aparece como producto de las ecuaciones

[62-35] $$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - 1 = \lambda\left(\dfrac{z}{c} - \dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} + 1\right) = \dfrac{z}{c} + \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

cualquiera que sea el parámetro λ. Al variar λ, cada una de estas ecuaciones representa un haz de planos, y sus intersecciones son rectas situadas en la superficie, puesto que la ecuación [62-34] se satisface para las soluciones comunes a éstas, ya que es el producto de ambas.

Resulta, pues, un sistema de infinitas rectas situadas en la cuádrica, y el conjunto de todas se llama *haz alabeado* de segundo orden.

Análogamente, como [62-34] es el producto de las ecuaciones

[62-36] $$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - 1 = \mu\left(\dfrac{z}{c} + \dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + 1\right) = \dfrac{z}{c} - \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

resulta otro haz alabeado sobre la superficie.

Para $\lambda = 0$ resulta la generatriz $x = a, \quad bz + cy = 0,$
" $\mu = 0$ " " " $x = a, \quad bz - cy = 0,$
y el plano tangente $x = a$ da como sección este par de rectas.

Fijado un punto (x_0, y_0, z_0) en la superficie, las ecuaciones [62-35] determinan un valor de λ

$$\lambda = \frac{\dfrac{x_0}{a} - 1}{\dfrac{z_0}{c} - \dfrac{y_0}{b}} = \frac{\dfrac{z_0}{c} + \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a} + 1},$$

el cual determina una generatriz del primer sistema que pasa por él y, análogamente, resulta una generatriz del segundo sistema. En consecuencia:

El hiperboloide de una hoja contiene dos haces de generatrices rectilíneas y por cada punto de la superficie pasa una de cada sistema, las cuales determinan el plano tangente en dicho punto.

Las aristas de los haces de planos [62-35] son las rectas de ecuaciones

$$x/a = 1 \;,\; z/c = y/b \quad ; \quad x/a = -1 \;,\; z/c = -y/b$$

y como estas cuatro ecuaciones son claramente incompatibles, dichas aristas se cruzan. Cada par de planos homólogos se cortan en una recta, secante de ambas aristas; luego cada dos secantes MN, M'N' se cruzan. Análogamente para los haces [62-36].

Por consiguiente: *Dos generatrices de un mismo haz no se cortan.*

En cambio, como las ecuaciones [62-35] y [62-36] no son independientes, pues el producto de las dos primeras es idéntico al producto de las dos segundas (o sea la ecuación [62-34]), una de ellas es consecuencia de las otras tres y por tanto las coordenadas del punto que satisfaga a tres de ellas satisface también a la cuarta. Es decir: *Dos generatrices de distinto haz tienen un punto común.*

Dadas tres generatrices de un sistema, las del otro quedan determinadas por la condición de cortar a estas tres.

Sea un punto de la generatriz c, los planos Pa y Pb determinan una recta que pasa por P y cortan a las a y b en puntos propios o impropios.

Por cada punto de cada una de las rectas a, b, c pasa, pues, una sola generatriz del otro sistema.

Recíprocamente, dadas tres rectas cualesquiera que se cruzan dos a dos se obtiene fácilmente la ecuación de la cuádrica que se determina como indica el ejercicio 15.

d_2) *Paraboloide hiperbólico.* — Su ecuación puede escribirse así:

[62-37] $$z = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

y es por tanto el producto de estas dos

[62-38] $$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda z \;;\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda},$$

que definen un haz alabeado de rectas situadas en la superficie, y asimismo es el producto de estas otras dos

[62-39] $$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \mu \;;\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{\mu},$$

que definen otro haz alabeado, por la misma razón ya explicada en el caso del hiperboloide.

Lo mismo que en el caso anterior, por cada punto del paraboloide pasa una generatriz de cada sistema; pero hay una diferencia notable, y es que todas las rectas [62-38] son paralelas al plano

[62-40] $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

y todas las rectas [62-39] son paralelas al plano

[62-41] $$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Estos dos planos se llaman *directores* del paraboloide.

NOTAS: 1. Para $\mu \to \infty$ resulta en el haz [62-39] la recta impropia del plano [62-40], y para $\lambda \to 0$ la del plano [62-41]. Es, pues, natural, decir que esas rectas impropias son generatrices del paraboloide y que forman su intersección con el plano impropio.

2. Subsisten para el paraboloide hiperbólico las propiedades de intersección de las generatrices de uno y otro sistema, estudiadas en d_1 para el hiperboloide reglado.

7. Secciones circulares. Secciones circulares diametrales. — *a*) Sólo en el elipsoide y en el hiperboloide de una hoja existen planos que pasan por el centro y dan secciones circulares; un método sencillo para determinarlos es el siguiente:

Si de la ecuación de la cuádrica $f(x, y, z) = 0$ restamos la ecuación de una superficie esférica elegida de tal manera que la diferencia represente dos planos, la línea de intersección de la cuádrica con la superficie es la misma que la intersección de ésta con los dos planos, es decir, dos circunferencias.

a_1) *Elipsoide.* — Sea el elipsoide escaleno

[62-42] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c$$

y la superficie esférica de radio b

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

La diferencia de ambas ecuaciones da

$$x^2\left\{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right\} = z^2\left\{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right\},$$

y como ambos coeficientes son positivos por ser $1/b^2 > 1/a^2$ y $1/c^2 > 1/b^2$, esta ecuación se descompone en dos ecuaciones de primer grado que representan dos planos: $z = \pm kx$. Como estos planos dan la misma intersección con la esfera y con el elipsoide, resulta:

Hay dos secciones circulares cuyos planos pasan por el eje intermedio b.

Si elegimos la superficie esférica de radio a ó c resulta un coeficiente positivo y otro negativo, es decir, dos planos imaginarios.

EJEMPLO 1. Sea el elipsoide:

$$4x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 2.$$

Como el coeficiente intermedio es el 4, elegiremos la esfera

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 2.$$

y restando resulta:

$$y^2 - 2z^2 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{2}z.$$

Las dos secciones circulares que pasan por el eje x están perfectamente determinadas por estos dos planos y la superficie esférica.

a_2) *Hiperboloide de una hoja.* — El método es igual al seguido en el elipsoide. Si de la ecuación

[62-43] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;\quad a > b;\quad c \text{ cualquiera},$$

respetamos la ecuación de la superficie esférica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

resulta

$$y^2\left\{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right\} - z^2\left\{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right\} = 0,$$

que representa un par de planos: $z = \pm ky$ que pasan por el eje x y que son simétricos respecto de los dos planos coordenados xy, xz.

Por el eje menor b no pasa en cambio ningún plano que dé sección circular, pues todos dan secciones con semieje mínimo b.

b) *Doble sistema de secciones circulares. Puntos cíclicos.* — Obtenidas las dos secciones circulares diametrales, todas las secciones producidas por planos paralelos son también circunferencias (§ 62-4, *d*). Resulta, pues, un doble sistema de secciones circulares, dos a dos simétricas respecto de los planos principales que pasan por el eje intermedio; los centros de las secciones paralelas entre sí forman el diámetro conjugado con el diámetro que dichas secciones circulares determinan en la elipse, sección con el plano principal que pasa por los ejes extremos.

Los dos extremos C_1C_2 de cada diámetro conjugado con un sistema de secciones circulares, o sea los puntos en que corta a la cuádrica, se llaman *umbílicos* o *cíclicos*.

Los puntos cíclicos de la cuádrica están, pues, definidos por la condición de que los planos secantes paralelos al plano tangente en cada uno de ellos, dan secciones circulares.

En el elipsoide escaleno hay, por consiguiente, cuatro puntos cíclicos, situados en la sección principal de semiejes máximo y mínimo y simétricos dos a dos respecto de éstos.

En el hiperboloide de una hoja, como el plano tangente corta en dos rectas, y sus paralelos cortan en hipérbolas que tienen los mismos puntos impropios que estas rectas, resulta: *el hiperboloide de una hoja carece de puntos cíclicos.*

EJEMPLO 2.

$$3x^2 + y^2 - 2z^2 = 4.$$

Como el mayor de los semiejes transversos es el b, elegiremos la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

y restando resulta la ecuación

$$2x^2 = 3z^2 \quad \therefore \quad \pm\sqrt{2/3}\,x = z$$

que representa dos planos; éstos, con la superficie esférica, determinan dos secciones circulares.

EJERCICIOS

1. *a*) Probar que dados por sus coordenadas homogéneas los puntos $P_1(x_1.\ y_1,\ z_1,\ t_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$, todo punto

$$(*) \qquad P(\lambda x_1 + x_2,\ \lambda y_1 + y_2,\ \lambda z_1 + z_2,\ \lambda t_1 + t_2)$$

está alineado con P_1 y P_2; *b*) Llamando *razón simple* $(P_1P_2P_3)$ de tres puntos alineados a P_1P_3/P_2P_3 (cfr. § 9, ejercicio 3), es $(P_1P_2P) = -t_2/(\lambda t_1)$; *c*) Considerar los casos $P_1 \equiv P_2$, $P_1 \not\equiv P_2$, $P \equiv P_2$, $P \to P_1$.

2. Llamando *razón doble* de cuatro puntos alineados a $(P_1P_2P_3P_4) = (P_1P_2P_3) / (P_1P_2P_4)$, (cfr. § 9, ejercicio 3), deducir del ejercicio anterior que si P_3 y P_4 son de la forma (*) con $\lambda = \lambda_3$, $\lambda = \lambda_4$, es

$$(**) \qquad (P_1P_2P_3P_4) = \lambda_4/\lambda_3.$$

3. Llamando $F(x, y, z, t)$ a la forma cuadrática en [62-2] e introduciendo la *forma bilineal asociada* o *polar*:

$$F\begin{pmatrix} x_1, y_1, z_1, t_1 \\ x_2, y_2, z_2, t_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1x_2 + a_{22}y_1y_2 + a_{33}z_1z_2 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + \dots + a_{44}t_1t_2 ,$$

probar que las intersecciones de la recta P_1P_2 (ejercicio 1) con la cuádrica [62-2] son de la forma (*) siendo λ las raíces de

$$(***) \quad F(x_1, y_1, z_1, t_1)\lambda^2 + 2F\begin{pmatrix} x_1, y_1, z_1, t_1 \\ x_2, y_2, z_2, t_2 \end{pmatrix}\lambda + F(x_2, y_2, z_2, t_2) = 0.$$

4. Diremos que dos puntos P_1, P_2 son *conjugados* o *recíprocos* respecto de una cuádrica [62-2] cuando *dividen armónicamente* a las intersecciones P_3, P_4 de la recta P_1P_2 con la cuádrica, es decir, $(P_1P_2P_3P_4) = -1$. Probar que para ello la condición es

$$(****) \qquad F\begin{pmatrix} x_1, y_1, z_1, t_1 \\ x_2, y_2, z_2, t_2 \end{pmatrix} = 0.$$

5. El lugar geométrico de los puntos conjugados de $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ respecto de la cuádrica [62-2] es el plano π_1 de ecuación

$$F\begin{pmatrix} x_1, y_1, z_1, t_1 \\ x, y, z, t \end{pmatrix} = 0 ,$$

llamado *plano polar* de P_1 respecto de la cuádrica (P_1 se llama *polo* del plano π_1). Probar que la ecuación de π_1 puede escribirse:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + a_{14}t_1)x + (a_{21}x_1 + \dots)y + \dots = 0$$

o (utilizando derivadas parciales, § 66-1):

$$xF_x(x_1, \dots, t_1) + yF_y(x_1, \dots, t_1) + zF_z(x_1, \dots, t_1) + tF_t(x_1, \dots, t_1) = 0.$$

6. Los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una cuádrica [62-2] están en un plano, llamado *plano diametral conjugado* con la dirección común de las cuerdas. Probar que el plano diametral conjugado con la dirección de parámetros directores u_1, u_2, u_3 es:

$$(+) \qquad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})u_1 + (a_{21}x + \dots + a_{24})u_2 + (a_{31}x + \dots + a_{34})u_3 = 0.$$

7. Ecuación de la cuádrica que pasa por $P(1; -1; 1)$ y por las secciones determinadas en la cuádrica de § 62-1, ej. 1, por los planos $2y + z = 0$, $x - 2y = 0$.

8. Completando cuadrados, verificar que la cuádrica

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2x + 8y + 5 = 0$$

es un elipsoide y hallar el centro C y los semiejes.

9. En la cuádrica

$$x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 6xz + 4yz + 8x - 4y + 2kz + k^2 = 0 ,$$

1º) Completar cuadrados tomando sucesivamente x, y, z como *variables directrices*, es decir, formando un cuadrado que contenga todos los términos con x, luego otro con todos los términos (restantes y nuevos) con y, etc.; 2º) Indicar su naturaleza para los distintos valores de k.

10. Probar que cada uno de los paraboloides [62-17] y [62-18] puede engendrarse de infinitas maneras por la traslación de una parábola.

11. Si un plano corta a una cuádrica C según una recta r, es tangente a C en un punto P de r.

12. Por un punto no singular P de una cuádrica pasan a lo más dos rectas de ella.

13. Si por un punto P pasa una sola recta r de una cuádrica, ésta es un cono o cilindro propios (es decir, degenerada pero sin planos), y todo punto no singular tiene la misma propiedad.

14. Si por un punto no singular P de una cuádrica pasan dos rectas r r' de ella, otro tanto ocurre con todo otro punto Q.

15. Hallar la ecuación de la cuádrica que contiene las rectas

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

eliminando a, b, p, q entre las ecuaciones de la recta

$$x = az + p \quad , \quad y = bz + q$$

y las condiciones para que ésta corte a las tres dadas.

16. Calcular el discriminante A de las cuádricas en forma reducida (§ 62-2 y 3, ver § 63-8) verificando que una cuádrica (no degenerada) es reglada si y sólo si $A \geqq 0$ $(A > 0)$.

17. Probar que los cuatro puntos cíclicos del elipsoide [62-42] son $(\pm a\sqrt{(a^2 - b^2)/(a^2 - c^2)},\ 0,\ \pm c\sqrt{(b^2 - c^2)/(a^2 - c^2)})$.

18. Demostrar que en el hiperboloide de dos hojas existen dos sistemas de secciones circulares, paralelas al mayor de los dos ejes no transversos, y cuatro puntos cíclicos.

19. Demostrar que el paraboloide elíptico [62-17] con $p > q > 0$ tiene dos sistemas de secciones circulares y dar las ecuaciones de los correspondientes planos por el origen. Demostrar que hay dos puntos cíclicos y hallarlos.

20. Hallar las secciones circulares, el ángulo que forman y los puntos cíclicos de: 1º) el elipsoide $x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1$; 2º) el hiperboloide de dos hojas $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ (cono asintótico); 3º) el paraboloide elíptico $z = 11x^2 + y^2$.

21. Indicar porqué el paraboloide hiperbólico [es la única cuádrica no degenerada que] no tiene secciones circulares.

22. De los ejercicios anteriores y § 62-7, *b*, deducir que las únicas cuádricas sin puntos cíclicos son las regladas.

23. *a*) Demostrar que los dos planos que dan secciones circulares del elipsoide [62-42] y pasan por el eje intermedio b, son los que pasan también por los puntos de intersección de la elipse

$$(°) \qquad (x^2/a^2) + (z^2/c^2) = 1 \quad , \quad y = 0$$

y la circunferencia

$$x^2 + z^2 = b^2 \quad , \quad y = 0 \quad ,$$

pasando cada plano por dos de los puntos de intersección M, M' y N, N'; *b*) Con ello, probar que se determinan gráficamente los cuatro puntos cíclicos como extremos de los diámetros conjugados a los diámetros MM' y NN' en la elipse (°).

24. 1º) Indicar la naturaleza de las *cuádricas confocales con centro*

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} + \frac{z^2}{c^2 - k} = 1 \quad , \quad (a > b > c > 0) \quad ,$$

para los distintos valores de k; 2º) Probar que por cada punto $P(x, y, z)$, $(xyz \neq 0)$ pasan tres cuádricas de la familia, un elipsoide, un hiperboloide de una hoja y un hiperboloide de dos hojas. (Los valores de k se llaman *coordenadas elípticas* del punto, iguales para los ocho puntos $P(\pm x, \pm y, \pm z)$.

25. 1º) Indicar la naturaleza de los *paraboloides confocales*

$$\frac{x^2}{p - k} + \frac{y^2}{q - k} = 2z - k \quad , \quad (p > q > 0) \quad ,$$

para los distintos valores de k; 2º) Probar que por cada punto $P(x, y, z)$, $(xyz \neq 0)$ pasan tres cuádricas de la familia.

§ 63. ÁLGEBRA TENSORIAL

1. Tensor doble. — *a*) *El vector como función escalar de la dirección.* — La proyección a_u del vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ sobre la dirección $\mathbf{u}$ dada por el vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ es (§ 60-5, *a*) el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$; luego

[63-1] $$a_u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = \Sigma a_iu_i \quad ,$$

relación que nos dice que un vector a puede considerarse como representante de los escalares a_u que dan sus componentes según todas las direcciones $\mathbf{u}$ del espacio; así, pues, el vector **a** representará una correspondencia establecida entre todas las direcciones del espacio y un conjunto de números reales a_u. Sin embargo, no a toda correspondencia de esta clase la podemos llamar "vector", pues no podrán tomarse los números reales a_u como componentes (proyecciones) de un cierto vector a sobre la dirección **u**, si dicha correspondencia no viene expresada por una ley lineal homogénea en los cosenos directores de la forma [63-1].

EJEMPLO. En el caso de una fuerza, ésta es un "vector", no sólo porque en una determinada dirección actúa según una cierta intensidad máxima, sino porque en cualquier dirección se manifiesta según una intensidad que es función *lineal homogénea* de los cosenos directores de la dirección. En cambio, la irradiación luminosa de una lámpara adecuada a una buena iluminación, que en una determinada dirección tiene también intensidad máxima, no posee carácter vectorial por no seguir su intensidad en las demás direcciones dicha ley lineal homogénea.

Podemos entonces definir analíticamente en el espacio $\mathbf{E}_3$ el vector **a** como una correspondencia establecida entre todas las direcciones **u** y un conjunto de números reales (escalares) a_u dada por una ley lineal homogénea en los cosenos directores u_i, de la forma [63-1].

Los coeficientes del segundo miembro de [63-1] son los valores que toma el primer miembro para $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = \mathbf{k}$, y bastan dichos tres valores a_1, a_2, a_3 para determinar completamente el vector a, es decir, para conocer todo el conjunto de los a_u.

La expresión [63-1] de la proyección a_u o *componente* o *valor* (§ 60-4) del vector **a** según la dirección **u**, se conserva *invariante* respecto de las transformaciones ortogonales, como resulta del significado geométrico de a_u, pero convendrá demostrarlo analíticamente para adaptar luego la demostración al caso más general tratado en (*b*).

Tendremos en efecto por [61-7]

[63-2] $$u_i = \Sigma_k \lambda_{ki} u'_k$$

y reemplazando en [63-1] tendremos por [61-6]

[63-3] $a_u = \Sigma_i a_i (\Sigma_k \lambda_{ki} u'_k) = \Sigma_k (\Sigma_i \lambda_{ki} a_i) u'_k = \Sigma_k a'_k u'_k$.

NOTA 1. Obsérvese que la costumbre de adoptar la dirección de intensidad máxima para la representación gráfica del vector, no expresa que sólo en esa dirección se manifiesta la magnitud. Para descubrir la ley de caída de los graves, GALILEO adoptó un plano inclinado en el cual se manifiesta igualmente la gravitación, pero atenuada según la ley del coseno.

b) *Tensores de rango* 2. — b_1) Análogamente a lo visto en (*a*), se define el *tensor* (de rango 2) como una función *vectorial* lineal homogénea de la dirección. Así en el espacio E_3, el tensor **A** quedará definido por la correspondencia de *vectores* $\mathbf{a}_u$ respecto de las direcciones **u** del espacio, dada por la ley lineal homogénea en los cosenos directores u_i de cada dirección

[63-4] $$\mathbf{a}_u = \Sigma \mathbf{a}_i u_i .$$

Los coeficientes *vectoriales* del segundo miembro son los valores que $\mathbf{a}_u$ toma para $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = \mathbf{k}$. La misma fórmula [63-2] prueba que la expresión [63-4] del vector $\mathbf{a}_u$ es *invariante* respecto de las transformaciones ortogonales del espacio. El tensor **A** queda determinado por los *tres* vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, y si designamos por a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} las componentes según los ejes coordenados del vector $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, el tensor **A** quedará determinado por los *nueve* numeros a_{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$, pudiendo sustituirse la igualdad vectorial [63-4] por las igualdades escalares siguientes, que resultan de proyectar ambos miembros de [63-4] sobre cada uno de los ejes de coordenadas

[63-5] $$(\mathbf{a}_u)_1 = \Sigma a_{1i} u_i \quad , \quad (\mathbf{a}_u)_2 = \Sigma a_{2i} u_i \quad , \quad (\mathbf{a}_u)_3 = \Sigma a_{3i} u_i \ ,$$

o brevemente

[63-5′] $$(\mathbf{a}_u)_h = \Sigma a_{hi} u_i \quad , \quad (h = 1, 2, 3).$$

Los nueve coeficientes a_{hi} son las *coordenadas* del tensor **A** respecto del sistema de referencia. Las a_{ii} se llaman *principales*.

b_2) Como estos nueve números varían al rotar los ejes, es preciso caracterizar su modo de variación. Por [61-6], [63-5′] y [61-7] se tiene

[63-6] $$(\mathbf{a}'_u)_j = \Sigma_h \lambda_{jh} (\mathbf{a}_u)_h = \Sigma_{hi} \lambda_{jh} a_{hi} u_i = \Sigma_{hik} \lambda_{jh} a_{hi} \lambda_{ki} u'_k = $$
$$= \Sigma_h a'_{jk} u'_k$$

siendo

[63-7] $$a'_{jk} = \Sigma_{hi} \lambda_{jh} \lambda_{ki} a_{hi} .$$

Entonces, por [63-6] al girar los ejes se conserva invariante la expresión [63-5′] con tal que las coordenadas del tensor se transformen linealmente según [63-7].

Obtenemos así esta definición equivalente del *tensor como matriz*:

Tensor doble es un ente abstracto representado por una matriz $\{a_{hi}\}$ que al girar los ejes se transforma linealmente según [63-7].

NOTA 2. En la matriz $\{a_{hi}\}$ cada columna da las componentes del vector correspondiente a un eje de coordenadas (cfr. § 61-2, *b*), y cada fila está formada por los coeficientes de una componente del vector transformado.

c) *Significado físico.* — El concepto de tensor fué creado para generalizar el método empleado desde mucho tiempo atrás en Resistencia de Materiales para representar el estado de tensión de un cuerpo en cada punto. La acción de las llamadas "fuerzas exteriores" sobre un cuerpo (peso propio, cargas continuas o discontinuas ejercidas por pilares o arcos que se apoyan sobre el cuerpo en cuestión, reacciones de apoyos, acción de la temperatura y del viento, etc.) produce una deformación elástica que dentro de ciertos límites, en virtud de la propiedad física llamada cohesión, equilibra dicha acción; el cuerpo está en equilibrio elástico si después de la deformación, todas sus partes quedan en reposo, para lo cual las fuerzas exteriores más las de cohesión deben cumplir las condiciones de equilibrio dadas por la Estática. Consideremos por un punto P del sólido un elemento plano, de superficie σ, perpendicular a un versor **n**, y las fuerzas que actúan a través de σ sobre la parte I del sólido para la cual **n** es normal exterior, provenientes de la parte II del cuerpo, situada del otro lado de σ (fig. 211). Estas fuerzas tienen como resultante (además del momento resultante) una única fuerza **t**. Al tender a cero el diámetro del elemento σ, la razón $\mathbf{t}/\sigma$ tiende a un vector límite $\mathbf{t}_n$, que sólo depende del versor **n** y se llama tensión en P correspondiente a la dirección **n**. En un sólido la dirección de $\mathbf{t}_n$ difiere en general de **n**.

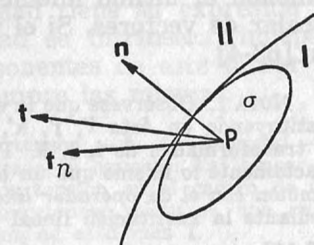


Fig. 211. — Resultante **t** a través de σ, y tensión $\mathbf{t}_n$ en P correspondiente a la dirección **n**.

Veamos ahora cómo se sintetiza el conjunto de las *tensiones en* P correspondientes a las distintas direcciones, mediante el concepto de *tensor*. Para ello consideremos un pequeño tetraedro formado por un plano perpendicular a la dirección **n** y planos paralelos a los de coordenadas. Las fuerzas correspondientes a las caras se obtienen multiplicando los cuatro vectores, que dan las tensiones, por las áreas respectivas σ_x, σ_y, σ_z, σ_n, y una condición de equilibrio la da la igualdad vectorial

[63-8] $$\sigma_n \mathbf{t}_n = \sigma_x \mathbf{t}_x + \sigma_y \mathbf{t}_y + \sigma_z \mathbf{t}_z$$

que es análoga a [63-4] porque las razones σ_x/σ_n, σ_y/σ_n, σ_z/σ_n son los cosenos directores n_1, n_2, n_3 de la dirección **n**.

Por tanto, el conjunto de tensiones $\mathbf{t}_n$ correspondientes a todas las direcciones **n** en el punto que se estudia del cuerpo considerado puede sintetizarse mediante el concepto matemático de *tensor* **T**. El estado de tensión en cada punto está caracterizado por la matriz $\{t_{hi}\}$ de las coordenadas del tensor **T**, siendo $\{t_{h1}\}$ las componentes de $\mathbf{t}_x$, $\{t_{h2}\}$ las de $\mathbf{t}_y$, y $\{t_{h3}\}$ las de $\mathbf{t}_z$. Esta matriz define la correspondencia vectorial o función lineal [63-4].

En Estática se demuestra que en el caso de que el tensor **T** se refiera al estado elástico de un cuerpo, la matriz correspondiente es simétrica, es decir

[63-9] $$t_{ih} = t_{hi} .$$

En este caso el tensor se llama *simétrico*. Si los elementos conjugados t_{hi} y t_{ih} de la matriz $\{t_{hi}\}$ son iguales y de signos contrarios y en consecuencia los elementos de la diagonal principal son nulos, el tensor se llama *antisimétrico* o *hemisimétrico*. Veremos (§ 63-2, *a*) que estas propiedades son *invariantes* respecto de las transformaciones ortogonales.

2. Operaciones. Tensores especiales y de rango mayor. — *a*) Si los tensores **A** y **B** de matrices $\{a_{ik}\}$ y $\{b_{ik}\}$ dan en la dirección **u** los vectores $\mathbf{a}_u$ y $\mathbf{b}_u$, llamaremos *suma* **A** + **B**, y *producto por un escalar* $\lambda\mathbf{A}$ a los tensores que dan en la dirección **u** los vectores $\mathbf{a}_u + \mathbf{b}_u$ y $\lambda\mathbf{a}_u$. Sus matrices de coordenadas son $\{a_{ik} + b_{ik}\}$ y $\{\lambda a_{ik}\}$, es decir, las que resultan de las correspondientes operaciones sobre matrices (§ 61-4, *b*).

Se define el *producto del tensor* **A** *por el vector* **x**, de dirección $x^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{u}$, como el vector **y** obtenido multiplicando el módulo x por el vector $\mathbf{a}_u$ de **A** correspondiente a la dirección **u**. Por tanto

[63-10] $$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x \,.\, \mathbf{a}_u = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 \ ,$$

teniendo el último miembro expresión análoga a un producto escalar de vectores. Si el vector **x** es unitario, $\mathbf{x} = \mathbf{u}$, recaemos en [63-4].

NOTA 1. Obsérvese que la expresión [63-10] es la misma que la [61-45] sustituyendo en ésta **i'**, **j'**, **k'**, por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ con la misma significación de transformadas de **i**, **j**, **k**. Por tanto, una expresión diádica representa exactamente lo mismo que un tensor doble. Ambos conceptos se identifican también con el de *operador lineal* que transforma todo vector **x** en otro **y** mediante la sustitución lineal

[63-11] $$y_i = \Sigma_j a_{ij} x_j \ , \quad (i = 1, 2, 3),$$

de matriz igual a la formada por las coordenadas del tensor **A** (§ 61-5, nota). Actualmente el concepto de tensor ha adquirido un significado mucho más general que el anterior (Cap. XXIII, nota III).

La simetría ($a_{ik} = a_{ki}$) o hemisimetría ($a_{ik} = -a_{ki}$) de la matriz de coordenadas de un tensor **A** son invariantes en transformaciones ortogonales, y entonces podemos definir los *tensores simétricos* y *hemisimétricos*.

En efecto, permutando en [63-7] i con h, y k con j, sólo se permutan los factores λ, de modo que los coeficientes de la transformación son los mismos para una matriz y su correspondiente, que para las traspuestas de ambas.

La descomposición [61-33] de matrices, prueba que *un tensor cualquiera puede siempre considerarse en forma unívoca como la suma de un tensor simétrico y uno hemisimétrico.* En todos los problemas de aplicación, esta descomposición tiene un significado físico notable; así, por ejemplo, en Elasticidad toda deformación infinitesimal puede considerarse como suma de una dilatación (representada por un tensor simétrico) y de una distorsión (representada por un tensor hemisimétrico).

b) El módulo de la suma es el tensor de matriz $\{0\}$; tal tensor hace corresponder a toda dirección el vector nulo **0**, y entonces:

Si un tensor tiene todas sus componentes nulas en un sistema de coordenadas, también son nulas en cualquier otro. Tal tensor de componentes nulas se llama *tensor nulo*.

La anulación de un tensor expresa, pues, una propiedad intrínseca, independiente del sistema de coordenadas, es decir, una propiedad *geométrica* si relaciona elementos geométricos, y una *ley natural* si relaciona elementos físicos. De aquí la importancia capital de descubrir tensores para expresar con ellos las propiedades geométricas y las leyes físicas. La Geometría diferencial y la Física matemática encuentran en el cálculo tensorial su instrumento más eficaz.

EJEMPLO 1. La curvatura total de una superficie viene expresada por un tensor; la anulación de éste caracteriza las superficies desarrollables sobre el plano. Este tensor de curvatura, aplicado al espacio-tiempo ha permitido a EINSTEIN formular su ley de gravitación.

c) El tensor más sencillo no nulo es el *tensor unidad* **I**, de matriz $\{\delta_{ik}\}$, que hace corresponder a cada versor el mismo; y recíprocamente, esta función identidad tiene su expresión en la matriz $\{\delta_{ik}\}$; como esta propiedad es intrínseca, independiente de las coordenadas, las componentes de este tensor en todo sistema de coordenadas son siempre las mismas.

Igual significado intrínseco tiene el tensor $-\mathbf{I}$, de diagonal -1, -1, -1, que hace corresponder a cada versor su opuesto. Tal tensor es, por ejemplo, el que representa el estado de tensión en el centro de una esfera comprimida por igual en todas direcciones; mientras que en el caso de tracción uniforme aparece el tensor de esfuerzos **I**.

Obsérvese que tiene carácter invariante la anulación de todas las componentes no principales cuando las principales son iguales, como acontece en estos dos casos: 1, 1, 1; -1, -1, -1, y más en general, a, a, a: en cambio, si éstas son a, b, c, aunque sean nulas todas las demás, al cambiar de coordenadas varían en general las nueve componentes, como se ve aplicando la fórmula [63-7].

d) Consecuencia muy importante de la ley de transformación [63-7] es esta igualdad

[63-12] $$a'_{11} + a'_{22} + a'_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \ ,$$

que puede enunciarse: *la suma de coordenadas principales de un tensor de segundo rango es invariante.*

En efecto, resulta de [63-7] haciendo $k = j$:

$$a'_{jj} = \Sigma_{ih}\lambda_{ji}\lambda_{jh}a_{ih} \ ,$$

y sumando respecto de j resulta por [61-7]:

$$\Sigma_j a'_{jj} = \Sigma_{ih}\delta_{ih}a_{ih} = \Sigma_i a_{ii} \, .$$

Esta operación que conduce a un escalar partiendo de un tensor doble se llama *contracción del tensor*. Generalizada convenientemente a los tensores de rango superior (§ 63-2, *f*) es muy importante en la teoría general.

NOTA 2. La nomenclatura de los autores alemanes, incluso EINSTEIN, es *Verjüngung* (rejuvenecimiento); la palabra contracción es la preferi-

da por los autores franceses; y los italianos, siguiendo a LEVI-CIVITA, llaman a esta operación *saturación de índices*.

Mientras esta operación rebaja el rango, y la suma lo conserva, veamos ahora cómo se logra, inversamente, construir tensores de rango tan alto como se quiera, partiendo de los vectores.

e) *Producto tensorial de vectores.* — Si se multiplican las componentes del vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ por las del vector $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ resultan nueve productos: $c_{ih} = a_i b_h$ que componen un tensor, pues en virtud de la fórmula de transformación [61-6] las nuevas componentes son

$$c'_{kj} = a'_k b'_j = (\Sigma_i \lambda_{ki} a_i)(\Sigma_h \lambda_{jh} b_h) = \Sigma_{ih} \lambda_{ki} \lambda_{jh} c_{ih} \quad ,$$

es decir, obedecen a la ley lineal [63-7]. Esta regla de multiplicación se llama *tensorial* o de GIBBS, y el resultado obtenido se enuncia así: *el producto tensorial de dos vectores es un tensor doble.*

He aquí desarrollados los dos productos de vectores **a** y **b**:

$$\{\mathbf{ab}\} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \; ; \; \{\mathbf{ba}\} = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{bmatrix}$$

observándose que son *tensores conjugados*, llamando así a los de matrices traspuestas (§ 61-4, *a*), y su diferencia es el tensor antisimétrico

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1b_2 - b_1a_2 & a_1b_3 - b_1a_3 \\ a_2b_1 - b_2a_1 & 0 & a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 & a_3b_2 - b_3a_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Salta a la vista que las tres componentes situadas a un lado de la diagonal principal son precisamente las que suelen tomarse como componentes del vector llamado *producto vectorial*; debiendo elegirse las de uno u otro lado de la diagonal, según sea el convenio adoptado para el sentido de dicho vector, convenio íntimamente ligado con el signo de la terna de vectores coordenados. Esta distinción entre triedros positivos y negativos es netamente intuitiva y no expresable algebraicamente.

Según la definición de vector, el citado producto vectorial no es un vector propiamente dicho, sino un *semi-tensor*; la figura que se conserva invariante es el par de vectores opuestos, en uno y otro sentido; pues si sólo se adopta uno de ellos, al tomar como nuevo triedro coordenado uno de sentido opuesto al anterior, dicho vector convencionalmente adoptado para representar el producto, se convierte en su opuesto.

Por el contrario, el producto escalar es invariante respecto de todo cambio de coordenadas ortogonales y aparece como suma de elementos principales del tensor **ab**, es decir, es el tensor (de rango 0) deducido de éste por la operación que hemos llamado *contracción*.

NOTA 3. Obsérvese que el producto $\{\mathbf{ba}\}$ de dos vectores, que es un tensor doble especial, coincide con la díada definida en § 61-5, nota. Por eso algunos autores llaman *díadas* a los tensores dobles. Esta denominación es de GIBBS pero aplicada al caso especial de producto de vectores. Su método consiste en descomponer cualquier tensor doble en suma de tales díadas (expresiones diádicas, § 61-5, nota). Por esa misma fecha

(1884) se ocupó el físico alemán VOIGT de los mismos conceptos, introduciendo el nombre de *tensor*, mientras que sus compatriotas han preferido el de *afinor*. En verdad el concepto de tensor como función vectorial lineal es de HAMILTON (1853). Su contemporáneo RIEMANN dió en 1854 las ideas capitales del moderno *Cálculo absoluto*, desarrollado por CHRISTOFFEL (1869) y sistematizado y completado por RICCI y LEVI-CIVITA en 1901.

EJEMPLO 2. TENSOR DE INERCIA. — Se llama tensor de inercia de un sistema de masas respecto del origen O, al que tiene por componentes principales los momentos de inercia respecto de los ejes y como componentes secundarios los momentos mixtos o centrífugos, con signo opuesto.

Suponiendo una sola masa unitaria en el punto x, y, z; $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, el tensor de inercia tiene la expresión

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{bmatrix}.$$

Que esta matriz define, en efecto, un tensor, resulta inmediatamente de la descomposición anterior, puesto que la matriz sustraendo representa el producto tensorial del vector $\mathbf{r}(x, y, z)$ por sí mismo, mientras el minuendo es el tensor unitario con el coeficiente numérico r^2; luego $\mathbf{J}$ es un tensor doble, diferencia de dos tensores: $\mathbf{J} = r^2\mathbf{I} - \{\mathbf{r}, \mathbf{r}\}$.

f) Así como definimos el tensor doble como función vectorial lineal de la dirección (§ 63-1, *b*), podemos considerar una correspondencia de *tensores* de segundo rango, respecto de las direcciones del espacio según una ley lineal homogénea en los cosenos directores de cada dirección. El conjunto de estos tensores, dependientes de tres tensores de segundo rango, es decir 9 vectores ó 27 escalares, se puede sintetizar en lo que se llama un *tensor de tercer rango*. En la misma forma se pasa a tensores de rango cualquiera.

La fórmula [63-1] nos dice que los *vectores* son los *tensores de rango uno* y por extensión los *escalares* se consideran *tensores de rango cero*; en todos los casos, es esencial en ellos su carácter absoluto, es decir, su invariancia respecto de las transformaciones ortogonales del espacio: así, un escalar es algo más que un número real; es la expresión de una magnitud que no depende del sistema de referencia.

3. **Forma bilineal correspondiente a un tensor.** — *a*) El tensor **A** hace corresponder a la dirección $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ el vector $\mathbf{a}_u$ de componentes $(\mathbf{a}_u)_h = \Sigma a_{hi} u_i$ [63-5'], que tiene por componente en la dirección del versor $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ el producto escalar

$$[63\text{-}13] \qquad \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{v} = \Sigma(\mathbf{a}_u)_h v_h = \Sigma a_{hi} v_h u_i = \mathrm{B}(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Esta forma bilineal es *invariante* respecto de las transformaciones ortogonales como lo muestra el primer miembro de [63-13]; puede servir también para definir el concepto de ten-

sor y es la forma más útil para introducir los tensores de rango superior (dependientes de tres o más índices).

b) En el caso de que la dirección **u** coincida con la dirección v, obtenemos la llamada *componente normal* o *valor* del tensor A en la dirección **u** dada por la forma cuadrática (§ 61-4, d_3):

$$[63\text{-}14] \qquad \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{u} = \Sigma a_{ih} u_i u_h = \mathrm{C}(\mathbf{u}).$$

Si **u** coincide con la dirección del eje coordenado x es $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$, y por tanto resulta que las *coordenadas principales* a_{11}, a_{22}, a_{33} son las *componentes normales* del tensor en las direcciones de los ejes. En cambio las otras coordenadas a_{12}, a_{13}, ..., *no* son componentes del tensor, aunque sí lo son de los vectores coeficientes en [63-4], y sólo en este sentido puede usarse la palabra componente aplicada a ellas. (Algunos autores designan las coordenadas del tensor por la palabra "componentes", siendo en este caso útil la observación anterior). Obsérvese que la componente [63-14] es la *misma* en sentidos *opuestos*; en cambio las componentes [63-5] del vector $\mathbf{a}_u$ difieren en el signo para sentidos opuestos.

Se llama *componente tangencial* del tensor correspondiente a la dirección **u** a la proyección del vector $\mathbf{a}_u$ sobre el plano normal a la dirección **u**.

Un *tensor simétrico* tiene por forma cuadrática correspondiente la

$$[63\text{-}15] \qquad \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{u} = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + + 2a_{23}u_2u_3 + 2a_{31}u_3u_1 \quad ,$$

que como [63-13] es *invariante* respecto de las transformaciones ortogonales.

El valor $\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{u}$ de un tensor en una dirección, por estar dado por una forma cuadrática, es el mismo que el de su componente simétrica en la descomposición de § 61-4, *b* (ver § 63-2, *a*).

EJEMPLO. El concepto de valor de un tensor en una dirección muestra el significado del tensor de inercia J (§ 63-2, ejemplo 2), pues llamando q al segmento de proyección de $\mathbf{r} = \mathrm{OP}$ sobre el eje **e** arbitrariamente trazado por O, y d a la distancia del extremo P de $\mathbf{r} = \mathrm{OP}$ hasta el eje, el valor de J en esa dirección **e** es

$$a = r^2 - q^2 = d^2.$$

Por tanto, la intensidad o valor del tensor J en cada dirección **e** es precisamente el momento de inercia de la masa unitaria respecto de ese eje.

Consideremos ahora en lugar de una masa única todo un sistema de masas m_i en los puntos (x_i, y_i, z_i) respectivamente $(i = 1, 2, \ldots, n)$, el tensor de inercia es la suma de los n tensores correspondientes a las diversas masas y su valor en cada dirección es, por tanto, el momento de inercia respecto de ella.

4. Cuádrica de un tensor simétrico. — Si en la dirección **u** y a partir del origen de coordenadas O llevamos un segmento OP tal que

$$[63\text{-}16] \qquad \frac{1}{\mathrm{OP}} = +\sqrt{|\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{u}|} \quad ,$$

entonces las coordenadas

$$[63\text{-}17] \qquad x = \mathrm{OP} \cdot u_1 \quad , \quad y = \mathrm{OP} \cdot u_2 \quad , \quad z = \mathrm{OP} \cdot u_3$$

del conjunto de los puntos P correspondientes a todas las direcciones **u** en uno y otro sentido verifican, en virtud de [63-15] la ecuación

$$[63\text{-}18] \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = \pm 1 \quad ,$$

es decir, están respectivamente para cada valor del primer miembro en una cuádrica con centro (§ 62-1, *d*), obteniendo así la llamada *superficie directriz* o *elipsoide del tensor*, porque en muchos casos la naturaleza física del tensor simétrico permite asegurar que la superficie [63-18] es un elipsoide (tal el elipsoide de inercia, correspondiente al tensor de inercia), lo que en general no siempre ocurre. La superficie [63-18] es la misma, cualquiera que sea el sistema ortogonal de referencia de centro O, y sus propiedades están íntimamente relacionadas con las del tensor simétrico correspondiente. Si el segundo miembro de [63-18] conserva el mismo signo para todo valor de x, y, z (entonces se dice que la forma cuadrática es *definida*, § 63-7, *a*) habrá que tomar +1 ó —1 según aquel signo para obtener un elipsoide real (§ 62-2), corresponde al caso en que $\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{u}$ conserva el mismo signo para cualquier dirección **u** del espacio. Si la forma cuadrática es indefinida, entonces [63-18] existe tanto para +1 como para —1, y se obtienen dos hiperboloides de una y de dos hojas con el mismo centro y cono asintótico (§ 62-2, *b* y *c*). Dicho cono asintótico es el lugar geométrico de las direcciones según las cuales el valor del tensor es nulo.

NOTA. Las componentes [63-5] del vector $\mathbf{a}_u$ son la mitad de las derivadas del primer miembro de [63-18] para el punto impropio $[u_1, u_2, u_3]$, parámetros directores de la normal al plano tangente de la superficie directriz en el punto en el que incide sobre ésta su diámetro de dirección **u**; por tanto $\mathbf{a}_u$ es normal a dicho plano tangente.

5. Forma canónica en el grupo ortogonal. Autovalores y autovectores. — *a*) Veremos que en el campo real *mediante una elección conveniente de un sistema ortonormal de coordenadas puede lograrse que la matriz de un tensor simétrico tenga elementos no nulos sólo en la diagonal principal.* En otras

palabras, mediante una transformación del grupo ortogonal O_n (§ 61-7, *b*) puede llevarse el tensor, o su matriz, a una forma especialmente sencilla que llamaremos *forma canónica en el grupo ortogonal* (o en ejes ortogonales). Para que ello ocurra, el versor correspondiente a un eje de coordenadas a elegir debe ser paralelo a ese eje (§ 63-1, nota 2), y entonces hay que buscar las direcciones **u** tales que

$$[63\text{-}19] \qquad \mathbf{Au} = \mathbf{a}_u = \lambda \mathbf{u}.$$

Todo vector no nulo **x**, tal que su versor $\mathbf{u} = x^{-1}\mathbf{x}$ verifique [63-19], se llama *autovector* o *vector propio* del tensor A (y de la correspondiente matriz). El número λ se llama *autovalor* o *valor propio* correspondiente a la *dirección propia* **u**.

Comencemos por hallar los autovalores. Reemplazando en [63-19] la expresión [63-4] de $\mathbf{a}_u$ y proyectando sobre los ejes de coordenadas, resulta

$$[63\text{-}20] \qquad \Sigma a_{ji} u_i = \lambda u_j ,$$

con lo que tenemos (limitándonos a tres dimensiones porque todo es igual en $\mathbf{E}_n$) el sistema lineal homogéneo en u_1, u_2, u_3

$$[63\text{-}21] \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda) u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3 = 0 \\ a_{21} u_1 + (a_{22} - \lambda) u_2 + a_{23} u_3 = 0 \\ a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + (a_{33} - \lambda) u_3 = 0 , \end{array} \right.$$

el cual tendrá soluciones (fuera de la trivial $u_i = 0$, § 15-6), cuando y sólo cuando

$$[63\text{-}22] \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Esta ecuación da los valores propios; se la llama *ecuación secular* (por su aplicación al problema astronómico de las perturbaciones seculares) y también "ecuación de LAGRANGE para las frecuencias" (por su aplicación al problema de las pequeñas oscilaciones en los sistemas conservativos). Su primer miembro se llama *polinomio característico.*

Una vez hallados los autovalores λ mediante la ecuación [63-22], la resolución del sistema [63-21] da los correspondientes autovectores.

La existencia de la forma canónica en el grupo ortogonal para un tensor simétrico real quedará demostrada probando las dos propiedades siguientes:

a_1) *Dos autovectores* **u**, **v** *correspondientes a autovalores* λ, μ *distintos, son ortogonales.*

Con la notación matricial (§ 61-4, *d*) usando matrices vectoriales, tenemos:

$$\mathbf{AU} = \lambda \mathbf{U} \quad , \quad \mathbf{AV} = \mu \mathbf{V} \quad , \quad (\lambda \neq \mu) \quad ,$$

y el producto escalar de los autovectores es, por ser $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$:

$$\mathbf{U'V} = \frac{1}{\mu} \mathbf{U'AV} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{AU})'\mathbf{V} = \frac{\lambda}{\mu} \mathbf{U'V}$$

de donde resulta, por ser $\lambda/\mu \neq 1$, $\mathbf{U'V} = 0$.

a_2) *En toda matriz simétrica, la ecuación secular tiene sus raíces (autovalores) reales.*

Si hubiera una raíz no real λ, le correspondería un autovector de componentes complejas (u_1, u_2, u_3) no nulo, y también sería raíz (§ 18-2) la conjugada $\overline{\lambda}$, con autovector $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$. Por a_1 se tendría

$$u_1\overline{u}_1 + u_2\overline{u}_2 + u_3\overline{u}_3 = |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 = 0 \quad ,$$

o sea $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ contra lo dicho.

b) Consideremos con más detalle, y en cualquier número de dimensiones (ver notas I y II), la transformación ortogonal que lleva la matriz simétrica A a la forma canónica diagonal. Esto nos mostrará también lo que ocurre cuando hay raíces múltiples de la ecuación secular.

La forma cuadrática **U'AU**, mediante la transformación ortogonal $\mathbf{U} = \mathbf{SV}$ (S matriz ortogonal: $\mathbf{SS'} = \mathbf{I}$, ó $\mathbf{S'} = \mathbf{S}^{-1}$), se transforma en la forma cuadrática (en las v_k)

$$(\mathbf{SV})'\mathbf{A}(\mathbf{SV}) = \mathbf{V}'(\mathbf{S'AS})\mathbf{V} \quad ,$$

por cuya razón toda matriz **S'AS** (S ortogonal), se llama *congruente* de A en el grupo ortogonal O_n.

Tomando un autovector $\mathbf{u}^{(1)}$ correspondiente a un autovalor λ_1 como primer vector del nuevo sistema de coordenadas, tendremos llamando S a la matriz del cambio de ejes:

$$[63\text{-}23] \qquad \mathbf{S'AS} = \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots\cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots\cdots & a'_{nn} \end{array} \right\}$$

siendo esta matriz simétrica, pues $(\mathbf{S'AS})' = \mathbf{S'A'(S')'} = \mathbf{S'AS}$. La matriz simétrica $\{a'_{ik}\}$ se transforma de igual manera por cambio de ejes en el correspondiente espacio de $n-1$ dimensiones $\mathbf{E}_{n-1}$.

La ecuación secular es la misma de la matriz **S'AS**, es decir:

$$(\lambda - \lambda_1) \begin{vmatrix} a'_{22} - \lambda & \cdots\cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n2} & \cdots\cdots & a'_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

de modo que si λ_1 fuera raíz múltiple, será un cero del segundo factor, y entonces habrá también un autovector $\mathbf{u}^{(2)}$ en $\mathbf{E}_{n-1}$. Mediante nueva rotación "alrededor" de $\mathbf{u}^{(1)}$, es decir que deje fijo este eje, y lleve el segundo a $\mathbf{u}^{(2)}$, etc., se llega a una matriz diagonal, es decir con ceros fuera de la diagonal principal, siendo esta diagonal de la forma

$$\overbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}^{n_1}, \overbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}^{n_2}, \ldots, \overbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}^{n_s} .$$

La ecuación secular queda en la forma

$$[63\text{-}24] \qquad P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} = 0.$$

Esta reducción es única salvo el orden; no así los ejes cuando hay un autovalor múltiple, por ejemplo λ_1, pues si $\mathbf{u}^{(1)}$ y $\mathbf{u}^{(2)}$ son autovectores, lo es toda combinación lineal $\alpha\mathbf{u}^{(1)} + \beta\mathbf{u}^{(2)}$, como se ve a partir de $\mathbf{Au}^{(1)} = \lambda_1\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{Au}^{(2)} = \lambda_1\mathbf{u}^{(2)}$, de modo que se obtienen *subespacios propios* $E_{n_1}, \ldots, E_{n_s}$. Los vectores de dos subespacios propios distintos son perpendiculares por a_1, y en cada E_{n_k} se pueden tomar sistemas de vectores ortogonales, de infinitas maneras si $n_k > 1$ (ver nota II, *c*).

6. Invariantes de un tensor simétrico. — Por el significado intrínseco (§ 63-1) de [63-19] son *invariantes* los *autovalores*, y por tanto los coeficientes del polinomio característico $P(\lambda)$, (cfr. ejerc. 11). Limitándonos a tres dimensiones tendremos (§ 63-5, *a*)

$$[63\text{-}25] \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3$$

con los invariantes (*lineal, cuadrático* y *cúbico*):

$$[63\text{-}26] \quad \begin{cases} J_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \;, \\ J_2 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}^2 - a_{23}^2 - a_{31}^2 \;, \\ J_3 = \det\{a_{ik}\} \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Como (§ 63-5, *b*) la multiplicidad de un autovalor da la dimensión del subespacio propio correspondiente, son invariantes no solamente los autovalores, sino también sus respectivos órdenes de multiplicidad.

NOTA. El invariante J_1 ya se halló en § 63-2, *d*. Del mismo tipo es el invariante J_2, pues puede expresarse también mediante $J_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$, donde α_{ik} es el complemento algebraico o adjunto (§ 13-4, *a*) de a_{ik} en el determinante $A_{44} = J_3$.

7. Signo de una forma cuadrática. — *a*) Por lo visto en § 63-5, una forma cuadrática n-aria

$$[63\text{-}27] \qquad F = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \;,$$

se puede llevar, eligiendo los ejes de coordenadas ortonormales coincidiendo con las direcciones propias de la matriz $A = \{a_{ik}\}$, a la *forma canónica diagonal*

$$[63\text{-}28] \qquad F = \Sigma a'_{ii}x_i^2 \;,$$

donde los a'_{ii} son los autovalores, y entonces están caracterizados (salvo el orden) por la matriz $A = \{a_{ik}\}$.

En el campo real es de importancia fundamental el estudio

de los signos que puede tomar una forma cuadrática F. Si es $F > 0$ (ó $F < 0$) para todo sistema de valores no simultáneamente nulos de los x_i, la forma F se llama *definida positiva* (o *negativa*). Si en las mismas condiciones es $F \geqslant 0$ ($F \leqslant 0$), siendo $F = 0$ para algún sistema de valores no simultáneamente nulos de los x_i, la forma F se llama *semidefinida positiva* (*negativa*). Si F toma valores positivos y valores negativos se llama *indefinida*. La ubicación de la forma en una de estas clases es inmediata si se conoce su forma canónica diagonal, pues entonces

1) *La forma* F *es definida positiva* (*negativa*) *si y sólo si todos sus valores propios son positivos* $a'_{ii} > 0$ (*negativos* $a'_{ii} < 0$).

2) *La forma* F *es semidefinida positiva* (*negativa*) *si todos los valores propios son* $a'_{ii} \geqslant 0$ ($a'_{ii} \leqslant 0$), *habiendo por lo menos uno igual a cero.*

En el segundo caso es $\det A = \Pi a'_{ii} = 0$ y la forma se llama *degenerada* (cfr. §§ 61-5 y 62-5), de modo que *sólo las formas cuadráticas degeneradas pueden ser semidefinidas.*

b) La discusión de signos de la forma cuadrática n-aria [63-27] hecha en *a*, tiene el inconveniente de exigir el cálculo de los autovalores, raíces de una ecuación de grado n

$$[63\text{-}29] \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Más útiles son los criterios dados directamente en términos de los coeficientes a_{ik} de la forma, tal el siguiente teorema, cuya aplicación sólo exige el cálculo de los determinantes

$$[63\text{-}30] \qquad H_q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rq} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qq} \end{vmatrix} \;, \quad (q = 1, 2, \ldots, n).$$

TEOR. 1. *Condición necesaria y suficiente para que la forma cuadrática* [63-27] *sea definida positiva, es que se cumpla*

$$[63\text{-}31] \qquad H_1 > 0 \;, \; H_2 > 0 \;, \ldots, \; H_n > 0.$$

Para $n = 1$ el teorema es evidente. Bastará entonces (§ 2-2, *b*) demostrarlo para la forma n-aria [63-27] *suponiéndolo cierto para formas* $(n-1)$*-arias*. Si [63-27] es definida positiva es $a_{11} > 0$, y se tiene la identidad.

$$[63\text{-}32] \quad F = a_{11}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_1\right)^2 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{r,\,s=2}^{n} (a_{11}a_{rs} - a_{1r}a_{1s})\, x_r x_s =$$

$$= a_{11}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_1\right)^2 + G(x_2, \ldots, x_n),$$

siendo la forma en menos variables G también definida positiva, pues para cualesquiera $x_2, \ldots, x_n$ podemos determinar siempre un valor de x_1 que anule el primer término del último miembro de la identidad anterior, con lo que si G dejare de ser positiva, lo mismo se podría lograr para F. Recíprocamente, si es $a_{11} > 0$ y G definida positiva,, también lo es F. Pero en virtud de la hipótesis hecha, será G definida positiva si y sólo si son positivos los determinantes $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$, análogos para G a los de [63-30]. Para completar la demostración del teorema basta verificar que, teniendo en cuenta la forma de los coeficientes de G, se tiene:

$$H_2 = K_1 \quad , \quad H = \frac{1}{a_{11}} K_2 \,, \quad \ldots \quad , \quad H_n = \frac{1}{a_{11}^{\,n-2}} K_{n-1}.$$

Para ello multipliquemos en H_q $(q > 1)$ las columnas s, $(s = 2, 3, \ldots, q)$ por a_{11} y del resultado restemos la columna 1 respectivamente multiplicada por a_{1s}, $(s = 2, 3, \ldots, q)$,

$$H_q = \frac{1}{a_{11}^{\,q-1}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} \ldots & a_{11}a_{1s} - a_{11}a_{1s} \ldots & a_{11}a_{1q} - a_{11}a_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & a_{11}a_{r2} - a_{1r}a_{12} \ldots & a_{11}a_{rs} - a_{1r}a_{1s} \ldots & a_{11}a_{rq} - a_{1r}a_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1q} & a_{11}a_{q2} - a_{1q}a_{12} \ldots & a_{11}a_{qs} - a_{1q}a_{1s} \ldots & a_{11}a_{qq} - a_{1q}a_{1q} \end{vmatrix}$$

y desarrollando por los elementos de la primera fila se obtiene

$$H_q = K_{q-1}/a_{11}^{\,q-2} \quad , \quad (q = 2, 3, \ldots, n).$$

Cambiando el signo de todos los coeficientes queda demostrado también el corolario siguiente:

COR. *Condición necesaria y suficiente para que la forma cuadrática* [63-27] *sea definida negativa es que se cumpla:*

$$[63\text{-}33] \quad H_1 < 0, \quad H_2 > 0, \quad H_3 < 0, \quad \ldots, \quad (-1)^n H_n > 0.$$

c) Útil entre otras cosas para el estudio de los signos de una forma cuadrática real es una sencilla forma canónica en el grupo lineal L_n de las transformaciones lineales biunívocas (§ 61-7, *a*):

TEOR. 2. 1º) *En el campo real, toda forma cuadrática n-aria* [63-27] *puede reducirse por una transformación lineal biunívoca de las variables a la forma*

$$[63\text{-}34] \quad F = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_h^2 \quad ;$$

2º) *El número h de términos en* [63-34] *es igual a la característica de la matriz* $\{a_{ik}\}$ *de coeficientes de F y por lo tanto invariante;*

3º) *El número p de términos positivos en* [63-34] *es un invariante (llamado índice de inercia) de la forma F, es decir, depende de F pero no del método usado para reducirla a la forma* [63-34]. (*Ley de inercia de* SYLVESTER).

DEM. 1º) Excluyendo el caso trivial en que la forma cuadrática *n*-aria dada por [63-27] sea idénticamente nula $(a_{ik} = 0)$, podemos considerar dos casos:

1_1) Existe un $a_{ii} \neq 0$. Podemos suponer que es $a_{11} \neq 0$; entonces, por la identidad [63-32], poniendo

$$y_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i\right) \Big/ \sqrt{|a_{11}|} \;,$$

se tiene

$$F = y_1^2 \operatorname{sg} a_{11} + G \;,$$

siendo G una forma cuadrática, a lo más $(n-1)$-*aria*, que no contiene a x_1.

1_2) Si para todo i es $a_{ii} = 0$, habrá un $a_{ik} \neq 0$. Podemos suponer que es a_{12}; poniendo

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2\,|a_{12}|}} \left[a_{12}(x_1 + x_2) + \sum_{i=3}^{n} (a_{i2} + a_{i1})\, x_i \right]$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2\,|a_{12}|}} \left[a_{12}(x_1 - x_2) + \sum_{i=3}^{n} (a_{i2} - a_{i1})\, x_i \right] ,$$

se verifica que la forma cuadrática $H = F - (\eta_1^2 - \eta_2^2) \operatorname{sg} a_{12}$ no contiene x_1 ni x_2.

Si en el caso 1_1 ó 1_2 la forma cuadrática en menos variables G ó H no es idénticamente nula, le será aplicable uno de esos casos 1_1 ó 1_2, y prosiguiendo así se lleva F a una expresión de la forma [63-34].

2º) Ver § 61-6, nota.

3º) Supongamos que conjuntamente con [63-34] hubiera otra forma reducida

$$[63\text{-}35] \quad F = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - \ldots - y_h^2 \,,$$

con $q \neq p$, por ejemplo $q < p$. Como ambas resultan de [63-27] por transformaciones lineales biunívocas, existe una transformación lineal biunívoca que lleva [63-34] a [63-35]. Interpretándola como un cambio de coordenadas (punto de vista *alias*, § 61-2, *a*), [63-34] y [63-35] dan el valor T(x) de la misma forma cuadrática para un vector fijo **x**, con coordenadas z_i en una base e y_i en otra.

Será:

$$F(x) \geqslant 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq 0 \text{ tal que } z_{p+1} = \ldots = z_h = 0 \qquad (*)$$

$$F(x) < 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq 0 \text{ tal que } y_1 = \ldots = y_q = y_{h+1} = \ldots = y_n = 0 \; (**).$$

Las igualdades (*) y (**) definen subespacios vectoriales (nota I, a_6) de E_n; S_1 de dimensión $n - (h - p)$, S_2 de dimensión $n - (n - h) - q = h - q$. Como la suma de dimensiones es $n + p - q > n$, S_1 y S_2 tienen un vector $\mathbf{x} \neq 0$ común (de lo contrario habría más de n vectores

linealmente independientes en E_n) y para ese **x** resulta: $F(x) \geqslant 0$, $F(x) < 0$, lo que no es posible.

EJEMPLO. (Cfr. § 62, ejercicios 8 y 9). Clasificar mediante el método de completar cuadrados, la cuádrica:

$$x^2 + 3y^2 - 4xy - 2yz + 2x - 4y + 3 = 0.$$

Sacando x factor común y completando el cuadrado, se transforma así:

$$x^2 - 2x(2y-1) + 3y^2 - 2yz - 4y + 3 = 0 ,$$
$$(x - 2y + 1)^2 - y^2 - 2yz + 2 = 0 ,$$

y formando cuadrado con los términos en y, z, dan: $-(y+z)^2+z^2$.

La cuádrica es un hiperboloide de dos hojas (§ 62-2, *d*), pues su ecuación reducida es $X^2 - Y^2 + Z^2 + 2 = 0$, referida al triedo no ortogonal:

$$x - 2y + 1 = 0 \quad , \quad y + z = 0 \quad , \quad z = 0.$$

d) Consecuencia inmediata de las definiciones dadas en *a* es el siguiente teorema:

TEOR. 3. *En el campo real, el carácter de una forma cuadrática n-aria en cuanto a su anulación y sus signos, queda determinado por sus invariantes en L_n, p (índice de inercia) y h (característica), de acuerdo con el siguiente cuadro:*

$$h = n \begin{cases} 0 = p, & \text{definida negativa} \\ 0 < p < h, & \text{indefinida} \\ p = h, & \text{definida positiva} \end{cases}$$

$$h < n \begin{cases} 0 = p, & \text{semidefinida negativa} \\ 0 < p < h, & \text{indefinida} \\ p = h, & \text{semidefinida positiva.} \end{cases}$$

NOTA. Con la *signatura* $s = 2p - h$ (número de términos positivos menos número de términos negativos en [63-34]), la clasificación anterior puede presentarse así:

$|s| = h = n$, *definida (positiva si $s > 0$, negativa si $s < 0$)*;

$|s| = h < n$, *semidefinida (positiva si $s > 0$, negativa si $s < 0$)*;

$|s| < h \leqslant n$, *indefinida.*

8. **Ecuaciones normales de las cuádricas.** — En la ecuación [62-1] de una cuádrica, la forma cuadrática ternaria formada por los términos de segundo grado, que llamaremos F_3 (y que resulta haciendo $t = 0$ en [62-2]), caracteriza la intersección de la cuádrica con el plano impropio. La ecuación [62-1] puede llevarse a formas reducidas calculando previamente los invariantes J_1, J_2, J_3 (de F_3), y $A = \det\{a_{ik}\}$ (§ 62-5, nota 1).

Ya hemos visto que la anulación de A (discriminante de la cuádrica) caracteriza las cuádricas degeneradas (§ 62-5, *a*) y la de $J_3 = A_{44}$ las cuádricas sin centro (§ 61-1, *d*). Partiremos justamente de $J_3 = A_{44}$ para distinguir dos casos:

a) *Cuádricas con centro*: $A_{44} \neq 0$. — La ecuación puede llevarse por una traslación (§ 62-1, *d*) y una rotación (§ 63-5) a la forma

$$[63\text{-}36] \qquad a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + a'_{44} = 0 \ ,$$

referida a sus *ejes principales*.

Para calcular los coeficientes basta identificar los invariantes [63-26] calculados a partir de [62-1] formando el polinomio característico, con los obtenidos de [63-36], lo que da el sistema de ecuaciones

$$[63\text{-}37] \qquad \begin{cases} a'_{11} + a'_{22} + a'_{33} = J_1 \\ a'_{11}a'_{22} + a'_{22}a'_{33} + a'_{33}a'_{11} = J_2 \\ a'_{11}a'_{22}a'_{33} = A_{44} \\ a'_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44} = A. \end{cases}$$

Las dos últimas dan $a'_{44} = A/A_{44}$, y las tres primeras muestran que los tres primeros coeficientes de [63-36] son los autovalores λ_1, λ_2, λ_3, soluciones de [63-22]. Entonces la ecuación de la cuádrica referida a sus ejes es:

$$[63\text{-}38] \qquad \lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \lambda_3Z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0.$$

NOTAS: 1. Para situar los nuevos ejes respecto de los antiguos se calculan sus parámetros directores mediante el sistema homogéneo [63-21], para cada uno de los valores de λ que resultan de la ecuación secular [63-22]. Si estas raíces (valores propios) son distintas, habrá *tres* ejes (§ 63-5, a_2), si hay raíces coincidentes habrá infinitos ejes (§ 63-5, *b*); ello ocurre en las cuádricas de revolución.

2. Comparando [63-21] y [63-22] con ejercicio 7, se ve que cada eje es normal a un plano principal, lo que resulta evidente en la forma reducida de la ecuación. Si la cuádrica no es de revolución hay *tres* planos principales que se cortan dos a dos según los ejes, si es de revolución hay infinitos (cfr. ejercicio 8).

b) *Cuádricas sin centro*: $A_{44} = 0$. — Vimos en § 62-3, *a*, que la ecuación puede llevarse a la forma [62-16]. Por una rotación alrededor del eje z puede hacerse desaparecer el término en xy (§ 63-5) y queda en los nuevos ejes la ecuación en la forma

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + 2a'_{34}Z = 0.$$

De aquí se obtiene como en *a* por comparación de invariantes el sistema de ecuaciones

$$[63\text{-}39] \qquad a'_{11} + a'_{22} = J_1, \quad a'_{11}a'_{22} = J_2, \quad -a'_{11}a'_{22}a'^2_{34} = A.$$

Las dos últimas dan $a'_{34} = \pm\sqrt{-A/J_2}$, y las dos primeras muestran que a'_{11}, a'_{22} son las raíces no nulas λ_1, λ_2 de la ecuación que resulta anulando [63-25], siendo la otra $\lambda_3 = 0$ por

ser $J_3 = A_{44} = 0$. Entonces la ecuación de la cuádrica (paraboloide) es:

$$[63\text{-}40] \qquad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 X^2 \pm 2\sqrt{-A/J_2}\, Z = 0.$$

NOTA 3. Para situar los nuevos ejes respecto de los antiguos se calculan ante todo sus parámetros directores mediante el sistema homogéneo [63-21], para cada una de las raíces λ_1, λ_2, $\lambda_3 = 0$ de [63-22]. A esta última corresponde la dirección del único eje de la cuádrica.

Conocidas las direcciones de los nuevos ejes de coordenadas, falta determinar el origen. Como éste es la intersección (propia) de la cuádrica con su eje, es mejor seguir este otro camino que determina el eje de la cuádrica y no sólo su dirección: Como la forma de la ecuación reducida [63-40] muestra que el eje es intersección de planos principales (dos si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, infinitos si $\lambda_1 = \lambda_2$), calculados para cada valor propio λ_1, λ_2, los parámetros $l = u_1$, $m = u_2$, $n = u_3$, se tiene por ejercicio 7, para cada uno la ecuación de un plano diametral (principal), y la intersección de ambos da el eje.

Los otros dos ejes de coordenadas serán los trazados por el origen, perpendicularmente a cada plano principal si hay dos ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), o bien si hay infinitos planos principales ($\lambda_1 = \lambda_2$), dos ejes cualesquiera perpendiculares al eje de la cuádrica y entre sí.

9. **Clasificación de las cuádricas.** — *a*) Al escribir en el apartado precedente las ecuaciones normales de las cuádricas *con* y *sin* centro hemos hecho una primera clasificación en base a un invariante $A_{44} = J_3$. Veremos cómo esta clasificación puede proseguirse, utilizando solamente invariantes: J_2, $J_3 = A_{44}$, A, y las raíces λ_1, λ_2, λ_3 de la ecuación secular, todos ellos fácilmente calculables a partir de los coeficientes a_{ik} de la ecuación general de la cuádrica, lo que permite ubicar ésta en el tipo correspondiente.

a_1) $A_{44} \neq 0$: cuádricas con centro. En virtud de la ecuación normal [63-38] tendremos por § 62-2, *a*, la siguiente clasificación, que abarca todos los casos posibles salvo el orden de los valores propios λ_i, pues $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = A_{44}$, y entonces, por ejemplo $\operatorname{sg}(\lambda_1 A_{44}) = \operatorname{sg}(\lambda_2\lambda_3)$:

$0 \neq \operatorname{sg} A_{44} = \operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2 = \operatorname{sg}\lambda_3$:
- $A > 0$, *elipsoide imaginario.*
- $A = 0$, *cono imaginario.*
- $A < 0$, *elipsoide real.*

$0 \neq \operatorname{sg} A_{44} = \operatorname{sg}\lambda_1 \neq \operatorname{sg}\lambda_2 = \operatorname{sg}\lambda_3 \neq 0$:
- $A > 0$, *hiperboloide de una hoja.*
- $A = 0$, *cono real.*
- $A < 0$, *hiperboloide de dos hojas.*

a_2) $A_{44} = 0$: cuádricas sin centro. En virtud de la ecuación normal [63-40] tendremos (§ 62-3, *b*) los siguientes casos, únicos posibles por [63-39], salvo el orden de los λ_i:

$\operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2 \neq 0 = \lambda_3 = A_{44}$:
- $A < 0$, *paraboloide elíptico.*
- $A = 0$, *cilindro elíptico (o imaginario).*

$0 \neq \operatorname{sg}\lambda_1 \neq \operatorname{sg}\lambda_2 \neq 0 = \lambda_3 = A_{44}$:
- $A > 0$, *paraboloide hiperbólico.*
- $A = 0$, *cilindro hiperbólico.*

$\lambda_1 \neq 0 = \lambda_2 = \lambda_3 = A_{44} = A$, *cilindro parabólico.*

El examen de las clasificaciones precedentes muestra que las cuádricas con discriminante A positivo son imaginarias o regladas, mientras que aquellas con $A < 0$ son reales no regladas. Entonces: *una cuádrica real no degenerada es reglada o no según que su discriminante sea positivo o negativo.*

b) La clasificación también puede hacerse usando solamente los invariantes J_1, J_2, $J_3 = A_{44}$ y A, lo que tiene la ventaja de no tener que resolver la ecuación secular [63-22], o sea

$$[63\text{-}41] \qquad \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0.$$

En efecto, como todas las raíces de [63-41] son reales (§ 63-5, a_2), resulta del teorema de HARRIOT - DESCARTES (§ 41-9) que hay tantas raíces λ_i positivas como variaciones de signo en la sucesión de coeficientes $1, -J_1, J_2, -J_3$, o sea como permanencias haya en la sucesión $1, J_1, J_2, J_3 = A_{44}$. Examinando todos los casos posibles en *a* se llega a la siguiente clasificación de las cuádricas, aún degeneradas:

$A \neq 0$ No degeneradas:
- $A_{44} \neq 0$:
  - $J_2 > 0$ y $J_1 A_{44} > 0$: *Elipsoide*
    - $A > 0$: *imaginario*
    - $A < 0$: *real*
  - Otros casos: *Hiperboloides*
    - $A > 0$: *de una hoja*
    - $A < 0$: *de dos hojas*
- $A_{44} = 0$: *Paraboloides*
  - $A > 0$: *hiperbólico*
  - $A < 0$: *elíptico*

$A = 0$ Degeneradas (h = característica de **A**):
- $A_{44} \neq 0$: *Cono*
  - $J_2 > 0$ y $J_1 A_{44} > 0$: *imaginario*
  - Otros casos: *real*
- $A_{44} = 0$:
  - $h = 3$: *Cilindro* (Δ = menor princip.)
    - $J_2 > 0$:
      - $J_1\Delta > 0$: *imaginario*
      - $J_1\Delta < 0$: *elíptico real*
    - $J_2 = 0$: *parabólico*
    - $J_2 < 0$: *hiperbólico*
  - $h = 2$: *Par de planos distintos*
    - $J_2 > 0$: *imaginarios con arista real*
    - $J_2 = 0$: *paralelos distintos*
      - $J_1\Delta > 0$: *imaginarios*
      - $J_1 = 0$: *uno impropio*
      - $J_1\Delta < 0$: *reales propios*
    - $J_2 < 0$: *reales secantes*
  - $h = 1$: *Plano doble*
    - $J_1 \neq 0$: *propio*
    - $J_1 = 0$: *impropio*

NOTA. La clasificación anterior a esta última no incluye, en el caso de cuádricas degeneradas ($A = 0$), la distinción que resulta según la dimensión de la variedad de los puntos singulares, dada por la característica h de A, solución del sistema homogéneo obtenido anulando [62-22], dando un solo punto singular propio o impropio ($h = 3$) para conos o cilindros curvos y los casos en que los conos o cilindros degeneren a su vez en pares de planos distintos ($h = 2$) ya reales (paralelos o no) ya imaginarios (paralelos o no) o bien en planos coincidentes, es decir un plano doble real ($h = 1$) propio o impropio.

c) Para una cónica

[63-42] $$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}x + 2c_{23}y + c_{33} = 0 \quad ,$$

se hallan en forma análoga los *invariantes* (lineal, cuadrático y cúbico)

$$I = c_{11} + c_{22} \quad , \quad C_{33} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \quad , \quad C = \det. \{c_{ik}\} \quad ,$$

caracterizando $C = 0$ las cónicas que degeneran en pares de rectas, y $C_{33} = 0$ las cónicas sin centro.

Calculados estos invariantes en las formas normales de las cónicas con y sin centro:

$$c'_{11}x^2 + c'_{22}y^2 + c'_{33} = 0 \quad , \quad c'_{22}y^2 + 2c'_{13}x = 0 \quad ,$$

y considerando los posibles casos de degeneración en dos rectas, se obtiene la siguiente *clasificación de las cónicas*:

Cónicas con centro único, $C_{33} \neq 0$:

$C_{33} > 0$:
- $IC > 0$, *elipse imaginaria.*
- $IC < 0$, *elipse real.*
- $C = 0$, *dos rectas imaginarias no paralelas.*

$C_{33} < 0$:
- $C \neq 0$, *hipérbola.*
- $C = 0$, *dos rectas reales no paralelas.*

Cónicas sin centro único:

$C_{33} = 0$:
- $C \neq 0$, *parábola.*
- $C = 0$, *dos rectas paralelas* [*reales y distintas* (*si* $I = 0$, *una impropia*), *reales y coincidentes, o imaginarias, según que sea* C_{11} (*ó* C_{22}) < 0, $C_{11} = C_{22} = 0$, C_{11} (*ó* C_{22}) > 0].

EJERCICIOS

1. Un cuerpo sometido a deformación elástica sufre la acción de las tensiones (§ 63-1, *c*)

$$T_x = 5i + 2j - k \quad , \quad T_y = 2i + 4j - 3k \quad , \quad T_z = -i - 3j + 6k$$

sobre las secciones normales a los ejes x, y, z. Hallar la tensión T_n sobre la sección oblicua normal a $n = (1/3)i - (2/3)j + (2/3)k$, y el ángulo (T_n, n).

2. 1º) Descomponer el tensor A de componentes vectoriales

$$A_x = -3i + 2j - 4k \quad , \quad A_y = 5i - 4j + 2k \quad , \quad A_z = 7j - 6k$$

en uno simétrico A' y otro antisimétrico A''; 2º) Demostrar que todo tensor antisimétrico tiene todos sus vectores A_n paralelos a un plano (y hallarlo), y normales a las respectivas direcciones n; 3º) Comprobarlo en el A''.

3. Mediante la forma bilineal del tensor T del ejercicio 1, hallar la componente del vector T_n en la dirección $d = (2/7)i - (3/7)j + (6/7)k$.

4. Hallar las componentes normal y tangencial del tensor T en la dirección n (ejercicio 1), mediante la forma cuadrática de T.

5. 1º) Hallar la cuádrica directriz del tensor T (ejercicio 1) y referirla a sus ejes; 2º) Comprobar que el vector T_n (ejercicio 1) es normal a dicha cuádrica en el punto P que sobre ésta determina la semirrecta $r = tn$. $(t > 0)$.

6. Referir el tensor T de ejercicio 1 a sus direcciones principales y comprobar la invariancia de J_1, J_2, J_3.

7. Llamaremos *plano principal* de una cuádrica [62-2] a todo plano diametral perpendicular a la dirección de las cuerdas que biseca. Probar que una cuádrica tiene en general (ver ejercicio siguiente) *tres* planos principales (cfr. § 63-5); cada uno conjugado con la dirección de parámetros directores u_1, u_2, u_3 que verifican el sistema homogéneo [63-21] para los únicos valores de λ para los cuales hay soluciones fuera de $u_i = 0$ inadmisible, es decir, las raíces de [63-22].

8. Probar que: *a*) Si [63-22] no tiene raíces múltiples, hay como máximo *tres* planos principales (por § 63-5 hay *tres*); *b*) Si [63-22] tiene una raíz doble *puede haber* infinitos planos principales (*los hay* por § 63-5).

9. Sean $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = -\lambda$ los autovalores de un tensor. Hallar la superficie directriz, el lugar geométrico de las direcciones según las cuales el valor del tensor es nulo y el lugar y módulo de los vectores del tensor correspondientes a ellas.

10. Dados los autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ de un tensor, demostrar que la dirección cuyos cosenos directores respecto de las direcciones principales o propias del tensor son

$$\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_3)}, \quad 0, \quad \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)/(\lambda_1 - \lambda_3)}$$

tiene la propiedad de ser la línea de acción de la componente tangencial para cualquier plano que pase por ella.

11. Para una matriz cuadrada A simétrica o no, el *polinomio característico* $\det(A - \lambda I)$ es invariante en el grupo lineal L_n, es decir, para S regular del orden n de L_n, la matriz $S^{-1}AS$ *transformada* de A por S, tiene el mismo polinomio característico que A.

12. Para que dos matrices A y B sean transformadas una de otra en el grupo lineal (y también en el grupo ortogonal si A y B son simétricas) es necesario y suficiente que tengan los mismos polinomios característicos.

13. *a*) Si dos matrices son *conmutables* $AB = BA$, lo son sus transformadas por una misma matriz; *b*) Deducir de ejercicio 12 que para

que dos matrices simétricas con valores propios simples sean conmutables es necesario y suficiente que tengan iguales vectores propios.

14. Dado el tensor T de matriz $\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{Bmatrix}$; 1º) Hallar sus autovalores y autovectores buscando el vector unitario $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ que extrema la forma cuadrática $\mathbf{a}_u . \mathbf{u} = 2x^2 + 4xy - y^2$, y luego el vector unitario normal a **u** y con igual propiedad; 2º) Llevar la forma cuadrática a forma diagonal.

15. *a*) Verificar (con teor. 1 de § 63-7) que la forma cuadrática binaria $F(x, y) = 9x^2 + 12xy + 79y^2$ es definida positiva; ¿cuánto valen entonces la característica h y el índice de inercia p?; *b*) Llevar $F(x, y)$ a la forma [63-34].

16. Clasificar y reducir la cuádrica $y^2 + xy + xz - yz - 2y = 0$, determinando su centro y direcciones principales respecto de los ejes antiguos.

17. Clasificar y reducir el paraboloide $z = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + 10x - 5y + 2$, determinando las direcciones principales, el eje y el vértice, respecto de los ejes antiguos.

18. Clasificar y reducir el cono $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 8yz - 8zx + 2xy = 0$, determinando las direcciones principales respecto de los ejes antiguos.

NOTAS AL CAPÍTULO XVII

I. Bases de espacios vectoriales. Dualidad. — *a*) *Ejemplos*: a_1) Vimos en § 60-2, notas 1 y 2, que E_1, E_2 y E_3 son espacios vectoriales o lineales respecto del cuerpo de los números reales como coeficientes. En estos espacios, introducidos en Cap. II, nota III, *b*, el elemento fundamental no es el punto sino el vector, tomado como concepto primitivo (§ 1-7). La importancia de este punto de vista está señalada por las múltiples aplicaciones de los espacios vectoriales a diversas cuestiones de la Matemática y la Física.

a_2) Los conjuntos ordenados de números reales

[XVII-1] $$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{a_k\} ,$$

con las operaciones $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_k\} + \{b_k\} = \{a_k + b_k\}$, y $\lambda a = \{\lambda a_k\}$, constituyen un espacio vectorial de n dimensiones E_n (Cap. II, nota III) con la *base*

[XVII-2] $$\mathbf{i}_1 = \{1, 0, \ldots, 0\} , \quad \mathbf{i}_2 = \{0, 1, \ldots, 0) , \quad \ldots, \quad \mathbf{i}_n = \{0, 0, \ldots, 1\} ,$$

siendo la expresión de [XVII-1] en esta base

[XVII-3] $$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_k \mathbf{i}_k .$$

Los coeficientes de a_k se llaman coordenadas (o *componentes*) del vector **a** con respecto a la base [XVII-2] (§ 60-3, *b*).

Este es un caso particular del espacio $\mathbf{M}_{n,m}$ de matrices (§ 61, ejercicio 10).

a_3) Si en [XVII-1] se admiten componentes a_k complejos y tomamos como coeficientes λ, números complejos, tendremos un espacio vectorial de n dimensiones respecto del cuerpo de los números complejos. En este caso el concepto de *dimensión lineal* con respecto al cuerpo de coeficientes no corresponde a la noción intuitiva de dimensión, como se ve con $n = 1$.

a_4) El conjunto F de las funciones reales $f(x)$, $g(x)$ definidas en $a \leqq x \leqq b$ con la suma $S(x) = f(x) + g(x)$ y el producto $\lambda f(x)$ constituye un espacio vectorial de elementos indicados por f, g, ..., pues es un grupo abeliano respecto de la suma, y se verifican [60-6], [60-7] y [60-8]. En este caso no podemos dar una base del espacio, pero como es posible dar "vectores" linealmente independientes en número arbitrariamente grande, diremos que F tiene *dimensión infinita*.

a_5) Un subconjunto S de un espacio vectorial E se llama *subespacio vectorial* de E si es espacio vectorial, con la suma y el producto por un número como casos particulares de los definidos en E. Para ello basta que conjuntamente con dos vectores **a** y **b** de S, esté en S toda combinación lineal $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.

El conjunto F_0 de las funciones reales $f(x)$ *acotadas* en $a \leqq x \leqq b$ es un subespacio vectorial de F, el conjunto C de las funciones reales *continuas* en $a \leqq x \leqq b$ es un subespacio vectorial de F_0, y por tanto de F.

a_6) Si S es un subespacio vectorial de E y $\mathbf{a}_0 \varepsilon E$, el conjunto de vectores $\mathbf{b} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \varepsilon S$, se llama *variedad lineal* (*de* E, *congruente a* S, *y por* $\mathbf{a}_0$).

b) *Espacios de dimensión finita.* — b_1) Todo espacio vectorial de n dimensiones es isomorfo (§ 1-6) al espacio E_n considerado en a_2, pues llamando $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ a los vectores de una base, todo vector **a** se expresa en la forma [XVII-3] y puede asociársele con correspondencia de operaciones el vector [XVII-1] de E_n.

b_2) Sea $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ la base [XVII-2] de E_n. Si existen n vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ tales que

[XVII-4] $$\mathbf{i}_k = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j \lambda_{jk} ,$$

debe ser $\Delta = \det. \{\lambda_{jk}\} \neq 0$, pues de lo contrario habría una relación lineal entre las columnas de la matriz $\{\lambda_{jk}\}$ (§ 14-3, *b*), y por tanto entre los vectores $\mathbf{i}_k$. Pero entonces (§ 61-3, *b*), la transformación [XVII-4] es invertible y define un cambio de base. Entre las componentes de un vector **a** en una y otra base, se obtiene de

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{i}_k = \sum_{k,j=1}^{n} x_k \mathbf{e}_j \lambda_{jk} = \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k ,$$

la relación (cfr. § 61-2 y 3)

[XVII-5] $$y_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_k .$$

b_3) Todo conjunto de $r < n$ vectores linealmente independientes $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$, es base de un subespacio (a_5) S_r de E_n, y todo subespacio de

$\mathbf{E}_n$, puede considerarse engendrado en esta forma. Si los vectores linealmente independientes $\mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$, que engendran un subespacio T_{n-r}, forman conjuntamente con los anteriores una base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{E}_n$, diremos que los subespacios S_r, T_{n-r} son *suplementarios* en $\mathbf{E}_n$.

c) *Espacio dual o adjunto de* $\mathbf{E}_n$. — c_1) *Funcionales lineales y formas lineales.* — Si a cada elemento $\mathbf{x}$ de un espacio vectorial $\mathbf{E}$ se hace corresponder un número $\mathrm{F}(\mathbf{x})$, diremos que $\mathrm{F}(\mathbf{x})$ es un *funcional* definido en $\mathbf{E}$; *lineal* si

[XVII-6] $$\mathrm{F}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda\mathrm{F}(\mathbf{x}) + \mu\mathrm{F}(\mathbf{y}).$$

En los espacios $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_0$ y $\mathbf{C}$, (a_4 y a_5), $\mathrm{F}(\mathbf{x}) = \mathrm{F}(\mathbf{f})$ hace corresponder un número a cada función, y de allí el nombre de funcional. Funcionales en $\mathbf{C}$ son

$$\mathrm{F}(\mathbf{f}) = \int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x \quad , \quad \mathrm{G}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}(a) \quad , \quad \mathrm{H}(\mathbf{f}) = \int_a^b \mathbf{f}^2(x)\,\mathrm{d}x \quad ,$$

de los cuales son lineales los dos primeros pero no el tercero.

En el espacio $\mathbf{E}_n$ todo funcional lineal $\mathrm{F}(\mathbf{x})$ corresponde a una *forma lineal* en las componentes de $\mathbf{x}$, pues de $\mathbf{x} = \sum x_k \mathbf{i}_k$ resulta por [XVII-6]

[XVII-7] $$\mathrm{F}(\mathbf{x}) = \sum x_k \mathrm{F}(\mathbf{i}_k) = \sum \alpha_k x_k \quad , \quad \alpha_k = \mathrm{F}(\mathbf{i}_k).$$

c_2) *Espacio dual.* — Dadas en $\mathbf{E}_n$ las formas lineales [XVII-7] y $\mathrm{G}(\mathbf{x}) = \sum \beta_k x_k$, definamos la suma $[\mathrm{F} + \mathrm{G}]$, y el producto $[\lambda\mathrm{F}]$ por un número, mediante

[XVII-8] $$\begin{cases} [\mathrm{F} + \mathrm{G}](\mathbf{x}) = \mathrm{F}(\mathbf{x}) + \mathrm{G}(\mathbf{x}) = \sum(\alpha_k + \beta_k)\, x_k \quad , \\ [\lambda\mathrm{F}](\mathbf{x}) = \lambda\mathrm{F}(\mathbf{x}) = \sum(\lambda\alpha_k) x_k . \end{cases}$$

Es inmediato verificar que entonces el conjunto de las formas lineales [XVII-7] constituye un espacio vectorial, que llamaremos *espacio dual* de $\mathbf{E}_n$, indicado por $\mathbf{E}_n^*$. Las n formas lineales (proyecciones)

[XVII-9] $$\mathrm{P}_1(\mathbf{x}) = x_1, \ldots, \mathrm{P}_n(\mathbf{x}) = x_n \; ,$$

son linealmente independientes, y por [XVII-8] y [XVII-7] constituyen una base de $\mathbf{E}_n^*$, que entonces tiene n dimensiones. La base [XVII-9] de $\mathbf{E}_n^*$ se llama *base dual* de $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$.

II. Espacios vectoriales euclídeos. — *a*) *Producto escalar, ortogonalidad y norma.* — a_1) Un espacio vectorial $\mathbf{E}$ se llama *euclídeo* cuando a cada par de elementos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ corresponde un número $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$ llamado *producto escalar* que tiene, con respecto a las operaciones que caracterizan el espacio vectorial, las propiedades [60-15], [60-16], [60-17] y [60-22].

EJEMPLO 1. En el espacio $\mathbf{C}$ (nota I, a_5), el número

$$\mathbf{f}\,.\,\mathbf{g} = \int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x)\,\mathrm{d}x$$

es un producto escalar de los "vectores" $\mathbf{f}(x)$ y $\mathbf{g}(x)$, con las propiedades antedichas. Para este caso suele conservarse también la antigua notación $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ (cfr. § 60-6, *g*).

a_2) Si $\mathbf{E}$ es de dimensión finita, *todo producto escalar* $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$ *está dado por una forma bilineal* $\sum g_{ik} a_i b_k$ *simétrica* ($g_{ik} = g_{ki}$) *no degenerada* (§ 61-6, nota), *en las componentes de* $\mathbf{a}$ *y de* $\mathbf{b}$ *en una base* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

En efecto, si $\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum b_k \mathbf{e}_k$ se tiene por [60-16] y [60-17]

[XVII-10] $$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = \sum_{i,k=1}^{n} a_i b_k \mathbf{e}_i\,.\,\mathbf{e}_k = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} a_i b_k$$

siendo $g_{ik} = \mathbf{e}_i\,.\,\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k\,.\,\mathbf{e}_i = g_{ki}$ por [60-14].

Finalmente, el determinante $g = \det.\{g_{ik}\}$, llamado *determinante de* GRAM de la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, es distinto de cero en virtud de la condición de plenitud [60-22]. En efecto, si $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = 0$ para todo $\mathbf{a}$, lo que equivale por [XVII-10] a

[XVII-11] $$\sum_k g_{ik} b_k = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

resulta por [60-22] $\mathbf{b} = 0$. Esto significa que el sistema homogéneo [XVII-11] no es compatible (§ 15-6) y entonces (§ 15-6, *b*) es $g \neq 0$.

Se ve enseguida que: *recíprocamente, todo espacio vectorial de dimensión finita referido a una base* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *se convierte en un espacio euclídeo mediante una forma bilineal simétrica no degenerada que introduzca el producto escalar entre dos vectores cualesquiera del espacio.*

Si efectuamos un cambio de base (nota I, b_2)

$$\mathbf{e}'_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk} \mathbf{e}_j$$

y formamos respecto de los *mismos* vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ referidos a los nuevos ejes $\mathbf{a} = \sum \alpha_k \mathbf{e}'_k$, $\mathbf{b} = \sum \beta_k \mathbf{e}'_k$ el producto escalar

$$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = \sum_{h,k=1}^{n} \gamma_{hk} \alpha_h \beta_k$$

con $\gamma_{hk} = \mathbf{e}'_h \mathbf{e}'_k = \mathbf{e}'_k \mathbf{e}'_h = \gamma_{kh}$ resulta el *mismo* número [XVII-10], es decir, el valor del producto escalar es *invariante* respecto del cambio de base de referencia. Para verlo, basta sustituir

$$\gamma_{hk} = \mathbf{e}'_h\,.\,\mathbf{e}'_k = \sum_{p,q=1}^{n} \lambda_{ph} \lambda_{qk} g_{pq} \quad ,$$

y tener en cuenta que es

$$a_p = \sum_{h=1}^{n} \lambda_{ph} \alpha_h \quad , \quad b_q = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{qk} \beta_k \quad ,$$

para obtener

$$\sum_{h,k} \gamma_{hk} \alpha_h \beta_k = \sum_{h,k} \left\{ \sum_{p,q} g_{pq} \lambda_{ph} \lambda_{qk} \alpha_h \beta_k \right\} =$$

$$= \sum_{p,q} \left\{ g_{pq} \sum_{h,k} (\lambda_{ph}\alpha_h)(\lambda_{qk}\beta_k) \right\} = \sum_{p,q} g_{pq} a_p b_q .$$

La importancia de este resultado es fundamental, porque entonces se dice que el producto escalar, mediante la correspondiente forma bilineal simétrica no degenerada, *introduce una métrica* en el espacio vectorial, métrica que así resulta independiente del sistema de referencia (cfr. nota III, *b*).

Se dice que el cambio de base es una *congruencia* si se conservan los coeficientes de la forma bilineal simétrica, es decir si

$$\mathbf{e}'_h\,.\,\mathbf{e}'_k = \gamma_{hk} = g_{hk} = \mathbf{e}_h\,.\,\mathbf{e}_k \quad , \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Para el caso de $n=3$ y triedros de referencia del mismo sentido (§ 60-3), la congruencia se convierte en una rotación.

a_3) En un espacio euclídeo, *diremos* que los vectores no nulos **a** y **b** son *ortogonales* si $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$. Se llama *norma* $\mathrm{N}\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|$ de un vector **a**, al producto **a** . **a**.

EJEMPLO 2. En el espacio C (nota I, a_5) para el intervalo $0 \leqq x \leqq 2\pi$, son ortogonales los "vectores" $f_0(x)\equiv 1$, $f_1(x)=\cos x$. También lo son dos a dos los infinitos "vectores" $f_n(x)=\cos nx$, $g_n(x)=\operatorname{sen} nx$, $(n=1,2,\ldots)$. Las normas valen $\mathrm{N}f_0=2\pi$, $\mathrm{N}f_1=\mathrm{N}f_2=\ldots=\mathrm{N}g_1=\mathrm{N}g_2=\ldots=\pi$ (ver § 53-1, ejemplos 1 y 2).

En un espacio euclídeo de dimensión finita, la norma está dada por la forma cuadrática no degenerada:

[XVII-12] $\qquad \mathrm{N}\mathbf{a}=\mathbf{a}.\mathbf{a}=\Sigma g_{ik}a_ia_k \quad , \quad \det.\{g_{ik}\}\neq 0.$

b) *Espacios propiamente euclídeos; ángulo.* — Un espacio euclídeo E se llama *propiamente euclídeo* si en él la norma es definida positiva; es decir, si

[XVII-13] $\qquad \mathrm{N}\mathbf{a}\geqq 0 \quad \text{y sólo} \quad =0 \quad \text{si} \quad \mathbf{a}=\mathbf{0}.$

Entonces a cada vector **a** corresponde un número no negativo llamado *módulo* de **a**: $a=\text{mód}\,\mathbf{a}=\sqrt{\mathrm{N}\mathbf{a}}$, y se verifica entre el producto escalar y el producto de los módulos la desigualdad de CAUCHY - SCHWARZ (cfr. ej. 25, § 60):

[XVII-14] $\qquad |\mathbf{a}.\mathbf{b}|\leqq ab.$

En efecto, por [XVII-13] el trinomio de segundo grado en λ,

$$\mathrm{N}(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda^2\mathrm{N}\mathbf{a}+2\lambda\mathbf{ab}+\mathrm{N}\mathbf{b}$$

es $\geqq 0$ y de aquí resulta $(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2\leqq\mathrm{N}\mathbf{a}.\mathrm{N}\mathbf{b}$, es decir [XVII-14]. Como $\mathrm{N}(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b})$ sólo puede anularse para un λ si **a** y **b** son paralelos, resulta que *en* [XVII-14] *vale el signo = si y sólo si* **a** *y* **b** *son paralelos.*

En § 60-5 *a*, definimos el producto escalar [60-12] mediante el ángulo; ahora podemos definir el ángulo en cualquier espacio propiamente euclídeo mediante el producto escalar. La desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ asegura que $-1\leqq(\mathbf{a}.\mathbf{b})/(ab)\leqq 1$, y entonces existe un ángulo real φ y sólo uno, tal que

[XVII-15] $\qquad \cos\varphi=\dfrac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{ab} \quad , \quad 0\leqq\varphi\leqq\pi \quad ,$

el cual llamaremos *ángulo* de los vectores **a** y **b**: $\varphi=(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Si el espacio es de dimensión finita tendremos

[XVII-16] $\qquad \cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\dfrac{\Sigma g_{ik}a_ib_k}{\sqrt{\Sigma g_{ik}a_ia_k}\;\sqrt{\Sigma g_{ik}b_ib_k}}.$

c) *Bases ortonormales.* — c_1) En un espacio propiamente euclídeo de dimensión finita, una base $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$ se llama *ortonormal* si está constituída por vectores dos a dos ortogonales, y *normales* o *unitarios*, es decir, de norma 1:

[XVII-17] $\qquad \mathbf{i}_r.\mathbf{i}_s=\delta_{rs} \quad , \quad (\delta_{rs}=0 \;\text{si}\; r\neq s, \;=1 \;\text{si}\; r=s).$

A partir de una base cualquiera $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ puede construirse una base ortonormal $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ mediante el llamado *proceso de ortonormalización de* E. SCHMIDT que pasamos a describir. Poniendo

$$\mathbf{j}_1=\mathbf{e}_1 \;;\; \mathbf{j}_2=\lambda_1\mathbf{j}_1+\mathbf{e}_2 \;;\; \mathbf{j}_3=\mu_1\mathbf{j}_1+\mu_2\mathbf{j}_2+\mathbf{e}_3 \;;\; \ldots \;;$$

ningún $\mathbf{j}_r$ puede anularse, pues es combinación lineal de los $\mathbf{e}_k$ con coe-

ficientes no todos nulos. Los coeficientes $\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \ldots$, pueden determinarse de modo que cada vector $\mathbf{j}_r$ sea ortogonal a los anteriores:

1º) $\quad \mathbf{j}_2.\mathbf{j}_1=\lambda_1\mathbf{j}_1^2+\mathbf{e}_2.\mathbf{j}_1=0$ da λ_1, pues $\mathbf{j}_1^2\neq 0$;

2º) $\quad \mathbf{j}_3.\mathbf{j}_1=\mu_1\mathbf{j}_1^2+\mathbf{e}_3.\mathbf{j}_1=0$ y
$\quad \mathbf{j}_3.\mathbf{j}_2=\mu_2\mathbf{j}_2^2+\mathbf{e}_3.\mathbf{j}_2=0$

dan μ_1 y μ_2, pues $\mathbf{j}_1^2\neq 0$, $\mathbf{j}_2^2\neq 0$; etc.

Dividiendo cada uno de los vectores $\mathbf{j}_r$ por su módulo, se tiene una base de vectores $\mathbf{i}_r=\mathbf{j}_r/j_r$, que verifica [XVII-17].

c_2) En una base ortonormal [XVII-10] y [XVII-12] se reducen a

[XVII-18] $\qquad \mathbf{a}.\mathbf{b}=\Sigma a_ib_i \quad ; \quad \mathrm{N}\mathbf{a}=\Sigma a_i^2.$

c_3) De paso vemos nuevamente que mediante una transformación lineal, una forma cuadrática definida positiva (§ 63-7, *a*) $\Sigma g_{ik}a_ia_k$ puede transformarse en una suma de cuadrados (cfr. § 63-7, *c* y *d*).

d) *Dualidad en espacios euclídeos de dimensión finita.* — Para cada **b** fijo, el producto escalar **a** . **b** es por [XVII-10] una forma $\mathrm{L}_b(\mathbf{a})$, lineal en las componentes de **a**. Recíprocamente, toda forma lineal $\mathrm{L}(\mathbf{a})=\Sigma\lambda_ia_i$ proviene del producto escalar por un vector bien determinado **b**, pues el sistema

$$\Sigma_k g_{ik}b_k=\lambda_i$$

tiene solución b_k única (§ 15-4, *b*) por ser $\det.\{g_{ik}\}\neq 0$.

Por consiguiente, un espacio euclídeo de dimensión finita E_n, gracias al producto escalar, puede considerarse idéntico a su espacio adjunto o dual E_n^* (Nota I, c_2).

III. Espacios puntuales afines. — *a*) En § 60-1 vimos cómo se introduce en el espacio ordinario la noción de vector a partir de los puntos. En los espacios vectoriales o lineales el concepto primitivo (§ 1-7) es el de vector y podemos proceder a la inversa:

Un conjunto A_n de elementos P, Q, R, ..., llamados *puntos*, se llama *espacio puntual afín de n dimensiones* si a todo par ordenado (P, Q) de puntos corresponde un elemento (vector) indicado **PQ**, de un espacio vectorial E_n de n dimensiones (espacio vectorial asociado), de modo que

1º) $\qquad \mathbf{PQ}=\mathbf{PR}+\mathbf{RQ} \quad ;$

2º) Dado un punto $\mathrm{O}\varepsilon\mathrm{A}_n$, a todo vector $\mathbf{a}\varepsilon\mathrm{E}_n$ corresponde un punto A y uno solo, tal que $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$.

De 1º) se deduce para R = Q que $\mathbf{QQ}=\mathbf{0}$, módulo de la adición en E_n y para P = Q que $\mathbf{0}=\mathbf{QR}+\mathbf{RQ}$; entonces, por ser el inverso de un vector en el grupo aditivo igual a su opuesto (§ 60-2, nota 3) queda $\mathbf{QR}=-\mathbf{RQ}=(-1)\mathbf{RQ}$.

Se dice que **OA** es el *vector de posición* del punto A respecto del origen O o también que **OA** *sitúa* el punto A respecto de O.

Sistema de coordenadas en A_n es todo conjunto formado por un punto O (*origen*) y una base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ del espacio vectorial asociado. Lo indicaremos con $\{\mathrm{O},\mathbf{e}_k\}$.

Coordenadas de A en el sistema $\{\mathrm{O},\mathbf{e}_k\}$, son las componentes de **OA** en la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. De $\mathbf{AB}=\mathbf{AO}+\mathbf{OB}=\mathbf{OB}-\mathbf{OA}$ resulta que las componentes de **AB** en una base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ son las diferencias b_i-a_i de coordenadas de B y de A en un sistema $\{\mathrm{O},\mathbf{e}_k\}$.

b) *Espacios puntuales propiamente euclídeos. Distancia.* — Un espacio puntual afín se llama (*propiamente*) *euclídeo* cuando lo es el espacio vectorial asociado.

En un espacio puntual propiamente euclídeo, a cada par de puntos corresponde el número $\varrho(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\text{mód}\,\mathbf{PQ}$, independiente del sistema de

referencia (nota II, a_2). Este número puede llamarse *distancia entre los puntos* P *y* Q, pues verifica las condiciones (*axiomas de la distancia*):

D_1) $\varrho(P, Q) \geqslant 0$ y sólo $= 0$ si $P \equiv Q$;

D_2) $\varrho(P, Q) = \varrho(Q, P)$;

D_3) $\varrho(P, R) \leqq \varrho(P, Q) + \varrho(Q, R)$, (*desigualdad triangular*).

Las dos primeras son inmediatas. Para demostrar la tercera observemos que en E_n, por la desigualdad de CAUCHY - SCHWARZ [XVII-14], se tiene:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 \leqq a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \ ,$$
$$\therefore \ |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqq a + b \ ,$$

y aplicando esta relación a $PR = PQ + QR$ resulta D_3.

Si M y N son dos puntos de coordenadas x_k y $x_k + \Delta x_k$ en un sistema $\{O, \mathbf{e}_k\}$ será por a, $MN = \Sigma \Delta x_k \mathbf{e}_k$, y entonces

[XVII-19] $\varrho^2(M, N) = \Sigma g_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \ , \quad g_{ik}$ constantes, $\det.\{g_{ik}\} > 0$.

Cuando el sistema $\{O, \mathbf{e}_k\}$ corresponde a una base ortonormal es

[XVII-20] $\varrho^2(M, N) = \Sigma(\Delta x_i)^2$.

IV. Resolución práctica de los sistemas de ecuaciones lineales. — *a*) *Introducción.* — Aun conociendo perfectamente los fundamentos teóricos de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, quien sin preparación intenta resolver un sistema que sólo tenga diez ecuaciones con diez incógnitas, queda pronto desbordado por las operaciones numéricas requeridas al efecto. Ello lleva a *sobrevalorar* injustamente la dificultad de dicha resolución que, adecuadamente orientada, puede superarse en un tiempo razonable. En algunas aplicaciones se presentan sistemas donde los coeficientes de los términos diagonales sobrepasan numéricamente a la suma de los correspondientes de los demás términos lineales de cada ecuación, siendo además simétrica la matriz del sistema. Para esos casos se obtienen resultados suficientemente exactos mediante la regla de cálculo, sin necesidad de utilizar máquinas de calcular.

Un sistema lineal con igual número de ecuaciones que incógnitas:

[XVII-21] $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = k_n \ , \end{cases}$$

de matriz cuadrada $A = \{a_{ij}\}$ de orden n y determinante $A \neq 0$, se resuelve por la regla de CRAMER (§ 15-4):

[XVII-22] $$x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} k_j A_{ji}\right) : A \ ,$$

donde A_{ji} es el adjunto del elemento a_{ji} en A.

Si simbolizamos por X y K las matrices vectoriales (§ 61-4, *d*) de una sola columna $\{x_i\}$ y $\{k_i\}$ de las incógnitas y de los términos constantes, el sistema [XVII-21] puede escribirse

[XVII-23] $$AX = K \ ,$$

donde AX es la matriz producto de clase $(n, 1)$, es decir, también de una sola columna, tal que sus elementos se obtienen por el producto escalar de cada fila de A por la única columna de X. La solución [XVII-22] viene dada por

[XVII-24] $$X = A^{-1}K \ ,$$

donde la matriz inversa A^{-1} de A, de orden n, tiene por elemento de fila i y columna j el A_{ji}/A.

Pueden calcularse simultáneamente A y sus menores A_{ij} por el procedimiento sistemático (ver *b*) de F. CHIÒ (*Mémoire sur les fonctions connues sous le nom de résultants ou de déterminants*, Turín, 1853), pero en general y sobre todo para matriz asimétrica, resulta menos engorroso y más sistemático seguir el método de reducción sucesiva de K. F. GAUSS (*Theoria Combinationis, Supplementum*; Werke, vol. IV), que por ejemplo GULDAN (nota V, 8) prefiere al método de los determinantes, dando del mismo un esquema gráfico intuitivo (ver *c*).

b) *Cálculo numérico de determinantes.* — La posibilidad de anular en un determinante todos los elementos de una línea excepto uno (§ 13-4, c_4), es la base de la regla práctica de CHIÒ; para ello se elige como *elemento pivote* uno del determinante que sea igual a la unidad; si esto no ocurre, se prepara el determinante sacando factor común de toda una línea el elemento que convenga tomar como pivote, convertido así en la unidad. Una vez hecho esto, la regla dice que *el determinante con dicho elemento pivote unitario situado en la fila l y en la columna k es igual a* $(-1)^{l+k}$ *por el determinante de un orden menor obtenido tachando la fila l y la columna k que contengan el elemento pivote y disminuyendo cada elemento restante en el producto de los elementos de la fila y columna suprimidos situados en los pies de las perpendiculares trazadas por el elemento que se modifica. Los elementos que quedan tienen por adjuntos los mismos valores que los elementos correspondientes de que proceden en el determinante primitivo.*

En efecto, la regla anterior equivale a restar de cada fila los elementos de la fila l multiplicados por el factor λ igual al elemento de la fila que se modifica situado en la columna k. Esta operación equivale a restar un determinante nulo (§ 13-3, Cor.) y con ello se anulan todos los elementos de la columna k distintos al pivote, siendo por tanto el adjunto de éste igual al determinante primitivo al desarrollarlo por la columna k. Por ejemplo:

$$\begin{matrix} a - a_3b) \\ \\ \\ c - c_3b) \\ d - d_3b) \\ e - e_3b) \end{matrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \vdots & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & 1 & \vdots & b_4 & b_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \vdots & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \vdots & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & \vdots & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_3b_1 & a_2 - a_3b_2 & 0 & a_4 - a_3b_4 & a_5 - a_3b_5 \\ b_1 & b_2 & 1 & b_4 & b_5 \\ c_1 - c_3b_1 & c_2 - c_3b_2 & 0 & c_4 - c_3b_4 & c_5 - c_3b_5 \\ d_1 - d_3b_1 & d_2 - d_3b_2 & 0 & d_4 - d_3b_4 & d_5 - d_3b_5 \\ e_1 - e_3b_1 & e_2 - e_3b_2 & 0 & e_4 - e_3b_4 & e_5 - e_3b_5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1 - a_3b_1 & a_2 - a_3b_2 & a_4 - a_3b_4 & a_5 - a_3b_5 \\ c_1 - c_3b_1 & c_2 - c_3b_2 & c_4 - c_3b_4 & c_5 - c_3b_5 \\ d_1 - d_3b_1 & d_2 - d_3b_2 & d_4 - d_3b_4 & d_5 - d_3b_5 \\ e_1 - e_3b_1 & e_2 - e_3b_2 & e_4 - e_3b_4 & e_5 - e_3b_5 \end{vmatrix} ,$$

donde el adjunto de c_1 en el primer determinante es igual al adjunto de $c_1 - c_3b_1$ en el segundo determinante, que es el del último determinante multiplicado por $(-1)^{2+3}$.

Una reiteración del proceso hasta llegar a un determinante de cuarto orden permite, mediante el cálculo de los adjuntos de los elementos de éste, hallar a la vez el valor del determinante primitivo y de 16 de sus adjuntos. Cambiando de elemento pivote en el determinante primitivo se hallan los restantes adjuntos y la obtención repetida de algunos de ellos sirve de comprobación de los cálculos.

c) *Método abreviado de* GAUSS. — Si suponemos que se ha de resolver un sistema de cinco ecuaciones (1*), (2*), (3*), (4*), (5*) con cinco incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, el procedimiento consiste en sustituirlo por un sistema equivalente de las que llamaremos *ecuaciones principales* (I) a (V) y que van formándose de manera que (II) tenga sólo cuatro

incógnitas x_2 a x_5, (III) tenga tres x_3 a x_5, (IV) dos x_4 y x_5, (V) una sola x_5; entonces por (V) se obtiene x_5, que sustituída en (IV) da x_4, con ambos valores x_4 y x_5 en (III) se obtiene x_3 y así se llega sucesivamente a obtener x_1 por (I).

Es muy conveniente efectuar el cálculo numérico en forma tabular, debiendo estar contenidas en la tabla *todas* las operaciones necesarias para la resolución. El esquema del método (esquema A) muestra claramente la sucesión de operaciones a efectuar: para ello se han sustituído los valores numéricos de los coeficientes por letras con índices en la forma usual (§ 15-4), los términos diagonales se distinguen por tener sus dos índices iguales, y los independientes en el segundo miembro se indi-

ESQUEMA A. Sistema simétrico de ecuaciones.

Marcha del cálculo	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	k	k'	Control	
(1*)	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	k_1	k'_1	s_1	
(2*)	(a_{12})	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	k_2	k'_2	s_2	
(3*)	(a_{13})	(a_{23})	a_{33}	a_{34}	a_{35}	k_3	k'_3	s_3	
(4*)	(a_{14})	(a_{24})	(a_{34})	a_{44}	a_{45}	k_4	k'_4	s_4	
(5*)	(a_{15})	(a_{25})	(a_{35})	(a_{45})	a_{55}	k_5	k'_5	s_5	
(I) = (1*)	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	k_1	k'_1	s_1	(1)
(2*)	(a_{12})	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	k_2	k'_2	s_2	(2)
$-(a_{12}/a_{11})$.(I)	$(-a_{12})$	$b_{12.2}$	$b_{13.2}$	$b_{14.2}$	$b_{15.2}$	$k_{1.2}$	$k'_{1.2}$	$s_{1.2}$	(3)
(II) = $\Sigma_{(2)}^{(3)}$		g_{22}	g_{23}	g_{24}	g_{25}	K_2	K'_2	S_2	(4)
(3*)	(a_{13})	(a_{23})	a_{33}	a_{34}	a_{35}	k_3	k'_3	s_3	(5)
$-(a_{13}/a_{11})$.(I)	$(-a_{13})$	$(b_{13.2})$	$b_{13.3}$	$b_{14.3}$	$b_{15.3}$	$k_{1.3}$	$k'_{1.3}$	$s_{1.3}$	(6)
$-(g_{23}/g_{22})$.(II)		$(-g_{23})$	$b_{23.3}$	$b_{24.3}$	$b_{25.3}$	$K_{2.3}$	$K'_{2.3}$	$S_{2.3}$	(7)
(III) = $\Sigma_{(5)}^{(7)}$			g_{33}	g_{34}	g_{35}	K_3	K'_3	S_3	(8)
(4*)	(a_{14})	(a_{24})	(a_{34})	a_{44}	a_{45}	k_4	k'_4	s_4	(9)
$-(a_{14}/a_{11})$.(I)	$(-a_{14})$	$(b_{14.2})$	$(b_{14.3})$	$b_{14.4}$	$b_{15.4}$	$k_{1.4}$	$k'_{1.4}$	$s_{1.4}$	(10)
$-(g_{24}/g_{22})$.(II)		$(-g_{24})$	$(b_{24.3})$	$b_{24.4}$	$b_{25.4}$	$K_{2.4}$	$K'_{2.4}$	$S_{2.4}$	(11)
$-(g_{34}/g_{33})$.(III)			$(-g_{34})$	$b_{34.4}$	$b_{35.4}$	$K_{3.4}$	$K'_{3.4}$	$S_{3.4}$	(12)
(IV) = $\Sigma_{(9)}^{(12)}$				g_{44}	g_{45}	K_4	K'_4	S_4	(13)
(5*)	(a_{15})	(a_{25})	(a_{35})	(a_{45})	a_{55}	k_5	k'_5	s_5	(14)
$-(a_{15}/a_{11})$.(I)	$(-a_{15})$	$(b_{15.2})$	$(b_{15.3})$	$(b_{15.4})$	$b_{15.5}$	$k_{1.5}$	$k'_{1.5}$	$s_{1.5}$	(15)
$-(g_{25}/g_{22})$.(II)		$(-g_{25})$	$(b_{25.3})$	$(b_{25.4})$	$b_{25.5}$	$K_{2.5}$	$K'_{2.5}$	$S_{2.5}$	(16)
$-(g_{35}/g_{33})$.(III)			$(-g_{35})$	$(b_{35.4})$	$b_{35.5}$	$K_{3.5}$	$K'_{3.5}$	$S_{3.5}$	(17)
$-(g_{45}/g_{44})$.(IV)				$(-g_{45})$	$b_{45.5}$	$K_{4.5}$	$K'_{4.5}$	$S_{4.5}$	(18)
(V) = $\Sigma_{(14)}^{(18)}$					g_{55}	K_5	K'_5	S_5	(19)

De (V): $x_5 = K_5/g_{55}$;
" (IV): $x_4 = (K_4 - g_{45}x_5)/g_{44}$;
" (III): $x_3 = (K_3 - g_{35}x_5 - g_{34}x_4)/g_{33}$;
" (II): $x_2 = (K_2 - g_{25}x_5 - g_{24}x_4 - g_{23}x_3)/g_{22}$;
" (I): $x_1 = (k_1 - a_{15}x_5 - a_{14}x_4 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2)/a_{11}$;
$A = a_{11}g_{22}g_{33}g_{44}g_{55}$.

ESQUEMA B. Sistema simétrico de ecuaciones. (Con regla de cálculo).

Marcha del cálculo	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	k	Control
(1*)	+ 78	+ 7	+ 16		+ 48	+ 48			+ 197
(2*)		+ 104		+ 18	+ 54	+ 54			+ 237
(3*)			+ 88	+ 7		+ 48	+ 42		+ 201
(4*)				+ 116		+ 54	+ 48		+ 243
(5*)					+ 204			— 84,38	+ 221,62
(6*)						+ 204		— 66,00	+ 342
(7*)							+ 90	— 27,46	+ 152,54
(I) = (1*)	+ 78	+ 7	+ 16		+ 48	+ 48			+ 197
(2*)		+ 104		+ 18	+ 54	+ 54			+ 237
—(7/78).(I)		— 0,63	— 1,435		— 4,31	— 4,31			— 17,68
(II)		+ 103,37	— 1,435	+ 18	+ 49,69	+ 49,69			+ 219,32
(3*)			+ 88	+ 7		+ 48	+ 42		+ 201
—(16/78).(I)			— 3,28		— 9,86	— 9,86			— 40,4
+ (1,435/103,37).(II)			— 0,02	+ 0,25	+ 0,69	+ 0,69			+ 3,04
(III)			+ 84,7	+ 7,25	— 9,17	+ 38,83	+ 42		+ 163,6
(4*)				+ 116		+ 54	+ 48		+ 243
—(18/103,37).(II)				— 3,13	— 8,64	— 8,64			— 38,1
—(7,25/84,7).(III)				— 0.6	+ 0,76	— 3,21	— 3,475		— 13,9
(IV)				+ 112,27	— 7,88	+ 42,15	+ 44,525		+ 191,0
(5*)					+ 204			— 84,38	+ 221,62
—(48/78).(I)					— 29,55	— 29,55			— 121,3
—(49,69/103,37).(II)					— 23.85	— 23,85			— 105,3
+ (9,17/84,7).(III)					— 0,99	+ 4,21	+ 4,54		+ 17,7
+ (7,88/112,27).(IV)					— 0,55	+ 2,95	+ 3,12		+ 13,4
(V)					+ 149,06	— 46,24	+ 7,66	— 84,38	+ 26,1
(6*)						+ 204		— 66,00	+ 342
—(48/78).(I)						— 29,55			— 121,2
—(49,69/103,37).(II)						— 23,85			— 105,2
—(38,83/84,7).(III)						— 17,80	— 19,23		— 75,1
—(42,15/112,27).(IV)						— 15,77	— 16,68		— 71,6
+ (46,24/149,05).(V)						— 14,32	+ 2,37	— 26,15	+ 8,1
(VI)						+ 102,71	— 33,54	— 92,15	— 23,0
(7*)							+ 90	— 27,46	+ 152,54
—(42/84,7).(III)							— 20,83		— 81,1
—(44,525/112,27).(IV)							— 17,65		— 75,7
—(7,66/149,06).(V)							— 0,39	+ 4,33	— 1,34
+ (33,54/102,71).(VI)							— 10,95	— 30,10	— 7,51
(VII)							+ 40,18	— 53,23	— 13,1

$x_7 = -1{,}326$; $x_6 = \dfrac{-136{,}55}{102{,}71} = -1{,}330$; $x_5 = \dfrac{-135{,}61}{149{,}06} = -0{,}910$; $x_4 = \dfrac{107{,}94}{112{,}27} = +0{,}960$;

$x_3 = \dfrac{92{,}1}{84{,}7} = +1{,}086$; $x_2 = \dfrac{95{,}56}{103{,}37} = +0{,}925$; $x_1 = \dfrac{83{,}61}{78} = +1{,}072$.

can por k_1, k_2, (K_2), k_3, (K_3), ..., pudiéndose incluir también otro o varios conjuntos de valores k' para estos últimos, correspondientes a otros casos de carga en la aplicación a la Estática, los que se resuelven simultáneamente, gran ventaja del método de resolución numérica sobre el de aproximaciones sucesivas.

En las ecuaciones auxiliares se distinguen los coeficientes que van modificándose por un índice suplementario que indica la ecuación principal que va a obtenerse. Por la simplificación obtenible se trata primero el caso del sistema simétrico de ecuaciones que es el que se presenta más en la práctica.

c_1) *Sistema simétrico de ecuaciones.* — Para simplificar la comprensión y demostración del método se han incluído en el esquema A todos los coeficientes que realmente figuran en las ecuaciones, pero los escritos entre paréntesis *no deben inscribirse por innecesarios al formar la tabla de resolución en la práctica del método,* según puede verse en el ejemplo numérico subsiguiente (esquema B).

He aquí en instrucciones sucesivas la marcha del cálculo a seguir en el esquema A para $n = 5$ y aclarar en el ejemplo numérico.

1. Inscripción de las ecuaciones dadas (1*) a (5*), omitiendo los coeficientes a la izquierda de la diagonal principal. Es conveniente también inscribir una columna de control cuyos elementos sean las sumas s_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) de los elementos de cada fila (incluso los omitidos) con (o sin) el (o los) termino(s) independiente(s).

2. Inscripción de la misma ecuación (1*) como ecuación principal (I) en la fila (1).

3. Inscripción de la ecuación dada (2*) en la fila (2).

4. Multiplicación de la ecuación principal (I) por el factor $-(a_{12}/a_{11})$ en la fila (3). Para el control debe efectuarse la misma operación con s_1.

5. Obtención de la ecuación principal (II) en la fila (4) como suma de las filas (2) y (3). Puede, como control, obtenerse así $S_2 = s_2 + s_1$, que debe también ser la suma de los elementos de la fila (II).

6. Inscripción de la ecuación dada (3*) como fila (5).

7. Multiplicación de la ecuación principal (I) por el factor $-(a_{13}/a_{11})$ en la fila (6) y de la ecuación principal (II) por el factor $-(g_{23}/g_{22})$ en la fila (7). Para el control deben efectuarse las mismas operaciones con s_1 y S_2.

8. Obtención de la ecuación principal (III) en la fila (8) como suma de las filas (5) a (7). Puede como control obtenerse así S_3, que debe ser también la suma de los elementos de la fila (III).

9. Sucesiva inscripción de las ecuaciones auxiliares y obtención de las principales en forma análoga, siendo:

$$b_{1i.j} = -(a_{1j}/a_{11})\,a_{1i} \quad \text{con} \quad i, j \geqslant 2 \quad ;$$
$$b_{hi.j} = -(g_{hj}/g_{hh})\,g_{hi} \quad \text{con} \quad h \geqslant 2 \quad ; \quad i, j \geqslant 3 \quad ;$$
$$k_{1.j} = -(a_{1j}/a_{11})\,k_1 \quad \text{con} \quad j \geqslant 2 \quad ;$$
$$K_{h.j} = -(g_{hj}/g_{hh})\,K_h \quad \text{con} \quad h \geqslant 2 \quad ; \quad j \geqslant 3 \quad ;$$

y análogamente para $s_{1.j}$ y $S_{h.j}$; hasta llegar a escribir la última ecuación principal (V) en la fila (19). Si en las ecuaciones principales se anulan algunos coeficientes, desaparecerán las correspondientes ecuacio-

nes auxiliares que se deducirían de los factores anulados de multiplicación.

10. Obtención retrógrada de las incógnitas x_5 a x_1 a partir de la última ecuación principal (V).

Éste es el método de GAUSS-DOOLITTLE (M. H. DOOLITTLE: *Method employed in the solution of normal equations and the adjustment of triangulation*; U. S. Coast and Geodetic Survey Report 1878).

Es fácil ver que multiplicando la ecuación (II) por a_{11} se obtiene:

$$\text{(II')} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{12} & a_{24} \end{vmatrix} x_4 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{12} & a_{25} \end{vmatrix} x_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{12} & k_2 \end{vmatrix} .$$

Asimismo, en lugar de (III) se puede escribir

$$\text{(III')} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{34} \end{vmatrix} x_4 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{35} \end{vmatrix} x_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{12} & a_{22} & k_2 \\ a_{13} & a_{23} & k_3 \end{vmatrix} ,$$

y finalmente

$$\text{(V')} \quad A x_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & k_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & k_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & k_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & k_4 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & k_5 \end{vmatrix} ,$$

pero mejor que calcular estos determinantes es seguir el procedimiento indicado.

Obsérvese que el método sirve también para calcular cómodamente el valor de un determinante, en este caso el A simétrico del sistema, pues resulta $A = a_{11} g_{22} g_{33} g_{44} g_{55}$.

En efecto, el sistema (1*), (2*), (3*), (4*), (5*) se sustituye por el (I), (II), (III), (IV), (V), donde cada fila de estas últimas se ha obtenido agregando a la correspondiente de las primeras una combinación lineal de otras. Por tanto el determinante del sistema de ecuaciones principales tendrá el mismo valor A que el del sistema dado. El determinante del sistema de ecuaciones principales es triangular derecho (tiene nulos todos los elementos que están debajo de la diagonal principal) y por tanto su valor es el producto de los elementos de la diagonal principal, pues al desarrollar por la primera columna será igual al primer elemento por su adjunto y así se sigue sucesivamente.

c_2) *Sistema asimétrico de ecuaciones.* — Este caso se distingue del anterior en que ahora los factores de multiplicación de la primera columna (Marcha del cálculo) no se obtienen simplemente de los términos de las ecuaciones halladas anteriormente, sino que deben formarse especialmente. Pero en este caso, la marcha del cálculo es también muy fácil y puede ser completamente sistematizada. Ahora en la etapa de obtención de una ecuación principal, para escribir cada ecuación auxiliar correspondiente, se empieza por determinar su primer coeficiente no teóricamente nulo tal que sumado a los de la misma columna de las anteriores ecuaciones auxiliares de la misma etapa dé suma nula; este coeficiente dividido por el coeficiente diagonal de la respectiva ecuación principal es el factor de multiplicación que modifica ésta. En el esquema C designamos el numerador de dicho factor modificante de las ecuaciones principales (II) a (IV) por $-\Sigma_{III}(x_2)$, ..., $-\Sigma_{V}(x_3)$, ..., donde el índice romano indica la etapa de obtención de la respectiva ecuación principal y la in-

cógnita indica la columna de coeficientes que da dicho numerador. Así

$$a_{32} + b_{12.3} - \Sigma_{III}(x_2) = 0 \quad ,$$
$$a_{53} + b_{13.5} + b_{23.5} - \Sigma_{V}(x_3) = 0 \quad , \quad \text{etc.}$$

Lo demás del cálculo es análogo al caso de sistema simétrico. He aquí en instrucciones sucesivas la marcha del cálculo, a seguir en el esquema C.

1. Inscripción de las ecuaciones dadas (1*) a (5*). Es conveniente escribir también una columna de control cuyos elementos sean la suma s_i ($i = 1, \ldots, 5$) de los elementos de cada fila i con (o sin) el término independiente.

ESQUEMA C. Sistema asimétrico de ecuaciones.

Marcha del cálculo	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	k	Control	
(1*)	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	k_1	s_1	
(2*)	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	k_2	s_2	
(3*)	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	k_3	s_3	
(4*)	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	k_4	s_4	
(5*)	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	k_5	s_5	
(I) = (1*)	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	k_1	s_1	(1)
(2*)	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	k_2	s_2	(2)
$-(a_{21}/a_{11}).(I)$	$-a_{21}$	$b_{12.2}$	$b_{13.2}$	$b_{14.2}$	$b_{15.2}$	$k_{1.2}$	$s_{1.2}$	(3)
$(II) = \Sigma_{(2)}^{(3)}$		g_{22}	g_{23}	g_{24}	g_{25}	K_2	S_2	(4)
(3*)	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	k_3	s_3	(5)
$-(a_{31}/a_{11}).(I)$	$-a_{31}$	$b_{12.3}$	$b_{13.3}$	$b_{14.3}$	$b_{15.3}$	$k_{1.3}$	$s_{1.3}$	(6)
$-(\Sigma_{III}(x_2)/g_{22}).(II)$		$-\Sigma_{III}(x_2)$	$b_{23.3}$	$b_{24.3}$	$b_{25.3}$	$K_{2.3}$	$S_{2.3}$	(7)
$(III) = \Sigma_{(5)}^{(7)}$			g_{33}	g_{34}	g_{35}	K_3	S_3	(8)
(4*)	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	k_4	s_4	(9)
$-(a_{41}/a_{11}).(I)$	$-a_{41}$	$b_{12.4}$	$b_{13.4}$	$b_{14.4}$	$b_{15.4}$	$k_{1.4}$	$s_{1.4}$	(10)
$-(\Sigma_{IV}(x_2)/g_{22}).(II)$		$-\Sigma_{IV}(x_2)$	$b_{23.4}$	$b_{24.4}$	$b_{25.4}$	$K_{2.4}$	$S_{2.4}$	(11)
$-(\Sigma_{IV}(x_3)/g_{33}).(III)$			$-\Sigma_{IV}(x_3)$	$b_{34.4}$	$b_{35.4}$	$K_{3.4}$	$S_{3.4}$	(12)
$(IV) = \Sigma_{(9)}^{(12)}$				g_{44}	g_{45}	K_4	S_4	(13)
(5*)	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	k_5	s_5	(14)
$-(a_{51}/a_{11}).(I)$	$-a_{51}$	$b_{12.5}$	$b_{13.5}$	$b_{14.5}$	$b_{15.5}$	$k_{1.5}$	$s_{1.5}$	(15)
$-(\Sigma_{V}(x_2)/g_{22}).(II)$		$-\Sigma_{V}(x_2)$	$b_{23.5}$	$b_{24.5}$	$b_{25.5}$	$K_{2.5}$	$S_{2.5}$	(16)
$-(\Sigma_{V}(x_3)/g_{33}).(III)$			$-\Sigma_{V}(x_3)$	$b_{34.5}$	$b_{35.5}$	$K_{3.5}$	$S_{3.5}$	(17)
$-(\Sigma_{V}(x_4)/g_{44}).(IV)$				$-\Sigma_{V}(x_4)$	$b_{45.5}$	$K_{4.5}$	$S_{4.5}$	(18)
$(V) = \Sigma_{(14)}^{(18)}$					g_{55}	K_5	S_5	(19)

De (V): $x_5 = K_5/g_{55}$;
,, (IV): $x_4 = (K_4 - g_{45}x_5)/g_{44}$;
,, (III): $x_3 = (K_3 - g_{35}x_5 - g_{34}x_4)/g_{33}$;
,, (II): $x_2 = (K_2 - g_{25}x_5 - g_{24}x_4 - g_{23}x_3)/g_{22}$;
,, (I): $x_1 = (k_1 - a_{15}x_5 - a_{14}x_4 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2)/a_{11}$;
$A = a_{11}g_{22}g_{33}g_{44}g_{55}$.

2. Inscripción de la misma ecuación (1*) como ecuación principal (I) en la fila (1).

3. Inscripción de la ecuación dada (2*) en la fila (2).

4. Inscripción en la fila (3) del coeficiente $-a_{21}$ de la incógnita x_1 tal que $a_{21} - a_{21} = 0$, y multiplicación de la ecuación principal (I) por el factor $-(a_{21}/a_{11})$ en dicha fila (3). Para el control debe efectuarse la misma operación con s_1.

5. Obtención de la ecuación principal (II) en la fila (4) como suma de las filas (2) y (3). Puede como control obtenerse así $S_2 = s_2 + s_1$, que debe ser también la suma de los elementos de la fila (II).

6. Inscripción de la ecuación dada (3*) en la fila (5).

7. Inscripción en la fila (6) del coeficiente $-a_{31}$ de la incógnita x_1 tal que $a_{31} - a_{31} = 0$, y multiplicación de la ecuación principal (I) por el factor $-(a_{31}/a_{11})$ en dicha fila (6).

8. Inscripción en la fila (7) del coeficiente $-\Sigma_{III}(x_2)$ de la incógnita x_2 tal que $a_{32} + b_{12.3} - \Sigma_{III}(x_2) = 0$, y multiplicación de la ecuación principal (II) por el factor $-(\Sigma_{III}(x_2)/g_{22})$ en dicha fila (7).

9. Obtención de la ecuación principal (III) en la fila (8) como suma de las filas (5) a (7). Puede como control obtenerse así S_3, que debe ser también la suma de los elementos de la fila (III).

10. Sucesiva inscripción de las ecuaciones auxiliares y obtención de las principales en forma análoga, hasta llegar a escribir la última ecuación principal (V) en la fila (19).

11. Obtención retrógrada de las incógnitas x_5 a x_1 a partir de la última ecuación principal (V).

Aquí también, con la misma demostración que en el caso simétrico, el determinante del sistema valdrá $A = a_{11}g_{22}g_{33}g_{44}g_{55}$, siendo éste el método mejor para calcular numéricamente un determinante asimétrico o simétrico cualquiera.

d) Método de CHOLESKY-BANACHIEWICZ. — Para un sistema simétrico de ecuaciones lineales tal que la matriz del sistema sea definida positiva puede aplicarse el método de CHOLESKY-BANACHIEWICZ que necesita n extracciones de raíces cuadradas.

He aquí en instrucciones sucesivas la marcha del cálculo, a seguir para $n = 5$ (esquema D y aclarar en el ejemplo numérico en el esquema E; el mismo sistema de ecuaciones esta resuelto en GULDAN, citado en nota V, 8, por el método dado en c_1 y otro similar):

1. Inscripción de las ecuaciones dadas (1*) a (5*), omitiendo los coeficientes a la izquierda de la diagonal principal. Para mayor claridad en el esquema D se han escrito entre paréntesis los términos que no es necesario inscribir, como puede verse en el ejemplo numérico (esquema E). Es conveniente escribir también una columna de control cuyos elementos sean la suma s_i ($i = 1, \ldots, 5$) de los elementos de cada fila (incluso los omitidos) con (o sin) el término independiente.

2. Obtención de $g_{11} = \sqrt{a_{11}}$ y división de la ecuación (1*) por g_{11} para obtener así la ecuación principal (I) en la fila (1). Para el control debe efectuarse la misma operación con s_1 de modo que $S_1 = s_1/g_{11}$.

3. Inscripción de la ecuación dada (2*) en la fila (2).

4. Multiplicación de la ecuación principal (I) por el factor $-g_{12}$ en la fila (3). Para el control debe efectuarse la misma operación con S_1.

5. Obtención de $g_{22} = \sqrt{a_{22} + b_{12.3}}$, y división de la suma de las filas (2) y (3) por g_{22} para inscribir la ecuación principal (II) en la fila (4). Puede como control obtenerse así $S_2 = (s_2 + S_{1.2})/g_{22}$, que debe ser también la suma de los elementos de la fila (II).

6. Inscripción de la ecuación dada (3*) como fila (5).

7. Multiplicación de la ecuación principal (I) por el factor $-g_{13}$ en la fila (6) y de la ecuación principal (II) por el factor $-g_{23}$ en la fila

(7). Para el control deben efectuarse las mismas operaciones con S_1 y S_2.

8. Obtención de $g_{33} = \sqrt{a_{33} + b_{13.3} + b_{23.3}}$ y división de la suma de las filas (5) a (7) por g_{33} para inscribir la ecuación principal (III) en la fila (8). Puede como control obtenerse así $S_3 = (s_3 + S_{1.3} + S_{2.3}) / g_{33}$, que debe ser también la suma de los elementos de la fila (III).

ESQUEMA D. Método de CHOLESKY-BANACHIEWICZ para sistema simétrico con matriz definida positiva.

Marcha del cálculo	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	k	Control	
(1*)	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	k_1	s_1	
(2*)	(a_{12})	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	k_2	s_2	
(3*)	(a_{13})	(a_{23})	a_{33}	a_{34}	a_{35}	k_3	s_3	
(4*)	(a_{14})	(a_{24})	(a_{34})	a_{44}	a_{45}	k_4	s_4	
(5*)	(a_{15})	(a_{25})	(a_{35})	(a_{45})	a_{55}	k_5	s_5	
$g_{11} = \sqrt{a_{11}}$; $(I) = (1^*) / g_{11}$	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	K_1	S_1	(1)
(2*)	(a_{12})	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	k_2	s_2	(2)
$-g_{12} . (I)$	$(-a_{12})$	$b_{12.2}$	$b_{13.2}$	$b_{14.2}$	$b_{15.2}$	$K_{1.2}$	$S_{1.2}$	(3)
$g_{22} = \sqrt{a_{22} + b_{12.2}}$ $(II) = (1/g_{22}) \Sigma_{(2)}^{(3)}$		g_{22}	g_{23}	g_{24}	g_{25}	K_2	S_2	(4)
(3*)	(a_{13})	(a_{23})	a_{33}	a_{34}	a_{35}	k_3	s_3	(5)
$-g_{13} . (I)$	$(-a_{13})$	$(b_{13.2})$	$b_{13.3}$	$b_{14.3}$	$b_{15.3}$	$K_{1.3}$	$S_{1.3}$	(6)
$-g_{23} . (II)$		$(-g_{22}g_{23})$	$b_{23.3}$	$b_{24.3}$	$b_{25.3}$	$K_{2.3}$	$S_{2.3}$	(7)
$g_{33} = \sqrt{a_{33} + b_{13.3} + b_{23.3}}$ $(III) = (1/g_{33}) \Sigma_{(5)}^{(7)}$			g_{33}	g_{34}	g_{35}	K_3	S_3	(8)
(4*)	(a_{14})	(a_{24})	(a_{34})	a_{44}	a_{45}	k_4	s_4	(9)
$-g_{14} . (I)$	$(-a_{14})$	$(b_{14.2})$	$(b_{14.3})$	$b_{14.4}$	$b_{15.4}$	$K_{1.4}$	$S_{1.4}$	(10)
$-g_{24} . (II)$		$(-g_{22}g_{24})$	$(b_{24.3})$	$b_{24.4}$	$b_{25.4}$	$K_{2.4}$	$S_{2.4}$	(11)
$-g_{34} . (III)$			$(-g_{33}g_{34})$	$b_{34.4}$	$b_{35.4}$	$K_{3.4}$	$S_{3.4}$	(12)
$g_{44} = \sqrt{a_{44} + b_{14.4} + \ldots + b_{34.4}}$ $(IV) = (1/g_{44}) \Sigma_{(9)}^{(12)}$				g_{44}	g_{45}	K_4	S_4	(13)
(5*)	$(-a_{15})$	(a_{25})	(a_{35})	(a_{45})	a_{55}	k_5	s_5	(14)
$-g_{15} . (I)$	(a_{15})	$(b_{15.2})$	$(b_{15.3})$	$(b_{15.4})$	$b_{15.5}$	$K_{1.5}$	$S_{1.5}$	(15)
$-g_{25} . (II)$		$(-g_{22}g_{25})$	$(b_{25.3})$	$(b_{25.4})$	$b_{25.5}$	$K_{2.5}$	$S_{2.5}$	(16)
$-g_{35} . (III)$			$(-g_{33}g_{35})$	$(b_{35.4})$	$b_{35.5}$	$K_{3.5}$	$S_{3.5}$	(17)
$-g_{45} . (IV)$				$(-g_{44}g_{45})$	$b_{45.5}$	$K_{4.5}$	$S_{4.5}$	(18)
$g_{55} = \sqrt{a_{55} + b_{15.5} + \ldots + b_{45.5}}$ $(V) = (1/g_{55}) \Sigma_{(14)}^{(18)}$					g_{55}	K_5	S_5	(19)

De (V): $x_5 = K_5 / g_{55}$;
,, (IV): $x_4 = (K_4 - g_{45}x_5) / g_{44}$;
,, (III): $x_3 = (K_3 - g_{35}x_5 - g_{34}x_4) / g_{33}$;
,, (II): $x_2 = (K_2 - g_{25}x_5 - g_{24}x_4 - g_{23}x_3) / g_{22}$;
,, (I): $x_1 = (K_1 - g_{15}x_5 - g_{14}x_4 - g_{13}x_3 - g_{12}x_2) / g_{11}$;
$A = g_{11}^2 \, g_{22}^2 \, g_{33}^2 \, g_{44}^2 \, g_{55}^2$.

ESQUEMA E. Ejemplo de sistema simétrico con método de CHOLESKY-BANACHIEWICZ.

Marcha del cálculo	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	k	s	
(1*)	+ 26,50	+ 2,15	+ 3,40	+ 1,92	— 6,84	— 42,3	— 15,17	
(2*)		+ 32,40	+ 2,88	+ 3,05	— 5,75	— 26,5	+ 8,23	
(3*)			+ 38,80	+ 2,85	— 7,05	+ 5,4	+ 46,28	
(4*)				+ 29,10	— 4,90	+ 52,6	+ 84,62	
(5*)					+ 54,00	— 15,7	+ 13,76	
$g_{11} = \sqrt{26,50}$; $(I) = (1^*) / g_{11}$	+ 5,148	+ 0,418	+ 0,660	+ 0,373	— 1,329	— 8,217	— 2,947	(1)
(2*)		+ 32,40	+ 2,88	+ 3,05	— 5,75	— 26,50	+ 8,23	(2)
$- I_2 . (I)$		— 0,17	— 0,28	— 0,16	+ 0,56	+ 3,43	+ 1,23	(3)
$g_{22} = \sqrt{32,23}$; $(II) = \Sigma_{(2)}^{(3)} / g_{22}$		+ 5,677	+ 0,458	+ 0,509	— 0,914	— 4,064	+ 1,666	(4)
(3*)			+ 38,80	+ 2,85	— 7,05	+ 5,40	+ 46,28	(5)
$- I_3 (I)$			— 0,44	— 0,25	+ 0,88	+ 5,42	+ 1,94	(6)
$- II_3 (II)$			— 0,21	— 0,23	+ 0,42	+ 1,86	— 0,76	(7)
$g_{33} = \sqrt{38,15}$; $(III) = \Sigma_{(5)}^{(7)} / g_{33}$			+ 6,177	+ 0,384	— 0,931	+ 2,053	+ 7,683	(8)
(4*)				+ 29,10	— 4,90	+ 52,60	+ 84,62	(9)
$- I_4 . (I)$				— 0,14	+ 0,50	+ 3,06	+ 1,10	(10)
$- II_4 . (II)$				— 0,26	+ 0,47	+ 2,07	— 0,85	(11)
$- III_4 . (III)$				— 0,15	+ 0,36	— 0,79	— 2,95	(12)
$g_{44} = \sqrt{28,55}$; $(IV) = \Sigma_{(9)}^{(12)} / g_{44}$				+ 5,343	— 0,668	+ 10,657	+ 15,332	(13)
(5*)					+ 54,00	— 15,70	+ 13,76	(14)
$- I_5 . (I)$					— 1,77	— 10,92	— 3,92	(15)
$- II_5 . (II)$					— 0,84	— 3,71	+ 1,52	(16)
$- III_5 . (III)$					— 0,87	+ 1,91	+ 7,15	(17)
$- IV_5 . (IV)$					— 0,45	+ 7,12	+ 10,24	(18)
$g_{55} = \sqrt{50,08}$; $(V) = \Sigma_{(14)}^{(18)} / g_{55}$					+ 7,076	— 3,010	+ 4,063	(19)
Valor incógnitas	— 1,787	— 0,970	+ 0,148	+ 1,941	— 0,425			(20)

9. Sucesiva inscripción de las ecuaciones auxiliares y obtención de las principales en forma análoga, hasta llegar a escribir la última ecuación (V) en la fila (19). Si la matriz del sistema no fuera positiva definida aparecerán raíces cuadradas de números negativos con resultado imaginario.

10. Obtención retrógrada de las incógnitas x_5 a x_1 a partir de la última ecuación principal (V).

Si multiplicamos la ecuación (I) por g_{11}, la (II) por g_{22} y así sucesivamente, el sistema obtenido es el deducido de (1*), (2*), (3*), (4*), (5*), agregando a cada fila de estas últimas una combinación lineal de otras. Por tanto, es $A = g_{11}^2 g_{22}^2 g_{33}^2 g_{44}^2 g_{55}^2$.

e) Existen también otros métodos de resolución como el de B. I. CLASEN (Brux. Soc. Sc. 12, A, pág. 50-59; B, pág. 251-281; 1888), llamado también "método de los coeficientes iguales", y el de A. TERRACINI (*Un procedimiento para la resolución numérica de los sistemas de ecuaciones lineales*, Ricerche di Ingegneria, III, nº 2, 1935; trad. en Revista Electrotécnica, 27. pág. 427-436, Bs. As., 1941), de eliminación simultánea de incógnitas.

f) Si en la aplicación del método de GAUSS sólo se requieren dos o tres cifras significativas finales, basta el uso de la regla de cálculo, y entonces la obtención de todos los coeficientes de una misma ecuación auxiliar se hace con una sola posición de la reglilla determinada por el factor que modifica la respectiva ecuación principal de las anteriormente obtenidas; para evitar errores conviene escribir previamente todos los signos de los coeficientes a obtener, cosa fácil por resultar todos ellos los mismos o todos distintos respecto de los correspondientes de la ecuación principal que se modifica.

Por otra parte, el procedimiento así abreviado de GAUSS puede servir para controlar los resultados que se alcancen en forma más prolija. Se aconseja siempre en labores de compromiso, la colaboración de dos calculistas independientes que comparen sus resultados en cada oportunidad.

Existen formas condensadas de resolución apropiadas al uso de máquinas de calcular que mejoran los métodos de GAUSS-DOOLITTLE y de CHOLESKY-BANACHIEWICZ antes explicados.

g) *Métodos de aproximaciones sucesivas.* — Cuando el número de incógnitas es muy grande, por ejemplo en el cálculo de estructuras hiperestáticas en alto grado, la resolución directa del sistema de ecuaciones es muy laboriosa y entonces se recomienda emplear métodos de aproximaciones sucesivas.

Respecto del sistema [XVII-21], designemos por $r_1, r_2, \ldots, r_n$ un sistema de valores aproximados, y por $e_1, e_2, \ldots, e_n$ los respectivos errores de cada ecuación, tales que

[XVII-25] $$e_i = k_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si en la primera ecuación del sistema [XVII-21] sustituímos $x_2, x_3, \ldots, x_n$ por $r_2, r_3, \ldots, r_n$, en la segunda $x_1, x_3, \ldots, x_n$ por $r_1, r_3, \ldots, r_n$, y así sucesivamente en la n-ésima $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ por $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, obtendremos como nuevos valores "más aproximados de las incógnitas":

[XVII-26] $$x_1 = r_1 + (e_1/a_{11}) ; \quad x_2 = r_2 + (e_2/a_{22}) ; \quad \ldots ; \quad x_n = r_n + (e_n/a_{nn}) ;$$

éste es el llamado *método de iteración*, convergente cuando los coeficien-

tes de los términos diagonales preponderan en valor absoluto sobre la suma de valores absolutos de los demás coeficientes de los términos lineales en la misma ecuación.

En general es más conveniente el método sucesivo de P. L. SEIDEL (Münsch. Abh., *11*, Abt. *3*, pág. 81, 1874), donde se aprovechan en la segunda y posteriores ecuaciones los nuevos valores de las incógnitas que van obteniéndose en la *misma* etapa. Así se toma:

[XVII-27] $$\begin{cases} x_1 = r_1 + (k_1 - a_{11}r_1 - a_{12}r_2 - a_{13}r_3 - \ldots - a_{1n}r_n)/a_{11} , \\ x_2 = r_2 + (k_2 - a_{21}x_1 - a_{22}r_2 - a_{23}r_3 - \ldots - a_{2n}r_n)/a_{22} , \\ x_3 = r_3 + (k_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}r_3 - \ldots - a_{3n}r_n)/a_{33} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ x_n = r_n + (k_n - a_{n,1}x_1 - a_{n,2}x_2 - \ldots - \\ \qquad - a_{n,n-1}x_{n-1} - a_{n,n}r_n)/a_{n,n} . \end{cases}$$

Si designamos por **R** la matriz de una columna $\{r_i\}$ de los valores aproximados de partida, el método de R. VON MISES consiste en tomar como valores más aproximados los dados por la matriz de una columna $X = \{x_i\}$, tal que

[XVII-28] $$\mathbf{X} = \mathbf{R} + \alpha(\mathbf{K} - \mathbf{AR}) ,$$

donde α es un número real adecuadamente elegido para asegurar la buena convergencia del procedimiento.

Si la matriz A del sistema [XVII-21] de coeficientes reales lo es de una forma cuadrática positiva definida, sean $\eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \ldots \geqslant \eta_n > 0$ sus autovalores o raíces características, es decir. las de la ecuación

[XVII-29] $$\begin{vmatrix} a_{11}-\eta & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\eta & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\eta & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}-\eta \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

entonces se elige α tal que sea

[XVII-30] $$1/\alpha \geqslant \eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \ldots \geqslant \eta_n > 0 .$$

Para justificarlo, consideremos el método general de L. CESARI: *Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive* (Atti Accad. Lincei, Rend. VI, *25*, pgs. 422-428, 1937; Id. Rassegna delle Poste, dei Telegrafi e dei Telefoni, Anno IX, *4*, 37 pgs., 1937) que generalizando el de M. PICONE, sintetiza los métodos anteriores con estudio exacto de su convergencia.

Dado el sistema [XVII-21] de coeficientes reales o complejos, supongamos sea el determinante $A \neq 0$ y consideremos dos matrices **B** y **C** de tipo (n, n) y α un número real o complejo, tales que

[XVII-31] $$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} \; ; \; \mathbf{C} \neq 0 \; ; \; \mathbf{B} \neq 0.$$

Si ahora λ es un parámetro variable en el cuerpo complejo, **R** una matriz del tipo $(n, 1)$ arbitraria en el cuerpo complejo, el sistema

[XVII-32] $$(\mathbf{B} + \lambda\mathbf{C})\mathbf{X}(\lambda) = \alpha\mathbf{K} + (\lambda - 1)\mathbf{CR} ,$$

que para $\lambda = 1$ coincide con el sistema [XVII-23] = [XVII-21], tiene por solución la matriz $X(\lambda)$ de tipo $(n, 1)$, función racional de λ. Si r es el menor de los módulos de las raíces de la ecuación algebraica en λ:

[XVII-33] $$\mathbf{B} + \lambda\mathbf{C} = 0 ,$$

positivo por haber supuesto el determinante $B \neq 0$, entonces para todos los números $|\lambda| < r$ es convergente:

[XVII-34] $$X(\lambda) = X(0) + (\lambda/1!)X'(0) + (\lambda^2/2!)X''(0) + \dots ,$$

donde si $1 < r$, la $X = X(1)$ es la solución del sistema [XVII-21] = [XVII-23].

Si se pone

$$X_0 = X(0), \quad X_1 = X(0) + (1/1!)X'(0), \quad X_2 = X_1 + (1/2!)X''(0), \ \dots,$$

se deriva [XVII-32]

$$CX(\lambda) + (B + \lambda C)X'(\lambda) = CR \ ,$$

y se sigue derivando sucesivamente

$$(p+1)CX^{(p)}(\lambda) + (B + \lambda C)X^{(p+1)}(\lambda) = 0 \ , \quad (p = 1, 2, \dots) \ ,$$

basta hacer entonces $\lambda = 0$ y sumar para que resulte:

[XVII-35] $$BX_0 = \alpha K - CR; \quad BX_{(p+1)} = \alpha K - CX_p, \quad (p = 0, 1, 2, \dots).$$

Las igualdades [XVII-35] representan un algoritmo de aproximaciones sucesivas que tiene como valores iniciales para las incógnitas los elementos de la matriz R *y que converge cuando y sólo cuando converge la serie* [XVII-34] *para* $\lambda = 1$ *y por tanto si es* $r > 1$.

Este fundamental teorema de PICONE-CESARI fué dado por el primero para un grupo inicial nulo ($R = 0$) y ha sido generalizado por el segundo.

El método de iteración [XVII-26] no es más que la aplicación de [XVII-35] con $\alpha = 1$, si se toma

[XVII-36]

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{B} \qquad \mathbf{X} \quad = \quad \mathbf{K} \quad - \qquad \mathbf{C} \qquad \mathbf{R}$$

con $B + C = A$ cumpliendo [XVII-31].

El método de SEIDEL [XVII-27] resulta de tomar con $\alpha = 1$, primeramente para $x_1 = r_1'$, $x_2 = r_2$, $x_3 = r_3$, ..., $x_n = r_n$:

[XVII-37'] $$\begin{Bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} -$$

$$\mathbf{B} \qquad \mathbf{X} \quad = \quad \mathbf{K} \quad -$$

$$- \begin{Bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} - c_2 & a_{22} - 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} - c_3 & a_{32} & a_{33} - 1 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - c_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix},$$

$$- \qquad \mathbf{C} \qquad \mathbf{R}$$

donde $c_2 = a_{11}e_2/e_1$, $c_3 = a_{11}e_3/e_1$, ..., $c_n = a_{11}e_n/e_1$; después, para $x_1 = r_1'$, $x_2 = r_2'$, $x_3 = r_3$, ..., $x_n = r_n$:

[XVII-37''] $$\begin{Bmatrix} 1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_3 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_n & 0 & \dots & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} -$$

$$\mathbf{B} \qquad \mathbf{X} \quad = \quad \mathbf{K} \quad -$$

$$- \begin{Bmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} - c_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} - c_3 & a_{33} - 1 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} - c_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} - 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1' \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix},$$

$$- \qquad \mathbf{C} \qquad \mathbf{R}$$

donde $c_1 = a_{22}e_1/e_2$, $c_3 = a_{22}e_3/e_2$, ..., $c_n = a_{22}e_n/e_2$, y así sucesivamente.

El método de VON MISES resulta de tomar

[XVII-38] $$B + \lambda C = I + \lambda(\alpha A - I) \ ,$$

donde I es la matriz unidad $\begin{Bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Bmatrix}$ y α es un número real que cumple [XVII-30] para A matriz de una forma cuadrática definida positiva. En efecto, la ecuación [XVII-29] escrita

[XVII-29'] $$A - \eta I = 0 \ ,$$

se convierte en la [XVII-33] por el cambio

[XVII-39] $$\lambda = 1/(1 - \alpha\eta) \ ,$$

pues en [XVII-38] quedará

$$B + \lambda C = \alpha(A - \eta I)/(1 - \alpha\eta) \ ,$$

que muestra es [XVII-29'] equivalente a [XVII-33] si es siempre $1 - \alpha\eta_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, es decir, si se cumple [XVII-30].

Por ser

$$\lambda_i = 1/(1 - \alpha\eta_i) \geqslant 1/(1 - \alpha\eta_n) = \lambda_n \geqslant r \ , \quad (i = 1, 2, \dots, n) \ ,$$

habrá de cumplirse

[XVII-40] $$1/(1 - \eta_n : \eta_1) \geqslant r > 1 \ ,$$

y entonces cuanto mayor sea la razón η_1/η_n, tanto más se acerca r a 1 y la convergencia del método de VON MISES es más deficiente; prácticamente resulta inaplicable para $\eta_1/\eta_n > 10$.

Una evaluación aproximada de η_1 para ensayar en [XVII-40] un valor aproximado de α viene dada por

[XVII-41] $$|\eta_1| < \underset{i=1.2,\dots,n}{\text{Máx}} (|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{in}|) \ ,$$

pues para $\eta = \eta_h$, al verificarse [XVII-29], existirán valores de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ no todos nulos tales que:

$$\left\{ \begin{matrix} \eta_h \xi_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n \ , \\ \eta_h \xi_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_h \xi_n = a_{n2}\xi_2 + a_{n1}\xi_1 + \dots + a_{nn}\xi_n \ , \end{matrix} \right. \quad (h = 1, 2, \dots, n) \ ,$$

y suponiendo por ejemplo que $|\xi_i|$ es el mayor de los módulos $|\xi_1|$, $|\xi_2|, \ldots, |\xi_n|$, será

$$|\eta_h| \leqslant |a_{i1}| + |a_{i2}| + \ldots + |a_{in}| \quad , \quad (h = 1, 2, \ldots, n) \quad ,$$

de donde se deduce seguramente [XVII-41].

Observemos que en el trabajo de CESARI, aunque referido a un ejemplo de tres ecuaciones de coeficientes positivos, se pone descuidadamente sin demostración como cota superior de las raíces el

$$\underset{i=1,2,3}{\text{Máx}} \; (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}).$$

Para ver que en general no pueden suprimirse en el segundo miembro de [XVII-41] las barras de valor absoluto, sea la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -8 \\ 0 & -8 & 9 \end{matrix} \right\}$$

de una forma cuadrática definida positiva, pues $A = 17 > 0$, $A_{33} = 9 > 0$, $a_{11} = 1 > 0$. La ecuación característica correspondiente es

$$A(\eta) = \begin{vmatrix} 1-\eta & 0 & 0 \\ 0 & 9-\eta & -8 \\ 0 & -8 & 9-\eta \end{vmatrix} = -\eta^3 + 19\eta^2 - 35\eta + 17 = 0 \quad ,$$

con $A(2) = 15 > 0$ y $A(+\infty) < 0$, lo que prueba es

$$\eta_1 > 2 > 1 = \underset{i=1,2,3}{\text{Máx}} \; (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}).$$

Un estudio más detenido de los métodos iterativos, con mejoras importantes, ha sido realizado por H. HOTELLING: *Some new methods in matrix calculation* (Annals of Math. Statistics, *14*, 1943, pág. 1-34).

Un criterio de convergencia en el que se prescinde de los autovalores η se encuentra en P. E. ZADUNAISKY: *Un método de iteración para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas* (Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. XVII, 1955).

h) Elección de valores aproximados iniciales. Método del sistema reducido. — Ya hemos visto que en todo método de aproximaciones sucesivas convergentes podíamos elegir la matriz **R**, de valores iniciales, *arbitraria*. Esto constituye una de las importantes ventajas del método, pues cualquier error no descubierto va sucesivamente eliminándose, aunque alargue el número de etapas de aproximación a efectuar. Sin embargo para acortar éstas y operar en forma rápidamente convergente, es importante partir de valores iniciales que sean aproximados lo menos groseramente posible.

En el caso favorable usual en que el valor absoluto del coeficiente del término diagonal supera a la suma de los valores absolutos de los demás coeficientes de los términos lineales en la misma ecuación, suele tomarse en [XVII-21]:

[XVII-42] $$r_i = k_i / a_{ii} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad ,$$

lo que equivale a suponer inicialmente despreciables los demás términos lineales respecto del diagonal.

En otros casos, se igualan a x_1, todas las incógnitas en la primera ecuación, a x_2 en la segunda y así sucesivamente, obteniéndose

[XVII-43] $$r_i = k_i / \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

El *método del sistema reducido*, debido a R. GULDAN (citado en nota V, 8), aplicable al cálculo de estructuras muy hiperestáticas, consiste en elegir del sistema dado un núcleo de ecuaciones en pequeño número para resolverlo en forma directa y completa; como en dicho núcleo figurarán más incógnitas que ecuaciones, en vez de anular groseramente las

sobrantes o seguir otro ciego arbitrio cualquiera, se tiene en cuenta su significación mecánica y el hecho de que en las ecuaciones nodales figuren las deformaciones de giro en los nodos vecinos. Entonces se efectúa una *evaluación relativa* de las incógnitas de deformación sobrantes, mediante su *relación* con las deformaciones vecinas, que figuran como incógnitas propias del núcleo de ecuaciones a resolver; aunque no se conozcan previamente los valores de las deformaciones incógnitas, las características de la estructura que se calcule suelen permitir efectuar una evaluación muy aproximada de la razón en que deben estar dos deformaciones de giro vecinas.

Así, con la resolución de un reducido grupo de ecuaciones, se consigue obtener valores muy aproximados para las incógnitas de partida, base apropiada para la determinación de las demás incógnitas mediante cada una de las ecuaciones restantes, que se emplean una a una para determinar cada nueva incógnita en valor aproximado, sustituyendo las variables ya conocidas por sus valores y las demás que aún puedan existir por una "evaluación relativa" como los anteriormente empleados. Cada nueva incógnita determinada puede ser comprobada someramente por su "evaluación relativa" antes aplicada para corregir así gruesos errores.

Una vez conocidos valores iniciales aproximados para todas las incógnitas en esta primera etapa del cálculo, se pasa a la segunda etapa para mejorar dichos valores. Entonces puede emplearse el método de SEIDEL usual de aproximaciones sucesivas o volver a aplicar el sistema reducido con aún menor número de ecuaciones de partida, donde las "evaluaciones relativas" a efectuarse están ahora facilitadas por los valores aproximados ya conocidos. Mejorados así todos los valores, la convergencia es tan rápida que en una nueva etapa, los valores alcanzados son ya sensiblemente los mismos que los anteriores dentro de la aproximación requerida en la Construcción, pero en casos especiales puede procederse a efectuar las etapas sucesivas de aproximación que eventualmente fuesen necesarias.

El significado mecánico del método es inmediato. El sistema reducido se refiere a una pequeña parte de la estructura imaginada aislada y las incógnitas sobrantes son las deformaciones de giro de los nodos vecinos a los nodos que están en la parte aislada y con relación a los cuales se evalúan aproximadamente. El método es especialmente útil en estructuras de nodos desplazables, donde los términos correspondientes a los corrimientos de éstos perturban la convergencia de los procedimientos usuales de iteración. Lo mismo ocurre cuando la estructura presenta partes irregulares; conviene siempre comprender en el sistema reducido esas partes, y las de contorno, donde las reacciones exteriores influyen también especialmente en las deformaciones que figuran como incógnitas.

V. Bibliografía. — 1. Los orígenes del Cálculo vectorial pueden ubicarse en los trabajos de HAMILTON (1843) y de GRASSMANN (1844), que adoptaron puntos de vista diferentes, y cuyas ideas pueden verse en las obras de valor histórico:

W. R. HAMILTON: *Lectures on quaternions.* (Dublín, 1853).

W. R. HAMILTON: *Elements of quaternions.* (Londres, 1866).

H. G. GRASSMANN: *Die lineare Ausdehnungslehre.* (Wigand, Leipzig, 1844, 1878).

H. G. GRASSMANN: *Die Ausdehnungslehre.* (Berlín, 1862; Leipzig, 1894, 1896).

De esta última obra hay traducción castellana: *Teoría de la extensión. Nueva disciplina matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones.* (Col. Historia y Filosofía de la Ciencia; Espasa-Calpe, Argentina, Bs. As.-México, 1947).

Debido tal vez al carácter muy abstracto de los trabajos de GRASSMANN, ha privado en el desarrollo ulterior de la teoría la influencia de HAMILTON con su álgebra de los cuaterniones (Cap. II, nota III, *d*) y

sus aplicaciones mecánicas. No obstante, las ideas de GRASSMANN tuvieron algunos defensores y continuadores tenaces; así, C. BURALI-FORTI, en el Prefacio de su *Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de* GRASSMANN (Gauthier-Villars, París, 1897), dice: "Las obras de HAMILTON son precedidas por la *Ausdehnungslehre* de GRASSMANN (1844) que, por la potencia y la simplicidad de las operaciones, sobrepasa a todos los otros cálculos geométricos. La forma de exposición, excesivamente abstracta, adoptada por GRASSMANN, ha retardado la difusión de la *Ausdehnungslehre*, de suerte que aún hoy se emplea el cálculo baricéntrico, la teoría de las equipolencias, o los cuaterniones, y con más frecuencia aún la geometría cartesiana, para resolver cuestiones geométricas que tienen una solución muy simple con el método de GRASSMANN". También F. KLEIN, en el volumen II (*Geometría*) de su obra citada en Cap. I, nota IV, 12, da gran importancia a las ideas de GRASSMANN, basándose en ellas para muchos de sus desarrollos.

De uno de los discípulos de HAMILTON es la obra:

P. G. TAIT: *An elementary treatise on quaternions*; (Oxford, 1867; Cambridge, 1873, 1890),

que tuvo gran influencia en su época, pero el cálculo de HAMILTON se transformó por completo gracias a HEAVISIDE y GIBBS, quienes lo convirtieron en un instrumento más adecuado a las necesidades de la Física, y cuyas ideas están expuestas en:

O. HEAVISIDE: *Electromagnetic theory*; (Londres, 1894),

y en la obra clásica aún en uso, que en sucesivas ediciones y reimpresiones se publica desde 1901:

J. W. GIBBS y E. B. WILSON: *Vector analysis*. (Yale Univ. Press, New Haven, 7ª impresión, 1931).

Otra obra clásica, de gran valor histórico por la influencia que ha ejercido, es:

C. BURALI-FORTI y R. MARCOLONGO: *Elementi di calcolo vettoriale*; (Zanichelli, Bolonia, 1909, con reedición posterior; traducción francesa, París, 1910),

completada en:

C. BURALI-FORTI y R. MARCOLONGO: *Analisi vettoriale generale e applicazioni*. (4 vols., 2ª ed., Zanichelli, Bolonia, 1929; trad. francesa, París, 1929).

También es clásica y excelente

J. B. POMEY: *Principes de calcul vectoriel et tensoriel*; (Chiron, París, 1923),

y su contemporáneo

A. CHATELET y J. KAMPÉ DE FÉRIET: *Calcul vectoriel. Théorie. Applications géométriques et cinématiques*. (Gauthier-Villars, París, 1924).

Inspirándose en

J. G. COFFIN: *Vector analysis*; (Wiley, Nueva York, 2ª ed., 1911; trad. francesa de A. VÉRONNET, París, 1914),

siguió la obra de desarrollo y de términos originales, poco divulgados, pero con notación muy simplificada, de

A. VÉRONNET: *Le calcul vectoriel. Cours d'Algebre, de Mathématiques spéciales et de Mathématiques générales*. (Gauthier-Villars, París, 1933).

Obras contemporáneas en alemán son:

C. RUNGE: *Vektoranalysis*; (2 vols., Hirzel, Leipzig, 2ª ed., 1926; hay traducción inglesa: *Vector Analysis*, Duttun, Nueva York, 1919);

M. LAGALLY: *Vorlesungen über Vektorrechnung*. (Akad. Verlag., Leipzig, 6ª ed., 1959);

W. V. INGNATOWSKY: *Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik*. (2 vols., Teubner, Leipzig, 3ª ed., 1926).

2. Contienen adecuados desarrollos sobre álgebra vectorial muchas obras de contenido más amplio dentro del cálculo y análisis vectorial y tensorial:

Una excelente introducción elemental con aplicaciones diversas y en especial a la Geometría analítica, dan los tres primeros capítulos del pequeño libro:

R. BRICARD: *Le calcul vectoriel*. (Colin, París, 7ª ed., 1950).

Con la misma finalidad geométrica, introduce el método vectorial y cálculo de matrices en forma didáctica, con todo rigor y orientación superior, la excelente obra:

L. BIEBERBACH: *Analytische Geometrie*; (Teubner, Berlín, 2ª ed., 1932); refundida en: *Einführung in die analytische Geometrie* (4ª ed., Verlag f. Wiss. u. Fachbuch; Bielefeld, 1950);

continuada en

L. BIEBERBACH: *Projektive Geometrie*, (Teubner, Berlín, 1931);

L. BIEBERBACH: *Differential Geometrie*, (Teubner, Berlín, 1932).

Una exposición precisa, orientada hacia las aplicaciones, da la pequeña obra alemana traducida a varios idiomas, entre ellos el castellano:

R. GANS: *Introducción al análisis vectorial*. (Labor; Barcelona-Bs. As.; 2ª ed., 1940, traducción de la 5ª ed. alemana).

También con diversas aplicaciones geométricas y físicas están los siguientes cursos didácticos, citados en orden de dificultad de estudio, el primero traducido del inglés:

H. B. PHILLIPS: *Análisis vectorial*. ("UTEHA", México, 1946).

J. H. TAYLOR: *Vector analysis with an introduction to tensor analysis*. (Prentice Hall, Nueva York, 1939).

H. V. CRAIG: *Vector and tensor analysis*. (McGraw-Hill, Nueva York, 1ª ed., 5ª impr., 1943).

Comenzando con una discusión sobre números reales y complejos, da una clara exposición de los elementos de Álgebra vectorial:

H. SCHMIDT: *Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung unter besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischer Bedeutung*. (VEB Verlag Technik, Berlín, 1953).

Basado en lecciones de su autor en la Universidad de San Pablo y destinado a dar la base mínima indispensable para estudios de ingeniería es el pequeño libro, de exposición simple y precisa:

J. O. MONTEIRO DE CAMARGO: *Cálculo vectorial*. (Ed. Renascença, San Pablo, 1946).

De carácter más abstracto, con método axiomático y diversas aplicaciones geométricas, es:

P. PI CALLEJA: *Introducción al álgebra vectorial*. (Univ. de Cuyo, Bs. As., 1945).

Una exposición didáctica, con numerosos ejemplos y ejercicios con respuesta cuando ella es necesaria, y extensas aplicaciones a la Geometría y a la Estática, es:

S. NARAYAN: *A text book of vector algebra (with applications)*. (Chand and Co., Delhi, 1954).

Trata el Álgebra vectorial con rico material de aplicaciones geométricas el libro siguiente, que aunque de contenido elemental presupone una cierta madurez matemática:

L. CHATTELUN: *Calcul vectoriel. I. Algèbre. Algèbre linéaire. Applications*. (Gauthier-Villars, París, 1952).

Estudio detenido del Álgebra y Análisis vectorial y aplicaciones a la Geometría diferencial de curvas y superficies, da:

G. BOULIGAND: *Les principes de l'analyse géométrique. I. Leçons de Géométrie vectorielle. Préliminaires à l'étude de la théorie d'*EINSTEIN. (3ª ed., 1949); II. (A) *Opérations et Groupes. Topologies*; (B) *Géometrie infinitésimale directe. Base méthodologique* (1950), (Vuibert, París).

Una exposición articulada con los conceptos fundamentales y estructuras algebraicas del Álgebra moderna da:

T. L. WADE: *The Algebra of vectors and matrices*. (Addison-Wesley; Cambridge, Mass.; 1951).

Por la variedad y riqueza de su contenido, debe destacarse la obra con numerosos ejemplos y ejercicios, muchos de los cuales amplían la teoría con tópicos no tratados en los textos comunes:

L. BRAND: *Vector and tensor analysis*. (Wiley, Nueva York, 3ª ed., 1948).

Cubre un amplio conjunto de tópicos de Matemática y Física, comenzando con un primer capítulo sobre Álgebra vectorial en E_3 y terminando con una introducción a los operadores lineales en el espacio de HILBERT, el libro enciclopédico, que busca dar una exposición unificada sobre vectores, matrices, tensores y operadores lineales, y una orientación en el cúmulo de aplicaciones, aunque sin alcanzar nunca mucha profundidad:

F. OLLENDORFF: *Die Welt der Vektoren. Einführung in Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren*. (Springer, Viena, 1950).

3. Sobre transformaciones lineales y matrices están las obras de MAC DUFFEE y de VAN DER WAERDEN citadas en Cap. III, nota II, 4. Exposiciones elementales contienen la obra de FRAZIER, DUNCAN y COLLAR citada en Cap. III, nota II, 4; los capítulos centrales de la excelente de BIRKHOFF-MAC LANE citada en Cap. I, nota IV, 5; la de AITKEN citada en Cap. X, nota V, 3; y las siguientes:

R. R. STOLL: *Linear algebra and matrix theory*, (McGraw-Hill, Nueva York, 1952);

W. L. FERRAR: *Finite matrices*, (Clarendon Press, Oxford, 1951); y las citadas en la segunda edición del volumen I (Cap. III, nota II, 2):

R. A. BEAUMONT y R. W. BALL: *Introduction to modern algebra and matrix theory*, (Rinehart, Nueva York, 1954);

M. MORAND: *Introduction mathématique aux théories physiques modernes. 1re. partie: Nombres complexes, nombres hypercomplexes, matrices, opérateurs, applications élémentaires*, (Lib. Vuibert, París, 1947);

F. NEISS: *Determinanten und Matrizen*. (Springer, Berlín, 3ª ed., 1948).

Orientadas para ingenieros están las obras, citadas en la segunda edición y siguientes del volumen I (Cap. III, nota II, 4):

M. DENIS-PAPIN y A. KAUFMANN: *Cours de Calcul matriciel appliqué*, (Albin Michel, París, 1951);

R. ZURMÜHL: *Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure*. (Springer, Berlín, 1950).

Un estudio completo de los determinantes de cualquier número de dimensiones contiene:

M. LECAT: *Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions*. (Hermann, París, 1910).

Una exposición condensada en 50 páginas, de la teoría de las matrices finitas y algunas de sus aplicaciones, es la primera de las dos partes independientes de la obra:

M. JANET: *Précis de calcul matriciel et de calcul opérationnel*. (Presses Univ. de France, París, 1954).

Valiosa introducción a los conceptos del Álgebra lineal y la teoría de las matrices es:

H. SCHWERDTFEGER: *Introduction to linear algebra and the theory of matrices*. (Noordhoff, Groningen, 1950).

Presentación moderna pero elemental de la teoría de las formas canónicas de matrices en distintos grupos de transformaciones lineales da:

S. PERLIS: *Theory of matrices*. (Addison-Wesley; Cambridge, Mass.; 1952).

Introducción a la matemática lineal dirigida a los físicos es la obra siguiente, que puede considerarse como versión modernizada de la famosa obra de COURANT-HILBERT (citada en Cap. XVI, nota IV, 4):

A. LICHNEROWICZ: *Algèbre et analyse linéaires*. (Masson. París. 1947). Utilizando el lenguaje geométrico intrínseco en el álgebra lineal, con-

duce al lector desde nociones rudimentarias hasta los problemas más difíciles de la teoría de los grupos clásicos, la excelente obra:

E. ARTIN: *Geometric algebra* (Interscience, Nueva York, 1957).

Traducción del tratado en dos volúmenes: *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra* (Teubner, Leipzig, 1931, 1935), con ejemplos que en muchos casos dan valiosos complementos al texto, es

O. SCHREIER y E. SPERNER: *Introduction to modern Algebra and matrix theory*. (Chelsea, Nueva York, 2ª ed., 1959).

A las mismas ideas responde la obra:

R. GARNIER: *Leçons d'algèbre et de géométrie*. (3 vols., Gauthier-Villars, París, 1935, 1936, 1937).

Dando atención adecuada a las transformaciones afines, siempre más descuidadas que las proyectivas y las euclídeas, está el texto de introducción, sintético y axiomático:

H. S. M. COXETER: *The real projective plane*. (McGraw-Hill, Nueva York, 1949).

Obra orientada a satisfacer las necesidades de quienes por trabajar en campos como mecánica cuántica, teoría de circuitos, etc., necesitan aplicar la teoría de matrices y no han adquirido en su formación matemática completa familiaridad con ella, es:

H. PUPKE: *Einführung in die Matrizenrechnung und ihre physikalischen Anwendungen*. (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1953).

El Álgebra lineal se desarrolla sin determinantes, dado el propósito de servir de introducción al caso de infinitas dimensiones, en las obras:

P. R. HALMOS: *Finite dimensional vector spaces*, (Princeton Univ. Press, 1948);

H. HAMBURGER y M. E. GRIMSHAW: *Linear transformations in n-dimensional vector spaces. An introduction to the theory of* HILBERT *space*. (Cambridge Univ. Press, 1951).

Aunque adopta un punto de vista conceptual abstracto, con frecuencia adopta métodos constructivos de cálculo directo, la excelente exposición con valiosos ejercicios y plena de ideas y técnicas nuevas aún en temas clásicos, y cuyo primer volumen se ha citado en la segunda edición y siguientes de nuestro vol. I (Cap. I, nota IV, 7):

N. JACOBSON: *Lectures in abstract algebra*. Vol. II. *Linear algebra*. (Van Nostrand, Toronto-Nueva York-Londres, 1953).

La teoría de las formas cuadráticas en el grupo ortogonal, desde un punto de vista moderno y considerando aquellas formas como métricas en un espacio vectorial sobre un cuerpo cualquiera, se desarrolla en la excelente obra, no adecuada para principiantes:

M. EICHLER: *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*. (Springer, Berlín, 1952).

Remozando la ya anticuada exposición de M. ABRAHAM, ahora sólo de carácter enciclopédico e histórico, aparecida en la 1ª edición de la Enciclopedia alemana (IV, 14; citada en el vol. I, Plan de la obra, 3), está la reciente de

G. PICKERT: *Lineare Algebra. Normalformen von Matrizen*. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I, 1, 7. Band I. *Algebra und Zahlentheorie*. 1. Teil B. *Algebra*. Heft 3, Teil I, pág. 1-72; Teubner, Leipzig, 1953).

4. Además de las obras antes citadas sobre Geometría lineal y cuadrática, tratan de las curvas y superficies de segundo grado los textos de Geometría analítica y proyectiva.

Libros excelentes, de interés siempre actual, son los de

G. SALMON: *A treatise on conic sections*, (1848; 6ª ed., Londres, 1879; reeditado por Chelsea, Nueva York, 1954; trad. francesa: *Géométrie analytique*; Gauthier-Villars, 1897; trad. española, R. Pita, El Ferrol, s. f.).

G. SALMON: *Analytic geometry of three dimensions.* (1862; vol. I, 7ª ed., 1928, vol. II, 5ª ed., 1915; Hodge Smith, Dublin; trad. alemana mejorada conteniendo coordenadas proyectivas, de W. FIEDLER, 1879-80; reed. K. KOMMERELL; 2 vols., 5ª ed., Leipzig, 1922-23; trad. francesa, Gauthier-Villars, 1899).

Apropiado para principiantes está

W. GRAUSTEIN: *Introduction to higher geometry.* (Macmillan, Nueva York, 1930).

De carácter más elevado y conteniendo geometría proyectiva compleja es

J. A. TODD: *Projective and analytical geometry.* (Pitman, Nueva York, 1946).

Excelente tratado clásico es

O. VEBLEN y J. W. YOUNG: *Projective geometry.* (2 vols., Ginn, Boston, 1910-1918).

Una breve obra, excelente y original, con interesantísimas acotaciones históricas y bibliográficas, conteniendo la geometría plana y del espacio que lleva a las cónicas y a las cuádricas en el triple cuadro de las transformaciones métricas, afines y proyectivas, es

D. J. STRUIK: *Lectures on analytic and projective geometry.* (Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953).

En francés son clásicas las obras siguientes:

J. BRIOT y J. C. BOUQUET: *Leçons de géométrie analytique,* (1846, 14ª ed., París, 1893);

N. NIEWENGLOWSKI: *Cours de géométrie analytique.* (4 vols., Gauthier-Villars, París, 3ª ed., 1925-26-29).

Más moderno es

L. GODEAUX y O. ROZET: *Leçons de géométrie projective.* (2ª ed., Sciences et Lettres, Lieja, 1952).

Trata de geometría proyectiva compleja

E. CARTAN: *Leçons sur la géométrie projective complexe.* (Gauthier-Villars, París, 1931).

Textos clásicos en italiano son:

F. ENRIQUES: *Lezioni di geometria proiettiva,* (Zanichelli, 5ª ed., Bolonia, 1926);

L. BIANCHI: *Lezioni di geometria analitica,* (Pisa, 1920);

G. CASTELNUOVO: *Lezioni di geometria analitica,* (Dante Alighieri, Milán, 7ª ed., 1928; trad. al castellano, Mundo Científico, La Plata, 1943);

L. BERZOLARI: *Geometria analitica,* (2 vols., Hoepli, Milán, 2ª ed., 1922);

F. AMODEO: *Lezioni di geometria proiettiva,* (Pierro, Nápoles, 3ª ed., 1920);

E. BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* (Principato, Mesina, 2ª ed., 1923).

Textos clásicos en alemán son:

CH. V. STAUDT: *Die Geometrie der Lage,* (1847; trad. italiana, Turín, 1889);

TH. REYE: *Die Geometrie der Lage,* (1866; vol. I, 3ª ed., 1886; vol. II, 2ª ed., 1882; traducciones francesa, inglesa e italiana);

A. CLEBSCH y F. LINDEMANN: *Volesungen über Geometrie.* (2 vols.; Leipzig, vol. I, 2ª ed., 1932; 1ª ed., 1875/76-1891).

Más modernos son:

L. HEFFTER y C. KOEHLER: *Lehrbuch der analytischen Geometrie,* (vol. I, 2ª ed., Karlsruhe, 1927; vol. II (*Heffter*), Berlín, 1923);

A. SCHÖNFLIESS y M. DEHN: *Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes,* (Berlín, 1931);

W. BLASCHKE: *Analytische Geometrie* (2ª ed., Birkhäuser, Basilea, 1954); *Projektive Geometrie.* (Wolfenbüttel, Hannover, 1947; 3ª ed., Birkhäuser, Basilea, 1954).

En castellano, incluyen proyectiva compleja,

E. TORROJA: *Geometría de la posición* (Madrid, 1898);

J. REY PASTOR: *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior* (Madrid, 1916).

Menos elevados son:

J. PASCALI y R. M. ORTIZ: *Geometría proyectiva y ejercicios,* (2 vols., Centro Est. de Ing., Bs. As., 2ª ed., 1942);

y el muy elemental texto de:

H. CEPPI y A. M. FOURNIER: *Geometría Proyectiva* (Kraft, Bs. As., 1951).

En Geometría analítica merecen citarse, el muy completo texto de CÁMARA TECEDOR (citado en Cap. X, nota V, 7), el didáctico de

M. VEGAS: *Elementos de Geometría analítica.* (J. Peláez, Toledo, 3ª ed., 1922; 2ª ed. más completa);

y el reciente de:

J. REY PASTOR, L. A. SANTALÓ y M. BALANZAT: *Geometría analítica,* (Kapelusz, Bs. As., 1962).

5. Además de las obras citadas en 2, el Cálculo tensorial puede estudiarse en los clásicos:

E. BUDDE: *Tensoren und Dyaden in dreidimensionales Raum,* (Vieweg, Braunschweig, 1914);

P. APPELL: *Traité de mécanique rationnelle; Tome V: Calcul tensoriel,* (Gauthier-Villars, París, 2ª ed., 1933);

G. JUVET: *Introduction au Calcul tensoriel et au Calcul différentiel absolu.* (Blanchard, París, 1922).

Una introducción didáctica con aplicaciones diversas, es:

A. J. MCCONNELL: *Applications of the absolute differential Calculus.* (Blackie, Glasgow, reimpr., 1936).

La obra clásica por excelencia es:

T. LEVI CIVITA: *Lezioni di calcolo differenziale assoluto,* (Zanichelli, Bolonia, 1925; trad. inglesa, Londres, 1927),

a la cual siguió una extensísima bibliografía sobre teoría de la relatividad, de la que son clásicas las obras de H. WEYL, A. S. EDDINGTON, A. EINSTEIN, O. VEBLEN, el mismo LEVI CIVITA, etc.

En castellano pueden citarse:

J. M. PLANS FREYRE: *Nociones de cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones,* (Madrid, 1924);

E. BUTTY: *Introducción a la Física matemática.* (2 vols., Univ. de Bs. As., 1931-34);

J. REY PASTOR: *Algebra tensorial,* (Univ. Montevideo, 1936);

y los modernos excelentes libros, ya plenamente físicos:

E. TERRADAS y R. ORTIZ: *Relatividad* (Espasa-Calpe, Bs. As., 1952);

E. LOEDEL: *Física relativista* (Kapelusz, Bs. As., 1955).

Aplicaciones a la Geometría diferencial de E_3 y a la Mecánica da

I. S. SOKOLNIKOFF: *Tensor analysis. Theory and applications.* (Wiley, Nueva York, 1951).

Del mismo autor de otras obras más geométricas sobre el mismo tema es la excelente exposición del análisis tensorial y aplicaciones a la teoría lineal de la elasticidad, dinámica, relatividad y mecánica cuántica:

J. A. SCHOUTEN: *Tensor analysis for physicists.* (Clarendon Press, Oxford, 1951).

Orientado a estudiantes de ingeniería, con ejemplos y ejercicios:

M. DENIS-PAPIN y A. KAUFMANN: *Cours de calcul tensoriel appliqué.* (*Géométrie différentielle absolue*). (Albin Michel, París, 1953).

Una exposición lúcida que va de ideas intuitivas a conceptos abstractos, con numerosos ejemplos y aplicaciones varias, es:

B. FINZI y M. PASTORI: *Calcolo tensoriale e applicazioni.* (Zanichelli, Bolonia, 1949).

De carácter más elevado es la obra en tres tomos:

A. DUSCHEK y A. HOCHRAINER: *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung.* (Springer, Viena, I Teil: *Tensoralgebra*, 4ª ed., 1960; II Teil: *Tensoranalysis*, 2ª ed., 1961, con respuestas a ejercicios de I y II; III Teil: *Anwendungen in Physik und Technik*, 1955).

Un excelente compendio, escrito en estilo simple y claro, constituyendo una buena introducción a las obras de E. CARTAN y al método del triedro móvil, es el pequeño libro de carácter superior:

A. LICHNEROWICZ: *Éléments de calcul tensoriel.* (Colin, París, 1950).

6. Un extenso capítulo sobre valores propios de matrices contiene la excelente exposición de

L. COLLATZ: *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen.* (Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949).

Adaptación a calculadoras automáticas digitales de dos algoritmos para resolver el problema indicado en el título, da:

W. GIVENS: *Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix.* (Oak. Ridge Nat. Laboratory, 1954).

7. Los espacios euclidianos de n dimensiones están brevemente descritos en forma relativamente intuitiva en el libro elemental:

J. FAVARD: *Espace et dimension.* (Albin Michel, París, 1950).

Del mismo tipo, aunque de alcance más amplio, está la cautivante y amena obrita con acotaciones históricas:

G. VERRIEST: *Les nombres et les espaces.* (Colin, París, 1951).

8. Un breve y valioso capítulo sobre resolución de sistemas de ecuaciones lineales con muchas incógnitas trae:

R. GULDAN: *Rahmentragwerke und Durchlaufträger.* (Springer, Viena, 4ª ed., 1949).

Da una serie de métodos pivotales para resolver sistemas de ecuaciones lineales y problemas conexos la obra (citada en la 2ª ed. y siguientes del vol. I; Cap. V, nota IV, 3):

P. S. DWYER: *Linear computations.* (Wiley, Nueva York, 1951).

Exposición de procedimientos numéricos adecuados para calculadoras digitales automáticas, con secciones sobre valores propios y vectores propios de matrices, y sistemas de ecuaciones lineales, es la obra citada en la 2ª edición del vol. I (Cap. X, nota V, 4):

A. S. HOUSEHOLDER: *Principles of numerical analysis.* (McGraw-Hill, Nueva York, 1953).

Con dos capítulos sobre sistemas de ecuaciones lineales donde se introducen las ideas básicas y los recursos de aceleración de convergencia en los métodos "de relajación" de aproximaciones sucesivas, está:

D. N. DE G. ALLEN: *Relaxation methods.* (McGraw-Hill, Nueva York, 1954).

Mediante el uso de matrices y en vistas a la aplicación a problemas geodésicos, realiza una clara sistematización con precisas instrucciones para el calculista, la altamente recomendable exposición de:

P. L. BAESTLÉ: *Systématisation des calculs numériques de matrices.* (Bulletin géodésique, *19*, págs. 22-41; Assoc. Intern. Géod., París, 1951).

Un estudio crítico y comparativo de los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, dando como conclusión que el de GAUSS modificado es el mejor de todos, incluyendo los de aproximaciones sucesivas, entre los que se destaca el de SEIDEL, está en:

E. BODEWIG: *Bericht über die verschiedenen Methoden zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten* I, II, III, IV, V. (Nederl. Akad. Wetensch. Proc., *50*, págs. 930-941; 1104-1116; 1285-1295 (1947); *51*, págs. 53-64; 211-219 (1948); o también: Indagationes Math., *9*, págs. 441-452; 518-530; 611-621 (1947); *10*, págs. 24-35; 82-90 (1948).

CAPÍTULO XVIII

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES. DIFERENCIACIÓN

§ 64. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES

1. Variables independientes y dependientes. — Cada una de las relaciones

[64-1] $z = x^2 + y^2 \quad ; \quad z = x - y + 1 \quad ; \quad z = xy \quad ;$

[64-2] $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

define una *función de dos variables independientes* x, y (§ 23-4) *uniforme* (§ 23-3), pues hace corresponder a cada par de valores (x, y) un valor o *variable dependiente* z. En las tres primeras [64-1] la correspondencia subsiste en el campo real (§ 7), para todo par (x, y), mientras que en la cuarta [64-2] el valor z es real sólo para los pares de valores reales (x, y) tales que cumplan la condición $x^2 + y^2 \leqq 1$ (§ 10-4).

Esta función, considerada en el campo real, sólo está definida cuando el par (x, y) pertenece a un conjunto (pares tales que $x^2 + y^2 \leqslant 1$) que llamaremos campo de variación de (x, y), o *campo de definición o de existencia de la función* (cfr. § 23-3).

La transformación del par (x, y) en z puede hacerse mediante ecuaciones como las [64-1], [64-2] o mediante descripciones como en los ejemplos 1 y 2 del § 23-4, o en formas análogas a las del § 23-3, ejemplos 2, 3 y 5. Lo esencial es que la correspondencia exista como ya se dijo en el § 23.

DEF. *Sean x é y un par de variables independientes dadas en un campo de variación* C. *Se dice que una variable z es función de x é y en el campo* C *cuando a cada valor (x, y) corresponde un valor determinado de z (función uniforme) o varios valores de z (función multiforme).*

Representaremos esta relación escribiendo $z = \mathrm{f}(x, y)$ ó $z = \mathrm{z}(x, y)$ ó $z = \mathrm{F}(x, y)$, etc. Las letras f, z, F tienen por objeto recordar la ley de dependencia que relaciona los valores de z con los valores que arbitrariamente toman las variables x é y.

De la misma manera se dice que u es función de tres variables independientes x, y, z si a cada terna de valores (x, y, z) de un cierto conjunto de ternas corresponde uno o varios valores de u, por ejemplo

[64-3] $$u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2).$$

Análogamente se consideran funciones de n variables $u = \mathrm{u}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2. **Representación gráfica: curvas o superficies de nivel.** — *a*) Un método para representar geométricamente una función $z = \mathrm{f}(x, y)$ es mediante una *superficie*, así como la función $y = \mathrm{f}(x)$ era representada por una curva.

A un punto (x_0, y_0) del campo de definición de la función corresponde para z un valor $\mathrm{f}(x_0, y_0)$. Entonces $(x_0, y_0, \mathrm{f}(x_0, y_0))$ serían las coordenadas rectangulares de un punto del espacio. Si (x_0, y_0) recorre todos los puntos del campo de definición de $\mathrm{f}(x, y)$, el conjunto de todos los puntos $(x_0, y_0, \mathrm{f}(x_0, y_0))$ que así resulta se llama *superficie representativa* o *gráfica* de la función $\mathrm{f}(x, y)$. El número $\mathrm{f}(x_0, y_0)$ se representa por el segmento de recta perpendicular al plano x, y en el punto (x_0, y_0) y extendido hasta la superficie representativa.

EJEMPLOS: 1. La función [64-2] tiene como gráfica a una superficie hemisférica por encima del plano x, y, con centro en el origen de coordenadas y radio unidad.

2. La segunda función de [64-1] queda representada por un plano que corta a los ejes coordenados en los puntos $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

NOTA. Hay casos en que una función no admite una representación intuitiva de esta naturaleza. Por ejemplo $\mathrm{f}(x, y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, siendo φ la función de DIRICHLET (§ 23-3, ejemplo 4).

Además, no podemos usar este método para funciones de tres o más variables, $u = \mathrm{f}(x, y, z)$.

La gráfica es una superficie sólo en el caso de verificarse condiciones de continuidad (§ 65-3, *a*) que más adelante se introducen para precisar el concepto de "superficie". Sin embargo, hablaremos de *superficie* y también de *curvas* (ver *b*) al referirnos intuitivamente a estas representaciones gráficas.

b) Otro método para representar geométricamente la función $z = \mathrm{f}(x, y)$ consiste en usar las llamadas *curvas de nivel* en el plano x, y, es decir las curvas $\mathrm{f}(x, y) = \text{const.}$ Éste es el método empleado en la construcción de mapas marcando las alturas sobre el nivel del mar. Es evidente que estas curvas de nivel son las proyecciones sobre el plano x, y de las curvas en que la superficie $z = \mathrm{f}(x, y)$ es cortada por los planos $z = \text{const.}$ En realidad, así se obtienen conjuntos de puntos

que con ciertas condiciones de continuidad son *curvas* (§ 67-4), pero que desde ahora llamaremos ya "curvas de nivel".

Así puede discutirse el comportamiento de la función y efectuar fácilmente construcciones geométricas sin salir del plano x, y. Puede completarse la representación mediante secciones por planos paralelos al eje z (que también llamaremos *verticales*), planos que sirvan también de proyección ortogonal, análogamente a lo efectuado en el sistema diédrico de la Geometría descriptiva.

EJEMPLOS: 3. La función $z = x^2 + y^2$ viene representada por un paraboloide de revolución (§ 62-3) obtenido girando la parábola $z = y^2$ alrededor del eje z (fig. 212).

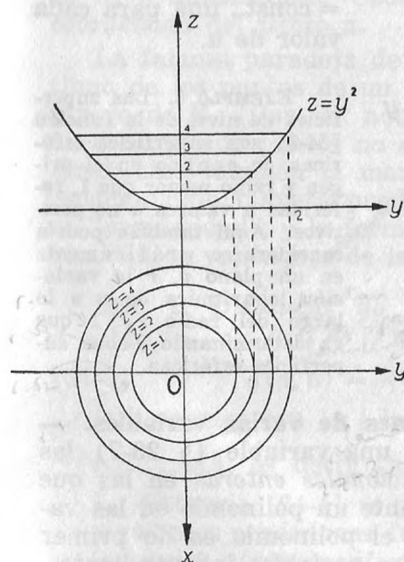


Fig. 212

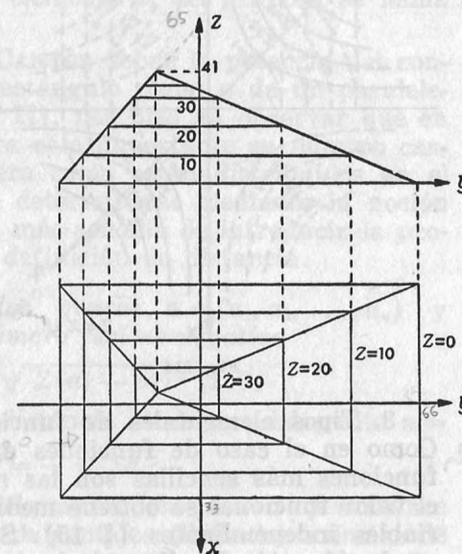


Fig. 213

Las curvas de nivel son circunferencias concéntricas en el origen. En la figura, la escala de cotas es distinta a la empleada en el plano horizontal.

4. Las curvas de la función lineal representada por un plano inclinado son rectas paralelas equidistantes para valores equidistantes de z. En la figura 213 pueden verse las curvas de nivel de la función representada por una pirámide cuyas caras tienen diferente inclinación. Sus ecuaciones son: $2z + y = 66$; $2z - 3y = 130$; $3z + 4x = 115$; $z - x = 43$; vértice $(-2, -16, 41)$.

5. La función $z = xy$ representada por un paraboloide hiperbólico (§ 62-3) tiene por curvas de nivel (fig. 214) hipérbolas equiláteras refe-

ridas a sus asíntotas. Como la sección por el plano xy se reduce al eje y, obtendremos la del primer plano bisector vertical $x = y$, tomando $\eta / \sqrt{2} = x = y$ y al abatir la sección z, η sobre el plano del dibujo queda la parábola $z = \frac{1}{2}\eta^2$. Se ha dibujado en escala z distinta de la empleada en el plano horizontal.

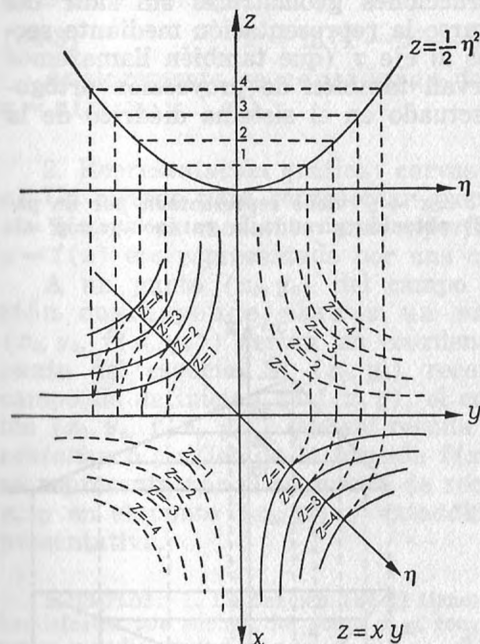


Fig. 214

Este método tiene la ventaja de ser aplicable a la representación de funciones de tres variables $u = f(x, y, z)$. Ahora se obtienen *superficies de nivel* $f(x, y, z) = $ const., una para cada valor de u.

EJEMPLO 6. Las superficies de nivel de la función [64-3] son superficies esféricas de centro en el origen y radio menor que 1, referidas a valores u no positivos. Aquí también podría considerarse gráficamente en un plano u, r la variación logarítmica de u a lo largo del radio $r < 1$ que va determinando dichas superficies esféricas.

3. **Tipos elementales de funciones de varias variables.** — Como en el caso de funciones de una variable (§ 23-7) las funciones más sencillas son las *racionales enteras* en las que el valor funcional se obtiene mediante un polinomio en las variables independientes (§ 15). Si el polinomio es de primer grado (*función lineal entera*) en dos variables independientes, su gráfica es un *plano no vertical.*

Si el *polinomio es de segundo grado,* su gráfica es un *paraboloide* (elíptico, hiperbólico o degenerado [§ 62-3]) *de eje vertical.*

Las funciones *racionales fraccionarias* vienen dadas por el cociente de dos polinomios. A esta clase pertenece la función *lineal fraccionaria,* cociente de dos polinomios lineales en las variables independientes; si éstas son dos, su gráfica es un paraboloide hiperbólico, acaso degenerado (§ 62-3), cuyas curvas de nivel son rectas.

Las funciones *algebraicas explícitas* vienen dadas por una expresión racional o irracional en las variables independientes (§ 23-8). Todos los casos anteriores están incluídos en el más

general de *función algebraica* de varias variables ya definida en § 41-2, *d.* Las funciones no algebraicas, es decir las que no satisfacen una ecuación algebraica, se llaman *trascendentes.*

4. **Conjuntos puntuales: clasificación de puntos.** — *a*) Por iguales razones de comodidad y analogía que hemos representado geométricamente cada número real por un punto de una recta, considerando sinónimas las palabras *número* y *punto,* llamaremos asimismo punto de un plano $\mathbf{E}_2$ a todo par de números reales (a, b), es decir, a todo número complejo binario; punto de un espacio $\mathbf{E}_3$ a toda terna de números reales (a, b, c) y por analogía, llamaremos *punto* a todo grupo $\mathbf{a}$ de n números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y al conjunto de todos ellos espacio $\mathbf{E}_n$ de n dimensiones. Cada elemento a_i del grupo $\mathbf{a}$ se llama *coordenada* del punto $\mathbf{a}$.

La famosa paradoja de CANTOR sobre la potencia del continuo de los puntos de un rectángulo plano o de un paralelepípedo de $\mathbf{E}_n$ (Cap. II, nota II), nos hizo ya observar que en un conjunto de puntos no era sólo importante su número cardinal, sino también la manera como están distribuídos en el espacio. Esta manera puede determinarse mediante la noción de "proximidad", y la forma más sencilla de introducir la proximidad es valiéndose de la definición de distancia.

DEF. 1. *Distancia de dos puntos* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *es el número real no negativo*

[64-4] $$\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = +\sqrt{\Sigma(a_i - b_i)^2} \geqslant 0 .$$

Indicaremos con $|\mathbf{a}|$ la distancia al origen del punto $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, es decir $|\mathbf{a}| = +\sqrt{\Sigma a_i^2}$.

La distancia [64-4] se designa también $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ y satisface las siguientes condiciones fundamentales (llamadas axiomas de la distancia; véase justificación y demostraciones en nota I):

1º) La distancia $\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un número real no negativo que es nulo cuando y sólo cuando ambos puntos coinciden $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (es decir $a_i = b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$).

2º) *Condición de simetría*: $\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varrho(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

3º) *Condición triangular*: $\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \varrho(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \geqslant \varrho(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Se llama *recta* $\mathbf{ab}$ al conjunto de puntos $\mathbf{x}$ cuyas coordenadas están dadas por

[64-5] $$x_i = (1 - \lambda) a_i + \lambda b_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donde λ es un parámetro real que varía de $-\infty$ a $+\infty$.

En la condición triangular para la distancia [64-4] vale el

signo = cuando y sólo cuando los tres puntos **a**, **b** y **c** están en línea recta.

El hecho de que la distancia se dé mediante la expresión [64-4], se expresa diciendo que $\mathbf{E}_n$ es un espacio *euclídeo* de n dimensiones (Cap. XVII, nota II).

Nos limitaremos, sin embargo, al caso de los espacios $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, y preferentemente al $\mathbf{E}_2$, porque las propiedades demostradas para dos dimensiones se generalizan a los de cualquier número de ellas mediante un simple cambio de palabras.

b) DEF. 2. *Entorno* de un punto es el conjunto de puntos cuya distancia a él es menor que un cierto número δ, es decir, en $\mathbf{E}_2$ y en $\mathbf{E}_3$:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \quad \text{y}$$
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} < \delta \ ,$$

que en el sistema cartesiano representan el interior de un círculo y de una esfera, respectivamente.

También suelen considerarse entornos cuadrados y cúbicos, es decir, conjuntos de puntos definidos por las condiciones

$$|x-a| < \delta \ , \quad |y-b| < \delta \ , \quad |z-c| < \delta .$$

Como todo entorno cuadrado contiene entornos circulares y recíprocamente, utilizaremos unos y otros indistintamente.

La definición de *entorno reducido* (§ 24-1), es decir con exclusión del mismo punto **a**, subsiste para $\mathbf{E}_n$.

DEF. 3. Un punto de un conjunto se llama *aislado* cuando hay un cierto entorno suyo que no contiene otros puntos del conjunto que él mismo.

DEF. 4. Un punto, *pertenezca o no al conjunto* X, se llama *punto de acumulación* de X, cuando en todo entorno reducido suyo hay puntos del conjunto X.

DEF. 5. Un punto del conjunto se llama *interior* a X cuando hay un entorno suyo cuyos puntos todos pertenecen al conjunto X. Un punto no perteneciente al conjunto X se llama *exterior* cuando tiene un entorno de puntos de los cuales ninguno pertenece a X.

DEF. 6. Un punto, *pertenezca o no al conjunto* X, se llama *frontera*, si no es ni interior, ni exterior al conjunto X, es decir, en todo entorno suyo hay algún punto que pertenece y hay también algún punto que no pertenece a X.

El punto aislado es un ejemplo de punto frontera; también lo es un punto de acumulación de X que no pertenezca a X.

NOTA 1. En la teoría del potencial conviene para estudiar la accesibilidad desde el exterior distinguir entre el concepto de frontera y el

de *contorno*, siendo éste el conjunto de los puntos no exteriores que son puntos de acumulación de puntos exteriores.

EJEMPLO 1. En $x^2+y^2<1$, $y \neq 0$, el contorno es $x^2+y^2=1$; y la frontera es ésto más el diámetro sobre el eje x.

c) DEF. 7. Se llama (cfr. § 7-7) *intervalo cerrado de dos dimensiones* a todo rectángulo de lados paralelos a los ejes definidos por las dos acotaciones

$$[64\text{-}6] \qquad a \leqslant x \leqslant b \quad , \quad c \leqslant y \leqslant d .$$

El teorema de las sucesiones monótonas contiguas (§ 7-6, *d*) tiene aquí su análogo:

Si cada uno de los rectángulos cerrados R_1, R_2, R_3, ... *de lados paralelos a los ejes está contenido en el anterior, y las dimensiones de* R_n *tienden a* 0, *existe un punto y sólo uno contenido en todos los* R_n.

Las proyecciones de R_n sobre los ejes son los intervalos $[a_n, b_n]$, $[c_n, d_n]$ limitados por las abscisas u ordenadas extremas; y por la monotonía supuesta, cada intervalo $[a_n, b_n]$ está contenido en su anterior y análogamente para los $[c_n, d_n]$; luego existe un punto x_0 contenido en todos los $[a_n, b_n]$ y un punto y_0 contenido en todos los $[c_n, d_n]$ siendo únicos, puesto que las longitudes de los intervalos tienden a 0. Tales números x_0, y_0 son coordenadas de un punto contenido en todos los rectángulos R_n.

NOTA 2. *Clasificación de los conjuntos.* El conjunto formado por todos los puntos de acumulación de X se llama *derivado* de éste y se designa por X′. Es la misma definición dada en Cap. VI, nota II, *c*. Conviene conservar también las definiciones (Cap. VI, nota II, *d*) allí dadas para conjuntos *densos en si* $\mathrm{X}(\leqq)\mathrm{X}'$, *cerrados*; $\mathrm{X}(\geqq)\mathrm{X}'$, *perfectos*; $\mathrm{X}=\mathrm{X}'$; así como para la *clausura* $\overline{\mathrm{X}}$ de un conjunto X, es decir $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \cup \mathrm{X}'$.

Se dice "denso en sí" para distinguirlo de los conjuntos (*denses partout, dichte überall*), tales que en todo intervalo, si son lineales, o en todo cuadrado, si son de dos dimensiones, hay puntos del conjunto.

Un conjunto se llama *abierto* si todos sus puntos son interiores.

EJEMPLOS: 2. El conjunto de todos los puntos racionales, carece de puntos aislados, pues dado un punto cualquiera hay otros del conjunto que distan de él tan poco como se quiera; pero no es cerrado, porque hay infinitos puntos (por ejemplo, $(\sqrt{2}, 1)$, $(\pi, \sqrt[3]{5})$, ...), en cuya proximidad hay infinitos puntos del conjunto, y, por tanto, pertenecen a X′, sin pertenecer a X.

3. El conjunto de puntos de un cuadrado, exceptuadas sus diagonales, carece de puntos aislados pero no es cerrado.

4. El conjunto

$$\left(x=\frac{1}{2^m} \ , \ y=\frac{1}{2^n}\right) \ , \ \left(\begin{matrix} m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots \end{matrix}\right)$$

tiene como puntos de acumulación el origen (0, 0) y todos los del tipo

$$\left(x=0, \ y=\frac{1}{2^n}\right) \ , \ \left(x=\frac{1}{2^m} \ , \ y=0\right).$$

El conjunto formado por unos y otros es cerrado, pero tiene todos sus puntos aislados, excepto el origen (0, 0).

5. El conjunto de puntos de un círculo, elipse o polígono, *incluso los del contorno*, es perfecto. También es perfecto el conjunto de puntos de una curva cualquiera del plano definida por dos funciones continuas

$$x = \mathrm{x}(t), \quad y = \mathrm{y}(t), \quad \text{para} \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

NOTA 3. *Conjuntos acotados.* — Dado un conjunto de infinitos puntos, diremos que está *acotado* cuando se conservan todos inferiores en valor absoluto a un número positivo k. o sea, $\sqrt{x^2+y^2} < k$.

Entonces quedan todos ellos dentro de un círculo de centro O y radio k, y dentro de un cuadrado de centro O, y semilado k.

La propiedad fundamental, lo mismo que en el caso de los conjuntos lineales, está expresada por el teorema de BOLZANO - WEIERSTRASS (Cap. VI, nota II, *b*):

Todo conjunto acotado, de infinitos puntos, tiene, al menos, un punto de acumulación.

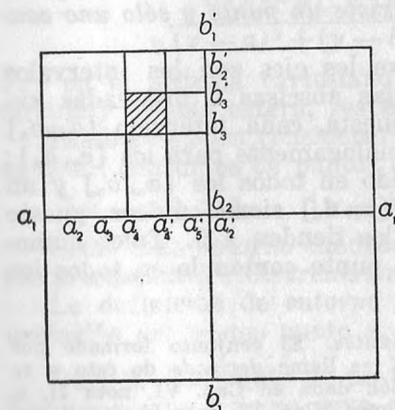


Fig. 215

El conjunto X está contenido en un cuadrado de semilado k (fig. 215); subdividido en cuatro cuadrados iguales, uno de ellos contiene infinitos puntos del conjunto; si hay más de uno, escojamos el primero que se presente por abajo primero y por la izquierda después; subdividido éste de nuevo, uno al menos, de los cuatro cuadrados parciales, contiene infinitos puntos, etc.

Por el teorema de las sucesiones convergentes de rectángulos, existe un punto (x_0, y_0) contenido en todos los cuadrados sucesivos; dado un entorno suyo cualquiera, dentro de él hay cuadrados de la sucesión, y por tanto, contiene infinitos puntos del conjunto, luego, es punto de acumulación de X, que puede pertenecer o no al conjunto.

5. **Recintos.** — Conjuntos de puntos, de interés para las funciones, son sus campos de existencia. Las tres primeras funciones [64-1] estaban definidas para todos los puntos del plano xy, mientras que en el campo real la [64-2] lo estaba sólo en el círculo *cerrado* $x^2 + y^2 \leqslant 1$. La función [64-3] está definida en el campo real sólo para los puntos *interiores* de la esfera de centro origen y radio unidad. Otros ejemplos de conjuntos de puntos serían los considerados en § 64-4, nota 2. Vemos, pues, que el conjunto de puntos (x, y) puede estar sujeto a satisfacer condiciones de muy diversos tipos.

Considerando el segmento como porción de recta, su análogo será la porción de plano, noción mucho más compleja que exige una definición rigurosa. En los recintos planos más sencillos (círculo, cuadrado, rectángulo, polígonos convexos y cóncavos no estrellados, elipse, óvalos, semiplanos, etc.) observamos dos propiedades: 1ª Son *conjuntos conexos*, es decir, *dos puntos cualesquiera pueden unirse mediante una línea quebrada de número finito de lados cuyos puntos pertenecen al conjunto.* 2ª Exceptuando los puntos del contorno, son *interiores* todos los demás, es decir, existe un entorno de cada uno formado por puntos del conjunto.

Tomaremos estas dos propiedades como definición de los recintos, válida para cualquier número de dimensiones. En la nota I generalizamos el concepto de conexión.

DEF. 1. *Recinto es un conjunto conexo cuyos puntos son todos interiores.*

Que estas dos condiciones son necesarias para que los conjuntos obtenidos no difieran demasiado de nuestra noción intuitiva y tengan las mismas propiedades de los recintos elementales, se ve fácilmente. Por ejemplo, el conjunto de los puntos de varios círculos o polígonos distintos (excluídos sus contornos) cumplen la segunda condición, pero no es conexo. El conjunto de puntos de una línea quebrada es conexo, pero sus puntos no son interiores.

DEF. 2. *Frontera* de un recinto es el conjunto formado por sus puntos frontera. *Contorno* de un recinto es el conjunto de los puntos no exteriores que son puntos de acumulación de puntos exteriores al recinto (§ 64-4, nota 1).

DEF. 3. *Región* es el conjunto de puntos formado por un recinto y alguno o todos sus puntos frontera.

DEF. 4. *Dominio* es el conjunto formado por un recinto más su frontera. Suele llamarse también *región cerrada* o *recinto cerrado.*

EJEMPLO 1. El conjunto formado por los puntos $x^2 + y^2 < 1$, excepto los ($x > 0$, $y = 0$), es un recinto; su frontera está formada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, más el radio $x > 0$, $y = 0$, el cual se considera como doble.

Se llama *corte* de un recinto a la exclusión del mismo de un arco simple de JORDAN (§ 29-2) formado por puntos interiores al recinto, pero cuyos extremos pueden ser puntos frontera de dicho recinto. Los puntos frontera de un recinto que pueden ser extremos de un corte se llaman *accesibles* y los que no pueden serlo, *inaccesibles.*

Si el recinto es algo complicado su frontera puede ofrecer particularidades tales que no entre dentro del concepto general de curva dado en § 29-2.

EJEMPLO 2. Si en el cuadrado excluímos los puntos de los infinitos cortes indicados en la figura 216, obtenemos un recinto plano cuya frontera no es una curva. Los puntos de la mitad superior del lado vertical izquierdo son ejemplos de puntos frontera inaccesibles.

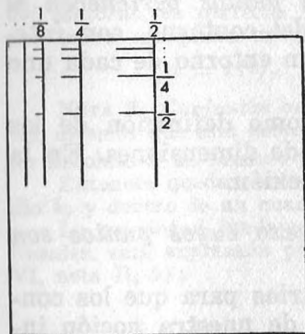


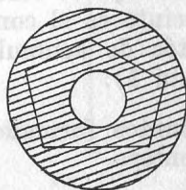
Fig. 216

Todo punto frontera no aislado es punto de acumulación de puntos frontera accesibles.

DEF. 5. Un recinto plano se llama *simplemente conexo* cuando, siendo conexo, el polígono determinado por toda línea quebrada cerrada situada en el recinto está contenido en éste.

Los recintos que no tienen la propiedad anterior, se llaman *múltiplemente conexos*, y el *orden de conexión* es n si son necesarios y bastan $n-1$ cortes para convertirlo en simplemente conexo, pudiendo ser $n = 2, 3, \ldots$, o bien ∞.

Son simplemente conexos todos los recintos antes citados; no lo son, en cambio, el anillo circular ni el rectángulo con uno o más cortes interiores (fig. 217), pues se pueden trazar en ellos líneas poligonales de tal modo que el polígono determinado no pertenezca enteramente al recinto.



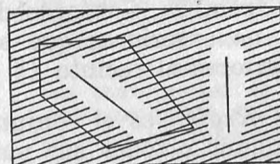


Fig. 217

EJERCICIOS

1. Verificar que $F(x, y, z) = xy + yz + zx$ se expresa en términos de $f(x, y, z) = x + y + z$ por $F(x, y, z) = \frac{1}{2}[f^2(x, y, z) - f(x^2, y^2, z^2)]$.

2. Clasificar los puntos del plano respecto del campo de definición de las siguientes funciones:

1º) $z = 1/\ln[(1 - x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)]$;

2º) $z = +\sqrt{x^2 - y^2}$;

3º) $z = +\sqrt{\operatorname{sen}(xy)}$;

determinando los recintos que forman, sus fronteras y contornos y su orden de conexión.

3. Determinar las líneas de nivel de las funciones del ejercicio anterior.

4. Superficies de nivel de la función $u = \operatorname{arc\,tg}[(y^2 + z^2)/x^2]$. Ramas de esta función multiforme.

5. Si en el plano, como conjunto de puntos $\mathbf{x}$ dados por pares de números reales $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, definimos como "distancia":

1º) $\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$;

2º) $\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{máx}\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$;

demostrar que en ambos casos se cumplen los "axiomas de la distancia", es decir, se obtienen espacios métricos (nota I). Describir la figura que en cada uno de ellos forma la "circunferencia unidad", es decir, el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ que cumpla $\varrho(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = 1$.

6. Definido en el espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$, el conjunto cerrado, por la propiedad $F(\geqq)F'$, demostrar que es equivalente definir un conjunto abierto G como complemento de un cerrado o como constituído por puntos interiores.

7. ¿Cuáles son en $\mathbf{E}_n$ los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez?

8. Demostrar que en $\mathbf{E}_n$ se cumple:

1º) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

2º) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$:

3º) $\overline{X}$ es el mínimo conjunto cerrado que contiene a X.

9. Demostrar que en $\mathbf{E}_n$ un conjunto F es cerrado cuando y sólo cuando es derivado de otro conjunto X.

10. Demostrar que si cada rectángulo cerrado R_n de una sucesión monótona convergente contiene puntos de un recinto cerrado o dominio, existe un punto y uno solo del dominio contenido en todos los rectángulos cerrados. ¿Es cierta la proposición si los rectángulos, o bien el recinto, son abiertos?

11. Demostrar que no es un recinto la unión de dos recintos cuando y sólo cuando estos dos no tienen puntos comunes.

12. ¿Es un recinto el conjunto $0 < x^2 + y^2 < 1$? ¿Cuál es su orden de conexión, su frontera y su contorno?

13. ¿Es un recinto el conjunto definido por $0 < |\mathbf{x}| + x_1 < 1$? ¿Es acotado? ¿Cuál es su orden de conexión, su frontera y su contorno?

14. Demostrar que en $\mathbf{E}_2$ un recinto *acotado* es simplemente conexo cuando y sólo cuando su frontera tiene una sola componente (cfr. nota I, *c*).

15. Demostrar que en $\mathbf{E}_2$ el número de componentes (*orden de conexión*) de la frontera de un recinto *acotado* excede en una unidad al número de cortes cuyos extremos sean puntos frontera por los que es posible convertirlo en simplemente conexo.

§ 65. LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Límite doble. — En el caso de una función de varias variables, por ejemplo dos, la idea intuitiva de límite es la misma que la vista para la función de una sola variable (§ 24-1):

$$f(x, y) \to \zeta \quad \text{para} \quad (x, y) \to (a, b)$$

cuando la diferencia $f(x, y) - \zeta$ se hace arbitrariamente pequeña con tal de tomar (x, y) suficientemente próximo a (a, b) y distinto de éste. Con precisión:

DEF. *Se dice que la función uniforme* f(x, y) *tiende al límite* ζ *en el punto* (a, b), *o que tiene el límite* ζ, *cuando a cada número positivo* ε *arbitrario, corresponde otro número positivo* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *tal que para todos los puntos del entorno reducido* (§ 64-4)

[65-1] $$0 < +\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta ,$$

o bien $$\begin{cases} |x-a| < \delta , \quad |y-b| < \delta , \\ (x-a)^2+(y-b)^2 > 0 , \end{cases}$$

se verifica

[65-2] $$|\mathrm{f}(x, y)-\zeta| < \varepsilon.$$

Se expresa esto abreviadamente escribiendo

[65-3] $$\lim \mathrm{f}(x, y) = \zeta \text{ para } \begin{matrix} x \to a , \quad y \to b \text{ ó} \\ (x, y) \to (a, b) , \end{matrix}$$

o bien

[65-4] $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathrm{f}(x, y) = \zeta .$$

Obsérvese que f(x, y) no necesita ni aún estar definida en el mismo punto (a, b), aunque sí en los demás puntos de un cierto entorno de (a, b).

El límite así definido se llama *doble*, o *simultáneo*, porque el punto (x, y) se acerca al (a, b) según entornos reducidos *superficiales*, pero si restringimos los valores admisibles de (x, y) en [65-1] para el cumplimiento así más fácil de [65-2], se podría por ejemplo considerar como campo de variación de la función sólo los puntos que estén sobre una curva C que pase por (a, b) o más general, de un conjunto parcial adecuadamente determinado de cada entorno reducido de (a, b). Sería algo análogo a lo visto para los límites laterales de funciones de una variable (§ 25-4).

NOTA 1. También pueden considerarse *límites infinitos* (§ 24-5) y la definición topológica sintetizada en los casos *a*) del cuadro del § 24-6 será aquí la misma. También tiene interés considerar en lugar de [65-1] el entorno del punto impropio ∞ del plano, formado por el exterior de un círculo o cuadrado cualquiera para así definir el *límite en el infinito.*

EJEMPLO.

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad \text{escrita en la forma} \quad z = \frac{y}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

al tender x e y a 0, cualquiera que sea su ley de variación, el denominador es mayor que 1 y el numerador tiende a cero, luego,

$$\lim_{(x,y)\to 0} z = 0.$$

En cambio el $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} z$ no existe, pues sobre los ejes x e y es $z = 0$ y sobre sus bisectrices z se hace en valor absoluto tan grande como se quiera.

NOTA 2. El criterio general de convergencia de BOLZANO - CAUCHY (§ 24-7) puede ser fácilmente trasladado aquí, con la misma demostración dada en el caso de una variable:

TEOR. *Condición necesaria y suficiente para que la función* f(x, y) *definida en el campo* C *tenga límite finito en el punto de acumulación* (a, b) *de* C *(perteneciente o no a él) es que para cada número* $\varepsilon > 0$ *se pueda determinar un entorno reducido de* (a, b), *tal que a todo par de puntos* (x', y'), (x'', y''), *pertenecientes a la vez a dicho entorno reducido y al campo* C, *correspondan valores funcionales que verifiquen* $|\mathrm{f}(x', y')-\mathrm{f}(x'', y'')| < \varepsilon$.

2. Límites sucesivos y límites en una dirección. — No debe confundirse nunca el límite definido en [65-3] con los límites *reiterados* o *sucesivos*

[65-5] $$\lim_{y\to b} \lim_{x\to a} \mathrm{f}(x, y) = \lim_{y\to b} [\lim_{x\to a} \mathrm{f}(x, y)] = \lim_{y\to b} \varphi(y),$$

[65-6] $$\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} \mathrm{f}(x, y) = \lim_{x\to a} [\lim_{y\to b} \mathrm{f}(x, y)] = \lim_{x\to a} \psi(x),$$

en los cuales se hace tender a su límite, primero una variable, y luego la otra en la función resultante (fig. 218), mientras que en [65-3] tienden ambas superficialmente con simultaneidad arbitraria. El límite reiterado [65-5] presupone que en un cierto entorno reducido de b en la recta $x = a$ existe la función $\varphi(y) = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{f}(x, y)$ y análogamente para [65-6].

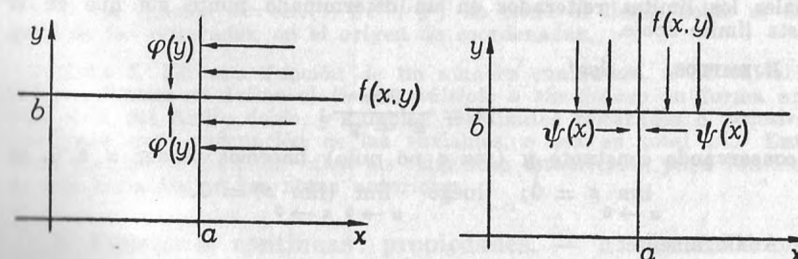


Fig. 218

NOTAS: 1. Si existe el límite doble ζ y existe unívoca la función $\varphi(y)$ en un entorno reducido de b, entonces existe $\lim\limits_{y\to b} \varphi(y)$ y coincide con ζ. Pues, si $\varphi(y)$ existe en $0 < |y-b| < \delta$, por [65-2] será $\zeta - \varepsilon \leqslant \varphi(y) \leqslant \zeta + \varepsilon$ en el anterior entorno reducido de b, y como ε positivo es arbitrario, esto es lo que queríamos demostrar.

Por tanto, si existen el límite doble y los sucesivos, todos ellos son iguales. Si los límites sucesivos en el mismo punto son desiguales, entonces el límite doble no puede existir.

2. El concepto de *convergencia uniforme* introducido en el § 43-3 para sucesiones funcionales $S_n(x)$ cuando $n \to \infty$ se extiende inmediatamente a los límites $f(x,y) \to \psi(x)$ cuando $y \to b$, considerando $f(x,y)$ como función sólo de y para valores de x de un cierto conjunto X. Para esto, se ha de suponer que toda paralela al eje y por un punto de X contiene infinitos puntos del campo de variación C de $f(x,y)$ con punto de acumulación en la intersección de dicha paralela con la recta $y = b$. En tal caso se establece:

DEF. *La convergencia de* $f(x,y)$ *a la función finita y unívoca* $\psi(x)$ *para* $y \to b$ *con* x *perteneciente a* X *se dice uniforme en* X, *si a cada* $\varepsilon > 0$ *corresponde un número positivo* $\delta_1(\varepsilon)$ *(dependiente de* ε, *pero no de* x*) tal que para todo* x *del conjunto* X *es*

$$|f(x,y) - \psi(x)| < \varepsilon \quad si \quad 0 < |y - b| < \delta_1(\varepsilon).$$

Esto querrá decir que en una misma faja horizontal de anchura constante conteniendo la recta $y = b$, pero fuera de esta recta, la función $f(x,y)$ difiere de $\psi(x)$ en valor absoluto en menos de ε. Si entonces existe $\lim_{x \to a} \psi(x) = \zeta$, es decir se verifica $|\psi(x) - \zeta| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta_2(\varepsilon)$, tomando $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ resultará para $\psi(x) = f(x,b)$:

$$|f(x,y) - \zeta| \leqslant |f(x,y) - f(x,b)| + |f(x,b) - \zeta| < 2\varepsilon ,$$

cuando $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$, $(x,y) \neq (a,b)$. Por tanto queda demostrado:

TEOR. *Si* $f(x,y)$ *para* $y \to b$ *tiende uniformemente a* $f(x,b)$ *y ésta tiene límite* ζ *para* $x \to a$, *entonces* ζ *es límite doble de* $f(x,y)$ *en el punto* (a,b).

3. Puede también ocurrir que el límite doble exista, sin que alguno o ninguno de los límites reiterados exista. Pueden también existir y ser iguales los límites reiterados en un determinado punto sin que en él exista límite doble.

EJEMPLOS: 1. Sea

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2};$$

si conservando constante y (sea o no nulo) hacemos tender x a 0, es

$$\lim_{x \to 0} z = 0; \quad \text{luego} \quad \lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} z) = 0.$$

Análogamente:

$$\lim_{y \to 0} z = 0; \quad \text{luego} \quad \lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} z) = 0.$$

En cambio, si ambas tienden a 0 simultáneamente, no existe límite alguno; pues si tienden a 0, siendo siempre $x = y$, es constantemente $z = 1$; pero si siempre es $y = 2x$, resulta $z = \frac{4}{5}$, etc.

Geométricamente: si el punto (x,y) *tiende al* $(0,0)$ *en la dirección* $\frac{y}{x} = m$, z converge hacia el número $\frac{2m}{1 + m^2}$. En la figura 219 están indicados algunos de estos valores a que tiende z en distintas direcciones.

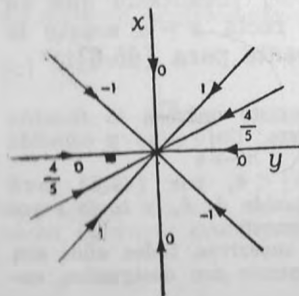


Fig. 219

2. En el ejemplo anterior el orden en que se toman los dos límites no alteraba el resultado; mas no debe creerse que esto sucede siempre. Sea

$$z = \frac{xy - x + y}{x + y}.$$

Si $y \neq 0$, $\lim_{x \to 0} z = \frac{y}{y} = 1$, luego $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} z = 1$;

Si $x \neq 0$, $\lim_{y \to 0} z = -\frac{x}{x} = -1$; luego $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} z = -1$;

y claro que no coincidiendo éstos para dos distintas leyes de variación de (x,y) no existe $\lim_{(x,y) \to 0} z$.

3. La función $z = y \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$; $z = 0$ si $x = 0$, tiene en el origen límite doble y sucesivo $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} z$, ambos iguales a cero, pero en cambio no existe $\lim_{x \to 0} z$, si es $y \neq 0$, ni por tanto existe $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} z$.

Si en $y = 0$ atribuímos a la función anterior el valor $z = 1$, aun cuando z tienda uniformemente a cero para $y \to 0$, y sea nulo el límite de la constante cero, no existirá en $(0,0)$ el límite doble de dicha función así modificada.

4. Para la función $z = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{y} + y \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ si $|xy| > 0$; $z = 0$ si $xy = 0$, no existe ninguno de los límites reiterados, pero sí el límite doble, que es cero.

5. La función $z = \operatorname{sen}(1/\sqrt{x^2 + y^2})$ no tiene ni límite doble ni ninguno de los reiterados, en el origen de coordenadas.

NOTA 4. En una función de un número cualquiera n de variables independientes, se define el *límite múltiple o simultáneo* en forma análoga a la del límite doble, y también los límites reiterados o sucesivos, uno para cada ordenación de las variables, o sea en total $n!$. Entre éstos y el límite múltiple valen las relaciones establecidas para funciones de dos variables en las notas anteriores.

3. Funciones continuas: propiedades. — *a)* DEF. *Diremos que una función uniforme* $f(x,y)$ *es continua en el punto* (a,b) *cuando existe* $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$ *y siendo finito este límite, coincide con el valor* $f(a,b)$ *de la función en el punto.* (Cfr. § 25-1).

Teniendo en cuenta la definición de límite (§ 65-1), el enunciado anterior es equivalente a decir: *La función* $f(x,y)$ *es continua en el punto* (a,b) *si dado* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, se puede hallar un número positivo* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *tal que para los puntos* (x,y) *tales que*

[65-7] $$+\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

se cumpla

$$|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon.$$

Geométricamente, esto quiere decir que el trozo de superficie correspondiente al campo de variación determinado por el círculo de centro (a, b) y radio δ se encuentra entre los dos planos $z = f(a, b) + \varepsilon$ y $z = f(a, b) - \varepsilon$.

Si usamos curvas de nivel para representar la superficie, ninguna curva $f(x, y) = \text{const.}$ cortará el círculo cuando la constante difiera de $f(a, b)$ en más de ε.

Si una función $f(x, y)$ es continua en un punto (a, b), entonces las funciones $f(a, y)$ y $f(x, b)$ de una variable son también continuas por satisfacerse las condiciones de la definición de continuidad para funciones de una variable. El recíproco no es cierto; puede $f(x, b)$ ser continua en $x = a$ y $f(a, y)$ ser continua en $y = b$, sin que $f(x, y)$ sea continua en el punto (a, b).

EJEMPLOS: 1. La función

$$f(x, y) = \frac{xy}{+\sqrt{x^2 + y^2}}$$

en los puntos distintos al origen y nula en éste, es continua en $(0, 0)$. Pues es

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy}{+\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 ,$$

según vimos en § 65-1, ejemplo, siendo por definición $f(0, 0) = 0$.

2. Sea la función $z = \text{sg}\{(y - x^2)(y - 2x^2)\}$, es decir, z vale 1 por encima de la parábola $y = 2x^2$ y por debajo de la parábola $y = x^2$; pero vale -1 en la lúnula comprendida entre ambas y se anula sobre ambas curvas (fig. 220). Cualquier semirrecta de origen O tiene algún segmento OA exterior a esta lúnula y por tanto, sobre esta semirrecta $z \to 1$. Sin embargo, no hay límite doble de z en el origen O. Si en éste atribuímos a la función el valor 1, este ejemplo nos demuestra que una función continua *respecto de cada una de las variables* y aun *en cada dirección rectilínea*, puede no serlo con relación a *ambas variables*. Lo mismo se comprueba en el siguiente ejemplo.

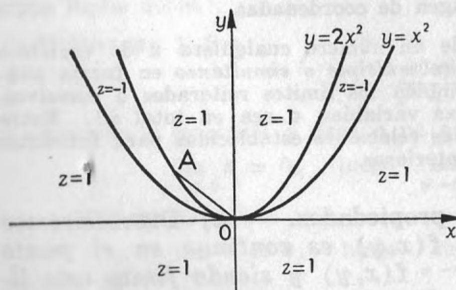


Fig. 220

3. En la función $f(x, y) = y/x$ para $x \neq 0$ con $f(0, y) = 0$, es también $f(x, 0) = 0$. Estas dos funciones de una variable son continuas en el origen, pues ambas se reducen a la constante cero. Sin embargo, la función de dos variables es discontinua en el origen. Obsérvese lo que ocurre si nos acercamos al origen según las curvas $y = x$, $y = kx$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^n$.

NOTAS: 1. Una función $f(x, y)$ se dice *continua en un campo de variación* C si es continua en todos los puntos del campo, restringiendo

el cumplimiento de [65-7] para los puntos de C pertenecientes a cada entorno de (a, b).

2. Aquí también podemos definir la continuidad de $f(x, y)$ en $y = b$, uniformemente respecto de $x \varepsilon X$, mediante el límite de $f(x, y)$ hacia $f(x, b)$ uniformemente respecto de $x \varepsilon X$ (§ 65-2, Nota 2). Para que esto ocurra, no es necesaria la continuidad de $f(x, b)$, pero si además $f(x, b) \to f(a, b)$ para $x \to a$, entonces $f(x, y)$ es continua en (a, b) (§ 65-2, Nota 2, Teor.). Por otra parte, es fácil probar (Cap. VI, nota III), que si $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, entonces para $y \to b \varepsilon (y_0, y_1)$ la función $f(x, y) \to f(x, b)$, uniformemente respecto de $x \varepsilon [x_0, x_1]$. (HEINE).

Por analogía al concepto de curva uniforme (§ 25-1), convendremos en definir:

DEF. Llamamos *superficie uniforme* al conjunto de puntos del espacio E_3 representantes (§ 64-2, *a*) de una función uniforme y continua $z = f(x, y)$ definida ya en un recinto R, ya en un dominio D (§ 64-5).

b) Al igual que en las funciones de una variable

b_1) *La suma, diferencia, producto o cociente de funciones continuas de varias variables, es una función continua en todo punto que no anule al denominador.*

Por consiguiente: *toda función racional de varias variables es continua, excepto en los puntos que anulan al denominador.*

b_2) *Si z es una función continua de u, y u es una función continua de* (x, y), *es z función continua de* (x, y). (Cfr. § 25-7).

Por consiguiente: $\log f(x, y)$ *es función continua de x é y en todo punto en que sea* $f(x, y)$ *positiva y continua.*

b_3) *Si* $f(x, y)$ *es continua en un dominio acotado* D. *el conjunto de valores finitos que toma en todos sus puntos está acotado superior e inferiormente y alcanza en* D *al menos una vez un valor máximo y un valor mínimo* (BOLZANO - WEIERSTRASS). (Cfr. § 26-5, con demostración análoga por el método de la dicotomía adecuadamente adaptado a varias dimensiones, cfr. § 64-4, nota 2).

EJEMPLOS: 4. La función $z = (y + 1)/(x - 1)$ está definida y es continua en el *interior* del círculo de centro O y radio 1; sin embargo, no es finita en él, pues tomando (x, y) bastante próximo al punto $(1, 0)$, toma z valores mayores que cualquier número.

5. $z = x + y$ es continua en el dominio parabólico $y \geqq x^2$, pero no está acotada. No se verifica el teorema por no estar acotado el dominio.

El concepto de continuidad uniforme y teorema de HEINE-CANTOR (§ 26-6) se generalizan también inmediatamente para funciones de varias variables.

4. Infinitésimos. — Su definición es la misma que para funciones de una variable (§ 24-3). Aquí también $f(x, y)$ tiene por límite ζ en el punto (a, b), cuando y sólo cuando $\varphi(x, y) = f(x, y) - \zeta$ tiene por límite cero, es decir, es infinitésima en (a, b) y por tanto: *toda función con límite ζ es igual a éste más un infinitésimo*: $f(x, y) = \zeta + \varphi(x, y)$.

Es cómodo introducir las nuevas variables $h = x - a$ y $k = y - b$. La función $f(x, y)$ es continua en (a, b) si la función $\varphi(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b)$ es infinitésima para $(h, k) \to (0, 0)$. La comparación de variables e infinitésimos se hace también del mismo modo que para funciones de una variable (§ 24-3, *b*, *c*). Aquí es conveniente tomar como *infinitésimo tipo o principal* la distancia $\varrho = +\sqrt{h^2 + k^2}$ del punto $(a + h, b + k)$ al (a, b) y análogamente en el espacio $\mathbf{E}_n$. En particular, toda combinación lineal homogénea $c_1 h + c_2 k$ con coeficientes c_1 y c_2 constantes, por ejemplo los mismos h ó k, es infinitésima *por lo menos* de primer orden, pues $c_1 h + c_2 k = O(\varrho)$, es decir,

$$\left|\frac{c_1 h + c_2 k}{\varrho}\right| \leqslant |c_1| \frac{|h|}{+\sqrt{h^2 + k^2}} + |c_2| \frac{|k|}{+\sqrt{h^2 + k^2}} \leqslant$$
$$\leqslant |c_1| + |c_2|$$

en un entorno de $(0, 0)$.

Pero no es infinitésimo de primer orden, pues para $\varrho \neq 0$ puede ser $c_1 h + c_2 k = 0$. También el polinomio homogéneo de segundo grado $c_1 h^2 + 2c_2 hk + c_3 k^2 = O(\varrho^2) = o(\varrho)$ es infinitésimo de orden superior al primero y *por lo menos* de orden 2. (Véase en ejerc. 6, 1º, la condición para que sea de orden 2).

EJERCICIOS

1. *a*) Hallar los límites múltiples y reiterados en el origen, de las funciones de los ejercicios 2 y 4 de § 64 y estudiar su continuidad a lo largo del eje x; *b*) En $f(x, y) = (xy^2 - y^2 + x - 1)/(x - 1)$ para el punto $(1; 0)$ existen y son iguales $(=1)$ ambos límites reiterados y el límite en cada dirección no vertical $y = m(x - 1)$, pero no existe límite doble.

2. Estudiar, en el origen, los límites doble, a lo largo de las rectas concurrentes en $(0; 0)$ y reiterados, de las funciones:

1º) $z = \dfrac{xy}{xy + (x - y)^2}$;

2º) $z = (x + y) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}$ si $x \neq 0 \neq y$ con $z = 0$ en el resto;

3º) $z = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$;

4º) $z = -\dfrac{|x - y|}{x^2 - 2xy + y^2}$;

5º) $x = e^{-\frac{|x - y|}{x^2 - 2xy + y^2}}$;

6º) $z = |x|^y$;

7º) $z = |x|^{|1/y|}$.

3. Estudiar la continuidad en el origen y a lo largo de las rectas concurrentes en él, de las funciones:

1º) $f(x, y) = \operatorname{sen}(\operatorname{Arc\,tg} \dfrac{y}{x})$ si $x \neq 0$; $f(0, y) = 0$;

2º) $f(x, y) = x^2/y$ si $y \geqq 0$ con $x^2/y \leqq 1$, $f(x, y) = y/x^2$ si $y \geqq 0$ con $x^2/y \geqq 1$, $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = f(x, -y)$ si $y < 0$.

4. Demostrar que la función $f(x, y) = y/(y^2 + x^2)$ si $x \neq 0$, $f(0, y) = 0$, es continua en $y = 0$ para cada x fijo, pero no es uniformemente continua respecto de cualquier entorno de $x = 0$.

5. Demostrar en detalle que si una función $f(x, y)$ es continua doblemente en el rectángulo $x_0 \leqq x \leqq x_1$, $y_0 \leqq y \leqq y_1$, entonces la función es continua en $y = b \varepsilon (y_0, y_1)$ uniformemente respecto de $x \varepsilon [x_0, x_1]$.

6. Tomando como principal el infinitésimo $\varrho = +\sqrt{x^2 + y^2}$, estudiar en el origen los órdenes de:

1º) $c_1 x^2 + 2c_2 xy + c_3 y^2$;

2º) $x^3 - 3xy^2$;

3º) la función del ejercicio 2-1º) de § 64;

4º) $(\sqrt{x^2 + y^2})^p \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

5º) $(x^2 + y^2)\left(\operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

§ 66. DERIVADAS Y DIFERENCIALES PRIMERAS

1. Derivación parcial. — Sea $f(x, y)$ una función uniforme de las variables independientes x e y. Si hacemos $y = \text{const.}$, z resulta función de una sola variable, x, cuya derivada, si existe, será igual a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

DEF. *Llamaremos derivada parcial respecto de x, de la función $z = f(x, y)$, indicándola con cualquiera de las notaciones*

$$f_x(x, y), \quad D_x f(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad z_x, \quad D_x z, \quad \frac{\partial z}{\partial x},$$

a la derivada así obtenida, dejando fijo el valor de la otra variable

$$[66\text{-}1] \quad f_x(x, y) = \lim \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{para} \quad \Delta x \to 0.$$

El valor de la derivada parcial en el punto (x_0, y_0) lo designaremos también sencillamente por $\partial z/\partial x_0$ y más explícitamente por $f_x(x_0, y_0)$.

NOTA. Las tres primeras notaciones, aunque menos breves, son más convenientes cuando se trata de indicar el *valor* de la derivada parcial en un punto (x_0, y_0):

$$f_x(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

La notación de JACOBI

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

no debe confundirse con un cociente.

Interpretaremos geométricamente esta definición. La ecuación $z = f(x, y)$ es la ecuación de una superficie, mientras que para $y = y_0$ fijo, $z = f(x, y_0)$ es la ecuación de la curva Γ_0 que resulta de la intersección de la superficie y el plano $y = y_0$. Por lo tanto, $\partial f(x, y_0)/\partial x$ nos da el valor del coeficiente angular de la tangente en cualquier punto de la curva Γ_0.

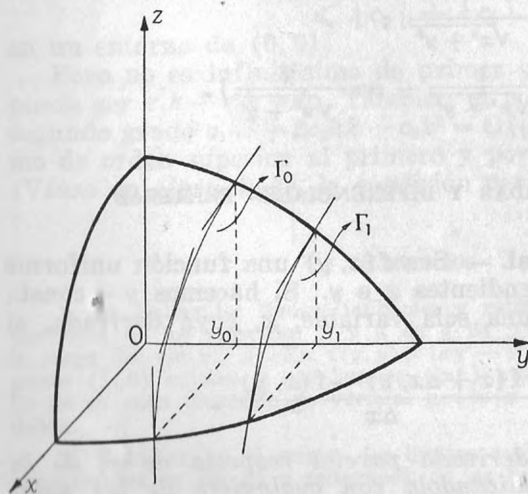


Fig. 221

Para otro valor constante $y = y_1$, obtenemos otra curva Γ_1; es decir, al variar el valor de y se obtiene una infinidad de curvas paralelas al plano $x\,z$, o lo que es lo mismo, una infinidad de funciones de una variable x (fig. 221).

En forma análoga se define la *derivada parcial de* $z = f(x, y)$ *con respecto a* y, que indicaremos

$$f_y(x, y) = D_y f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

La interpretación geométrica es la misma que para el caso anterior (fig. 222).

Para las funciones de varias variables independientes x_1, x_2, x_3, ..., x_n, se define análogamente la derivada parcial respecto de x_1 suponiendo constantes las demás; y del mismo modo las derivadas parciales respecto de x_2, de x_3, ..., denotándose así: f_1, f_2, ...

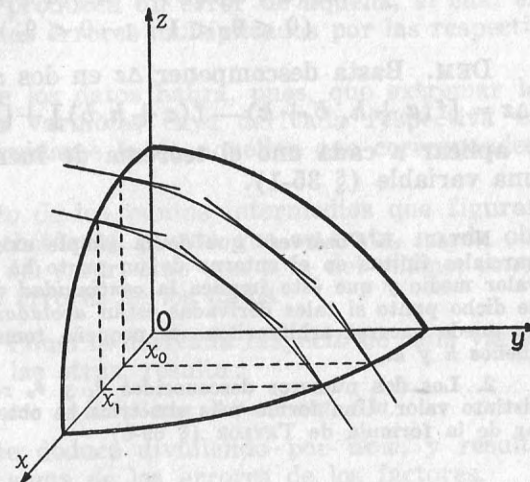


Fig. 222

Mientras la existencia de derivada finita implica la continuidad de las funciones de una variable, no basta la existencia de derivadas primeras para asegurar la continuidad de $f(x, y)$.

EJEMPLOS: 1. La derivada parcial con respecto a x de la función $f(x, y) = \text{sen}\, x \cos y$ en el punto (a, b) es

$$\frac{d}{dx}\Big[(\text{sen}\, x \,.\, \cos b)\Big]_{x=a} = \Big[\cos x \,.\, \cos b\Big]_{x=a} = \cos a \,.\, \cos b.$$

2. $$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad z = 0 \text{ en el origen.}$$

Sus derivadas en cualquier punto distinto del origen se calculan por la regla del cociente. Siendo nula la función sobre los ejes, sus derivadas en el origen son nulas. Sin embargo, tendiendo el punto al origen según diversas direcciones, resultan límites diversos para z.

3. $$z = \text{sg}\{(y - x^2)(y - 2x^2)\} \text{ en } x^2 + y^2 > 0 \quad ; \quad z(0,0) = 0$$

(cfr. ej. 2 de § 65-3). En el origen es $z_x = 0$, $z_y = 0$ por conservarse constante en los ejes, a pesar de ser discontinua, puesto que en la lúnula vale -1.

2. **Teorema del valor medio o de los incrementos finitos y consecuencias.** Vamos a expresar mediante las derivadas f_x y f_y el incremento de la función $f(x, y)$ cuando incrementamos las variables x e y en h y k.

TEOR. *Si la función* $z = f(x, y)$ *tiene derivadas parciales*

finitas f_x, f_y *en un entorno del punto* (a, b), *entonces el incremento* Δz *está dado por la expresión*

$$[66\text{-}2] \quad \Delta z = f(a+h,\, b+k) - f(a,b) = hf_x(a+\theta_1 h,\, b) + kf_y(a+h,\, b+\theta_2 k) \quad ; \quad (0<\theta_1<1 \;\; ; \;\; 0<\theta_2<1).$$

DEM. Basta descomponer Δz en dos sumandos así:

$$\Delta z = [f(a+h,\, b+k) - f(a+h,\, b)] + [f(a+h,\, b) - f(a,b)]$$

y aplicar a cada uno el teorema de incrementos finitos para una variable (§ 35-1).

NOTAS: 1. Obsérvese que de la simple existencia de las derivadas parciales finitas en el entorno de un punto ha resultado el teorema del valor medio y que éste implica la *continuidad* de $f(x, y)$ en un entorno de dicho punto si tales derivadas están *acotadas* en dicho entorno, pues Δz puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando suficientemente pequeños h y k.

2. Los dos números desconocidos θ_1 y θ_2 resultarán en general de distinto valor. Una forma más simétrica se obtendrá como caso particular de la fórmula de TAYLOR (§ 69-5).

3. Los puntos $(a+h,\, b+k)$ y (a, b) han de pertenecer a un mismo entorno (§ 64-4, *b*, Def. 2) en que existan las derivadas parciales, sin que baste que ambos puntos pertenezcan a un recinto D donde se verifiquen dichas condiciones de hipótesis (fig. 223).

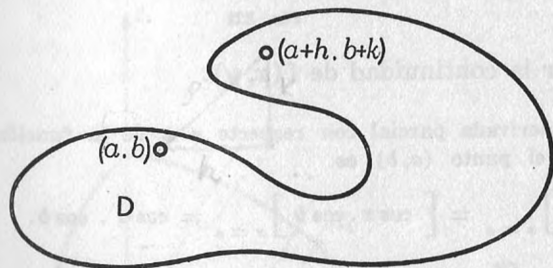


Fig. 223

COROLARIO 1º *Para que una función* $f(x, y)$, *con derivadas parciales en todos los puntos de un recinto, sea constante en él, es necesario y suficiente que* f_x *y* f_y *sean nulas en todos los puntos del recinto.*

Pues si un segmento y sus dos componentes están contenidos en el recinto, la diferencia Δz de valores en sus extremos es nula, según [66-2], es decir, z toma igual valor en ambos; y como dos puntos cualesquiera (x_0, y_0), (x, y) del recinto se pueden unir por una poligonal de número finito de tales lados (§ 64-5), resulta $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ para todo punto (x, y).

COROLARIO 2º *Si dos funciones tienen finitas e iguales las derivadas parciales en un recinto, su diferencia es constante en él* (cfr. § 35-3).

3. Aplicación al cálculo aproximado. — El teorema del valor medio tiene aplicaciones análogas a las ya vistas en el caso de una variable.

Calculada una magnitud en función de otras, los errores en las medidas de éstas producen un error de aquélla, el cual es igual a la suma de estos errores multiplicados por las respectivas derivadas.

En la medición de los datos habrá, pues, que extremar la exactitud en aquellas variables cuya derivada respectiva es grande; y puede descuidarse la de aquellas que corresponden a derivada pequeña.

El desconocimiento de los puntos intermedios que figuran en el teorema no es obstáculo, puesto que se trata, no de obtener el valor exacto del error, sino una cota del mismo, conocidas las cotas de los errores de los datos.

Error de uvw. — Como la derivada respecto de cada variable es el producto de las otras, resulta:

$$\Delta(uvw) = vw\,.\,\Delta u + uw\,.\,\Delta v + uv\,.\,\Delta w$$

y el error relativo se deduce dividiendo por uvw, y resulta *aproximadamente* la suma de los errores de los factores.

Para acotar rigurosamente el error de uvw debe tenerse en cuenta que vw, uw, uv deben tomarse en puntos intermedios de los intervalos respectivos.

Análogamente se deducen las otras reglas de cálculo de errores en las operaciones aritméticas.

EJEMPLO. Dada la base a y los ángulos contiguos B y C, el lado b se calcula por la fórmula:

$$b = \frac{a\,.\,\text{sen B}}{\text{sen A}} = \frac{a\,.\,\text{sen B}}{\text{sen (B + C)}}\,.$$

Sus derivadas respecto de a, B y C son:

$$\frac{\text{sen B}}{\text{sen (B + C)}}\,,\quad \frac{a\,.\,\text{sen C}}{\text{sen}^2\text{(B + C)}}\,,\quad -\frac{a\,.\,\text{sen B}\,.\,\cos\text{(B + C)}}{\text{sen}^2\text{(B + C)}}\,.$$

Si los datos son:

$$a \sim 10 \text{ m.} \;\; , \;\; \text{B} \sim 29^\circ \;\; \text{C} \sim 61^\circ \;\; ,$$

los valores aproximados de las derivadas no llegan en valor absoluto a

$$0{,}5 \;\; ; \;\; 9 \;\; ; \;\; 0{,}05 \;\; ;$$

esto indica que debe extremarse la exactitud en la medida de B, aunque se descuide la de C, que apenas influye. Supongamos que los errores absolutos sean:

$$\Delta a < 0{,}05 \;\; ; \;\; \Delta\text{B} < 10' < 0{,}003 \;\; ; \;\; \Delta\text{C} < 10' < 0{,}003.$$

Aunque no se conocen los valores intermedios B, C, puede asegurarse que están comprendidos entre

$$29^\circ \pm 10' \;\; ; \;\; 61^\circ \pm 10' \;\; ;$$

luego: $B + C > 89°$, por tanto, las derivadas son seguramente menores que

$$0{,}5 \quad ; \quad 10 \quad ; \quad 0{,}05$$

y el error total menor que

$$0{,}025 + 0{,}03 + 0{,}00015 \sim 0{,}06$$

donde se observa que el error de C no ha influído sensiblemente, pudiendo haberse apreciado ese ángulo casi a simple vista.

4. Funciones diferenciables. — Extendiendo a varias variables la definición de THOMAE - STOLZ (§ 34-1), tendremos

DEF. *Diremos que la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) si está unívocamente definida en un entorno de este punto y su incremento se expresa así:*

[66-3] $$\Delta z_0 = f(x_0 + \Delta x_0,\ y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0) = A . \Delta x_0 + B . \Delta y_0 + o(\varrho) \quad ,$$

como función lineal homogénea de los incrementos independientes Δx_0, Δy_0 con coeficientes constantes A y B, a menos de un infinitésimo $o(\varrho)$ de orden superior (§ 65-4 y § 24-3, c_1) al principal

$$\varrho = + \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2}\,.$$

Se llama diferencial total de una función diferenciable al infinitésimo principal, parte lineal de [66-3] designado por

[66-4] $$dz_0 = A . \Delta x_0 + B . \Delta y_0 .$$

Si una función es diferenciable en un punto, entonces existen y son finitas sus primeras derivadas parciales. En efecto, si en [66-3] hacemos $\Delta y_0 = 0$, resulta

$$\Delta z_0 = A . \Delta x_0 + o(\Delta x_0)$$

y por tanto (§ 66-1):

$$A = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta z_0}{\Delta x_0} = f_x(x_0, y_0) .$$

Del mismo modo, para $\Delta x_0 = 0$, resulta

$$B = \lim_{\Delta y_0 \to 0} \frac{\Delta z_0}{\Delta y_0} = f_y(x_0, y_0) .$$

En particular (cfr. § 34-1), si $f(x, y) = x$ obtendremos $dx = \Delta x$, y si $f(x, y) = y$ será $dy = \Delta y$, por lo que en un punto genérico (x, y) la expresión [66-4] se puede escribir en la siguiente forma:

[66-5] $$dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy \quad ,$$

que llamaremos *expresión analítica de la diferencial* para distinguirla de la definición [66-4].

Como Δx_0, Δy_0 son infinitésimos por lo menos de primer orden respecto de ϱ (§ 65-4), de [66-3] resulta $\Delta z_0 \to 0$ con $\varrho \to 0$, y resumiendo con lo anterior:

TEOR. 1. *Toda función diferenciable es continua y derivable.* El teorema recíproco no es cierto como muestra el primero de los ejemplos siguientes, debido a THOMAE:

EJEMPLO 1.

$$z(x, y) = \frac{xy}{+\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad z(0, 0) = 0 .$$

Siendo la función nula sobre los ejes, es $z_x(0, 0) = 0$ y $z_y(0, 0) = 0$; luego es cero la parte principal del incremento, y queda como parte residual la función; y como no es infinitésima respecto de ϱ, pues su cociente por ϱ es $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, que toma valores distintos en las diversas direcciones que concurren en 0, la función *no es diferenciable*. Sin embargo, es continua en el origen (§ 65-3, ejemplo 1), pues para

$$|x| \leqslant \varrho \quad , \quad |y| \leqslant \varrho \quad \text{es} \quad |z| \leqslant \frac{\varrho^2}{\varrho} = \varrho .$$

Vemos, pues, que para asegurar la continuidad la condición de ser diferenciable no es necesaria aunque sí suficiente. La ventaja grande del concepto de diferencial (§ 66-5) se apreciará al estudiar el plano tangente a una superficie.

NOTA 1. Para apreciar la mayor amplitud de la definición dada respecto del concepto clásico de diferencial que exigía la continuidad f_x, f_y, en el punto (x_0, y_0) basta fijarse en estas dos funciones:

$$z = x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad , \quad z = (x + y)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x + y} \quad ,$$

completadas por continuidad.

EJEMPLOS: 2. Para la primera es

$$z_x = -\pi \cos \frac{\pi}{x} + 2x \,.\, \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

discontinua; en el origen vale 0, como se vió en § 30-8, ejemplo 2. (Cfr. Cap. IX, nota IV, *c*). En cambio, $z_y = 0$ es continua.

Como

$$\frac{|z|}{\varrho} \leqslant \varrho \to 0; \text{ o sea: } |z| = o(\varrho), \text{ es diferenciable.}$$

3. La segunda tiene discontinuas ambas derivadas, que también son nulas en 0. Sin embargo, es diferenciable, pues su cociente por $|x| + |y|$ es $\leqslant |x| + |y|$.

Suponiendo ambas derivadas parciales continuas en (x_0, y_0), la expresión [66-3] es una inmediata consecuencia de la fórmula de incrementos finitos [66-2], pero aun podemos afirmar:

TEOR. 2. *Para que $z = f(x, y)$ sea diferenciable en (x_0, y_0)*

es suficiente que admita derivadas parciales finitas en el punto (x_0, y_0) *y una de ellas exista en un entorno de dicho punto y sea continua en* (x_0, y_0).

En efecto, suponiendo f_y continua en (x_0, y_0), por el teorema de incrementos finitos de una variable (§ 35-1), es

$$f(x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta y_0) - f(x_0+\Delta x_0, y_0) =$$
$$= f_y(x_0+\Delta x_0, y_0+\theta . \Delta y_0) . \Delta y_0 = f_y(x_0, y_0) . \Delta y_0 + \varepsilon_2 . \Delta y_0 \quad ,$$

con $\varepsilon_2 \to 0$ para $\varrho = +\sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2} \to 0$. Por otra parte, basta la definición de derivada parcial (§ 66-1) para establecer

$$f(x_0+\Delta x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) . \Delta x_0 + \varepsilon_1 . \Delta x_0 \quad ,$$

con $\varepsilon_1 \to 0$ para $\varrho = +\sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2} \to 0$. Por tanto,

$$[66\text{-}6] \qquad f(x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta y_0) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f_x(x_0, y_0) . \Delta x_0 + f_y(x_0, y_0) . \Delta y_0 + \varepsilon_1 \Delta x_0 + \varepsilon_2 . \Delta y_0 \quad ,$$

que prueba la tesis [66-3], por ser

$$| \varepsilon_1 . \Delta x_0 + \varepsilon_2 . \Delta y_0 | \leqslant (| \varepsilon_1 | + | \varepsilon_2 |) \varrho = o(\varrho) .$$

Obsérvese que si designamos por $\varepsilon = o(\varrho)/\varrho \to 0$ para $\varrho \to 0$, al ser $\varrho = \theta(| \Delta x_0 | + | \Delta y_0 |)$ con $0 < \theta \leqslant 1$, basta tomar

$$\varepsilon_1 = \theta\varepsilon \operatorname{sg} \Delta x_0 \quad , \quad \varepsilon_2 = \theta\varepsilon \operatorname{sg} \Delta y_0 \quad ,$$
$$\varepsilon\varrho = \varepsilon\theta \, | \Delta x_0 | + \varepsilon\theta \, | \Delta y_0 | = \varepsilon_1 \Delta x_0 + \varepsilon_2 \Delta y_0$$

para que de [66-3] se deduzca también una expresión de la forma [66-6] y ambas resulten equivalentes.

Respecto del incremento de una función de más de dos variables pueden hacerse las mismas consideraciones anteriores. En particular, la expresión analítica de la diferencial total de una función $u = f(x, y, z)$ de tres variables será:

$$[66\text{-}7] \quad du = f_x(x, y, z) \, dx + f_y(x, y, z) \, dy + f_z(x, y, z) \, dz$$

que difiere del incremento dependiente Δu en un infinitésimo $o(\varrho)$ de orden superior al principal $\varrho = +\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

NOTA 2. Cada uno de los sumandos en [66-5] ó [66-7] se llama *diferencial parcial* y se designan así:

$$[66\text{-}7'] \qquad d_x u = f_x dx \quad , \quad d_y u = f_y dy \quad , \quad d_z u = f_z dz .$$

Son las diferenciales de las funciones de una variable (§ 34-1) que resultan de mantener constantes todas las variables independientes, menos una. Así, pues, *en una función diferenciable*, la diferencial total es la suma de sus diferenciales parciales respecto de cada una de las variables independientes, pero no se puede tomar esto último como definición equivalente a la dada anteriormente. (Cfr. ejemplo 1).

5. Significado geométrico de la diferencial: plano tangente. Derivada direccional. — *a*) Si una función uniforme $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), la diferencial total, función lineal

y homogénea en $dx_0 = \Delta x_0 = x - x_0$ y $dy_0 = \Delta y_0 = y - y_0$ representa la ecuación incremental $z - z_0 = dz_0$ de un plano

$$[66\text{-}8] \quad z - z_0 = f_x(x_0, y_0) . (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) . (y - y_0)$$

llamado *plano tangente* a la superficie gráfica (§ 64-2, *a*) de la función en el punto (x_0, y_0, z_0). Geométricamente se caracteriza por el hecho de que en el entorno de (x_0, y_0) las ordenadas z de dicho plano difieren de las de la superficie en un infinitésimo de orden superior a $\varrho = +\sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2}$.

El plano [66-8] cortado por el plano $y = y_0$ da la recta $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$, tangente en (x_0, y_0, z_0) a la curva sección $z = f(x, y_0)$ de la superficie por dicho plano (§ 31-1). Más general, por la misma [66-3], la intersección de la superficie con un plano *vertical* cualquiera, que pase por la recta $x = x_0$, $y = y_0$, dará una curva cuyas ordenadas diferirán de las de la recta intersección de dicho plano vertical con el plano tangente [66-8] en un infinitésimo $o(\varrho)$ de orden superior al principal ϱ y por tanto la recta intersección será tangente a la curva sección en (x_0, y_0, z_0) (§ 34-2). Así como el tomar la diferencial por el incremento equivale en las funciones de una variable a sustituir la curva por su recta tangente, para las funciones de dos variables, eso equivale a sustituir la superficie por su plano tangente.

En § 67-1, *b* demostraremos que el plano tangente contiene las rectas tangentes a *todas las curvas* planas o alabeadas de la superficie que pasen por el punto (x_0, y_0, z_0) y *admitan tangente* en él.

Los parámetros directores (§ 60-5, *d*) de la recta normal al plano tangente [66-8], llamada sencillamente *normal a la superficie*, son z_x, z_y, -1, ó los valores opuestos $-z_x$, $-z_y$, $+1$, según que su sentido se tome respectivamente hacia *abajo* o hacia *arriba*. (¿Por qué? ¡Cuidado con el signo!). Designamos abreviadamente $z_x = f_x(x_0, y_0)$ y análogamente $z_y = f_y(x_0, y_0)$.

En la fig. 224 si PQRS es un trozo de la superficie $z = f(x, y)$ y PT′TT″ es un trozo de su plano tangente en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, vemos que

$$PP' = \Delta x_0 \quad , \quad PP'' = \Delta y_0 \quad ,$$
$$\frac{P'T'}{PP'} = f_x(x_0, y_0) \quad , \quad \frac{P''T''}{PP''} = f_y(x_0, y_0) \quad ;$$
$$N'R = \Delta z \quad , \quad P'T' = d_x z \quad , \quad P''T'' = d_y z \quad ;$$
$$[66\text{-}9] \quad dz_0 = \frac{P'T'}{PP'} PP' + \frac{P''T''}{PP''} PP'' = P'T' + P''T'' = N'T.$$

*a*₁) *Condición necesaria y suficiente para que la superficie*

$z = f(x, y)$ admita plano tangente en un punto es que la función sea diferenciable en él.

Fig. 224

a_2) *La expresión analítica de la diferencial en el punto se convierte en la ecuación incremental del plano tangente sustituyendo las diferenciales por los incrementos.*

b) Siendo $f_x(x_0, y_0)$ por definición

$$\lim \frac{z - z_0}{x - x_0}$$

cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ en dirección paralela al eje x, y análogamente f_y, ocurre preguntar cuál será el límite del cociente $\Delta z / \varrho$, siendo ϱ la distancia del punto (x_0, y_0) al (x, y) cuando éste tiende hacia aquel en dirección de argumento φ (brevemente dirección φ), es decir de modo que sea

$$\Delta x_0 = \varrho \cos \varphi \quad , \quad \Delta y_0 = \varrho \operatorname{sen} \varphi .$$

Se llama *pendiente en la dirección* φ *o derivada en la dirección* φ, al límite, *en caso de existir*

[66-10] $$D_\varphi \ f(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \to 0^+} \frac{\Delta_\varphi \ z}{\varrho} =$$

$$= \lim_{\varrho \to 0^+} \frac{f(x_0 + \varrho \cos \varphi, \ y_0 + \varrho \operatorname{sen} \varphi) - f(x_0, y_0)}{\varrho} .$$

Si existen las derivadas en todas las direcciones, las rectas que las tienen por pendientes forman en general un *cono tangente* a la superficie. Si $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), dicho cono se convierte en el *plano tangente* antes definido. En efecto, si $f(x, y)$ *es diferenciable en* (x_0, y_0) será (fig. 225)

Fig. 225

$$f(x_0 + \varrho \cos \varphi, \ y_0 + \varrho \operatorname{sen} \varphi) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f_x \,.\, \varrho \cos \varphi + f_y \,.\, \varrho \operatorname{sen} \varphi + o(\varrho) \quad ,$$

de donde el límite [66-10] existirá siempre y valdrá

[66-11] $$D_\varphi \ f(x_0, y_0) = f_\varphi \ (x_0, y_0) =$$
$$= f_x(x_0, y_0) \,.\, \cos \varphi + f_y(x_0, y_0) \,.\, \operatorname{sen} \varphi \quad ,$$

pendiente en la dirección φ del plano [66-8], es decir:

c) *En una función diferenciable, la pendiente* D_φ *de la tangente lateral a la curva sección por un semiplano vertical es la correspondiente a su plano tangente dada por* [66-11].

EJERCICIO. Demuéstrese el recíproco, es decir, si existe cono tangente y éste degenera en un plano, la función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto considerado.

Llamaremos *punto cónico* de una superficie aquel para el que exista cono tangente que no degenere en un plano.

NOTAS: 1. Obsérvese que en el *sentido opuesto* $\varphi + \pi$, resulta en [66-11] el *valor opuesto*.

2. En particular, las derivadas parciales, son

$$D_x = D_{\varphi=0} = -D_{\varphi=\pi};$$
$$D_y = D_{\varphi=\pi/2} = -D_{\varphi=-\pi/2}.$$

Si por ejemplo $D_{\varphi=0} \neq -D_{\varphi=\pi}$ no existe D_x, aunque sí derivadas parciales a la izquierda y a la derecha, distintas según el eje x.

3. La derivada en cada dirección tiene significado independiente de los ejes coordenados. Si se hacen girar los ejes, se convierten en derivadas f_x, f_y las correspondientes a las nuevas direcciones.

4. En § 67-1, *c*, daremos otra interpretación de la derivada direccional.

EJEMPLOS: 1. *Paraboloide*. La ecuación del paraboloide es $z = ax^2 \pm \pm by^2$; considerando el signo [+], el paraboloide es elíptico, con el signo [—] hiperbólico (§ 62-3).

Las derivadas son: $z_x = 2ax$, $z_y = \pm 2by$, luego la ecuación del plano tangente al paraboloide, en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$2axx_0 \pm 2byy_0 - 2ax_0^2 \mp 2by_0^2 + z_0 = z.$$

Los dos términos: $-2ax_0^2 \mp 2by_0^2$ suman: $-2z_0$ puesto que el punto (x_0, y_0, z_0) está en la superficie, luego $z + z_0 = 2axx_0 \pm 2byy_0$ es la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico o hiperbólico en un punto.

La ecuación del plano tangente en el origen es $z = 0$; plano que deja a la superficie en su lado superior si el paraboloide es elíptico, pues en todos los demás puntos de éste es $z > 0$; pero el plano $z = 0$ corta el paraboloide hiperbólico en dos rectas $ax^2 = by^2$ (§ 62-4, *c*).

La pendiente del paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3) en la dirección $\varphi = \pi/4$ es $+3\sqrt{2}$.

2. La función

$$z = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad z(0, 0) = 0$$

es continua en todo punto distinto del origen como cociente de funciones continuas, y también lo es en éste por ser $|z| < 2\varrho^3/\varrho^2 = 2\varrho$.

En el origen O es $z_x = +1$, $z_y = -1$, y el incremento vale

$$z = x - y + \frac{yx^2 - xy^2}{x^2 + y^2},$$

no siendo el quebrado infinitésimo de orden superior a ϱ, pues dividido por ϱ es constante en cada dirección φ y sólo es nulo según los ejes coordenados y su primera bisectriz, luego *z no es diferenciable*. El cono tangente tiene pendientes dadas por

$$D_\varphi = (\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \cdot (1 + \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi) = \cos^3\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi$$

y sus generatrices atraviesan el vértice O, pues al cambiar x, y de signo

también cambia z; estos conos se llaman *impares* (§ 67-3). La superficie del ejemplo 1 del § 66-4 tiene también el origen O como punto cónico, pero su cono tangente está formado por semirrectas de origen O que no son opuestas dos a dos, pues al cambiar x e y de signo, no cambia z; estos conos se llaman *pares*.

6. **Gradiente.** — *a*) Dada una función diferenciable $u = f(x, y)$, para cada dirección φ existe D_φ dada por [66-11] como una función lineal y homogénea en los cosenos directores $\varphi_1 = \cos\varphi$, $\varphi_2 = \operatorname{sen}\varphi$ de la dirección, es decir, dicha $D_\varphi = u_x \cdot \varphi_1 + u_y \cdot \varphi_2$ representa *en el plano x, y* la componente según las direcciones φ de un mismo vector de dicho plano, llamado *vector gradiente*, que según la misma [66-11], para $\varphi = 0$ tiene por componente $f_x(x_0, y_0)$, y para $\varphi = \pi/2$ tiene por componente $f_y(x_0, y_0)$. Si a partir del punto $P(x_0, y_0)$ se lleva (fig. 226) a una cierta escala sobre cada semirrecta un segmento PQ igual a la pendiente en esa dirección (si es negativa, en el sentido opuesto), este segmento, según [66-11] es la proyección del vector de componentes u_x y u_y a dicha escala. El vector gradiente se designa así:

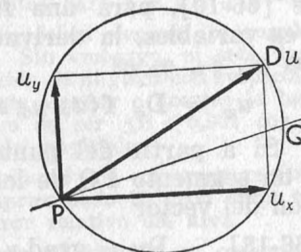


Fig. 226

$$Du \quad , \quad \operatorname{grad} u \quad , \quad \nabla u \quad (\nabla \text{ se lee "nabla"}).$$

Su módulo mide la pendiente máxima (pues es mayor que su proyección PQ sobre cualquier otra recta) y su dirección y sentido, son los que corresponden a ese máximo. En los puntos donde se anulan las dos derivadas (que corresponden a plano tangente horizontal si se adopta la representación por superficie), son nulas las derivadas en todas las direcciones.

La función $u = f(x, y)$ puede concebirse como un *campo escalar* que hace corresponder a cada punto del plano x, y un escalar u (por ejemplo, la temperatura o la cota de su representación gráfica)*.

Entonces si la función $u = f(x, y)$ es diferenciable, dicho campo escalar engendra un campo vectorial

$$[66\text{-}12] \qquad \operatorname{grad} u = u_x \cdot \mathbf{i} + u_y \cdot \mathbf{j}$$

que se llama *derivado* de u y ésta se llama su *función primitiva*; la opuesta $-u$ se llama *función potencial*. Veremos (§§ 89-1 y 91-4, *b*) que no todo campo vectorial es un cam-

* No toda función $u = f(x, y)$ define un campo escalar: por ejemplo, cada uno de los cosenos directores de un vector de un campo vectorial plano, es en un sistema de coordenadas (x, y) una función de x é y, pero no depende sólo del punto, sino también del sistema de coordenadas elegido.

po de gradientes, es decir, que no siempre un campo vectorial tiene función potencial.

Los segmentos PQ resultan ser iguales, en adecuada escala, a los incrementos de cotas del plano tangente medidos sobre las generatrices de la superficie cilíndrica circular de eje vertical que pasa por P y radio uno, tomados entre el plano horizontal $u = u_0$ y dicho plano tangente, incrementos que miden la pendiente [66-11] en cada dirección y sentido φ.

Esta pendiente y el módulo del gradiente [66-12] no deben confundirse con la diferencial total dada por [66-9].

b) Análogamente a como se ha obtenido [66-11] a partir de [66-10], para una función diferenciable $u = f(x, y, z)$ de tres variables, la derivada en la dirección de cosenos directores φ_1, φ_2, φ_3 es

$$u_\varphi = D_\varphi f(x_0, y_0, z_0) = u_x . \varphi_1 + u_y . \varphi_2 + u_z . \varphi_3 .$$

Si a partir del punto (x_0, y_0, z_0) se lleva en la dirección φ un segmento PQ de longitud u_φ, éste resulta ser la proyección del vector

[66-13] $$Du = \text{grad}\, u = \nabla u = u_x . \mathbf{i} + u_y . \mathbf{j} + u_z . \mathbf{k} ,$$

llamado gradiente de u en el punto (x_0, y_0, z_0) y a lo largo de cuya línea de acción se da la pendiente máxima.

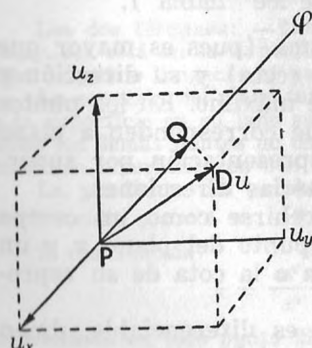


Fig. 227

La gráfica de las pendientes, o sea el lugar de los extremos Q de las componentes PQ (fig. 227) en las direcciones φ del gradiente, es la superficie esférica de diámetro *Du*.

c) Si en la función de dos variables $u = f(x, y)$ se consideran las curvas de nivel (§ 64-2, *b*) a lo largo de las cuales es $\Delta u = 0$, su pendiente en cada punto es nula, y recordando la gráfica dada en la fig. 226 resulta:

El gradiente [66-12] *en un punto es normal a la curva de nivel que pasa por ese punto y está dirigido en el sentido de los valores crecientes de la función.*

Análogamente para el gradiente [66-13], sustituyendo en la conclusión anterior "curva de nivel" por "superficie de nivel".

EJERCICIOS

1. Derivadas parciales de las funciones de los ejercicios 2 y 4 de § 64.

2. Considerando $F = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ como función de las nueve variables $a, b, \ldots, k$, probar que: 1º) $aF_a + bF_b + cF_c = F$:

2º) $\begin{vmatrix} F_a & F_b & F_c \\ F_d & F_e & F_f \\ F_g & F_h & F_k \end{vmatrix} = F^2$.

3. Aplicar la fórmula [66-2] a la función $z = x^2 + y^2 + x^3$ en el punto (1; 2), determinando en este caso las expresiones exactas de θ_1 y θ_2 en función de h y k y sus respectivos límites para $\varrho = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$.

4. En el ejemplo de § 66-3, indicar cómo deben elegirse los ángulos B y C para la mejor determinación de b. Sin embargo, si está dado $C \sim 61°$ y se aumenta la precisión de la medición de ángulos con respecto a la de las longitudes, estudiar si es conveniente alargar o acortar la base a. Estudiar en el ejemplo del texto el caso de ser $\Delta B < 0{,}001$ con el mismo error relativo 0,005 en la medición de longitudes.

5. En un triángulo se han medido dos lados con un error relativo $< 0{,}01$ y el ángulo comprendido de valor aproximado 30° con error relativo $< 15'$. Calcular una cota para el error relativo del área.

6. Deducir las reglas que acotan el error relativo de un cociente y de una raíz.

7. Un trozo de bronce pesa 100 g en el aire con error absoluto < 5 mg y 88 g en el agua con error absoluto < 8 mg. Acotar el error relativo de su densidad.

8. Diferencial total: 1º) De $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y$ para $x = 3$, $y = -1$, $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = -0{,}2$ e interpretar el resultado; 2º) De $z = y^2 \ln(x/y)$ para $x = y = 2$, $\Delta x = 0{,}4$; $\Delta y = -0{,}3$.

9. Campo de definición y diferencial total de las funciones: 1º) $u = x^y$; 2º) $u = xy \operatorname{Arc\,sen}(z/x)$.

10. Investigar la derivabilidad y diferenciabilidad en el origen de las funciones:

1º) $f(x, y) = +\sqrt{|xy|}$;
2º) $f(x, y) = x . \operatorname{sen}[4 \operatorname{Arc\,tg}(y/x)]$ si $x \neq 0$; $f(0, y) = 0$.

11. Ángulo entre la recta $(x + 2)/(-4) = (y - 4)/2 = (z - 4)/7$ y la superficie $x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ en uno de los puntos de intersección.

12. En la función $z = \ln(e^x + e^y)$: 1º) Verificar que $z_x + z_y = 1$; 2º) Probarlo tomando los valores funcionales en una recta; 3º) Derivada en la dirección que forma 45° con el eje x.

13. Dado el potencial de fuerzas $u = x^2 + xy + y^2$ calcular en el punto (3; 2) la fuerza máxima, aquella que corresponde a la dirección que forma 30° con el eje x, y las direcciones en que es nula.

14. Dado el potencial de velocidades $u = xy^2 - 2yz^2$, calcular en el punto (−2; 3; 4) la velocidad en la dirección φ de parámetros directores (6; −2; 3); hallar las direcciones en que es nula y en que es máxima, dando su módulo en este caso.

15. Dado el paraboloide hiperbólico $z = 2x^2 - 3y^2$, hallar en el punto (3; 2; 6) la pendiente en la dirección $y = x/\sqrt{3}$; hallar la dirección de máxima pendiente y calcular ésta; hallar la dirección de pendiente nula.

16. Respecto de la gráfica de la función de § 66-4, ejemplo 1, hallar en el origen las pendientes en cada dirección y las direcciones en que son máximas.

17. Si ψ es el ángulo según el cual actúa Df, demostrar que

$$f_{\psi+\varphi} = |\,Df\,| \cdot \cos\varphi .$$

18. Demostrar que para $f = +\sqrt{x^2+y^2}$, la derivada f_φ en cualquier punto (a, b) distinto del origen, según una dirección cualquiera, viene dada por $f_\varphi = -\cos\gamma$, donde γ es el ángulo que con dicha dirección forma la recta que une (a, b) al origen de coordenadas. Comprobarlo en $(4; 7)$ para la dirección del segmento que une este punto al $(1; 3)$.

§ 67. FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS

1. Funciones compuestas de una variable independiente. Derivadas y aplicaciones. — *a*) Consideremos una función uniforme de dos variables $z = f(x, y)$ y supongamos que x é y no sean ya variables independiente, sino funciones de una misma variable t, fig. 228,

[67-1] $\qquad x = x(t) \quad , \quad y = y(t).$

Con estas condiciones, a cada valor de t corresponde un punto $[x(t), y(t)]$. En consecuencia

[67-2] $\qquad z = f[x(t), y(t)] = F(t)$

es en definitiva una función de t: la llamaremos *función compuesta de t.*

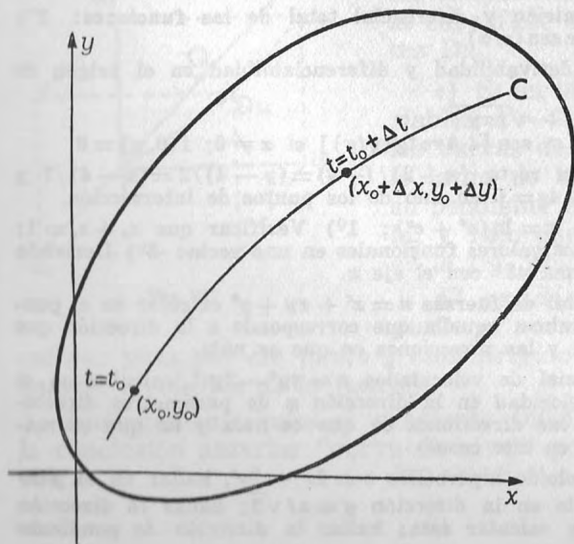


Fig. 228

Las relaciones [67-1] pueden considerarse en el plano x, y como las ecuaciones paramétricas de una curva C. Los valores de z de la expresión [67-2] son los valores que toma la función de dos variables $z = f(x, y)$ en los puntos de la curva C.

TEOR. 1. *Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) (§ 66-4) y las funciones $x = x(t)$ é $y = y(t)$ con $x_0 = x(t_0)$ é $y_0 = y(t_0)$ son derivables en $t = t_0$ (§ 30-2), entonces la función t dada por $z = f[x(t), y(t)]$ es derivable en t_0.*

En efecto, al incremento Δz lo podemos expresar en la siguiente forma (§ 66-4, [66-6]):

$$\Delta z_0 = \frac{\partial z}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0}\Delta y_0 + \varepsilon_1 \Delta x_0 + \varepsilon_2 \Delta y_0 \ ,$$

donde ε_1, ε_2 son infinitésimos con $\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2 \to 0$.

Si dividimos por Δt_0 queda:

$$\frac{\Delta z_0}{\Delta t_0} = \frac{\partial z}{\partial x_0}\cdot\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0}\cdot\frac{\Delta y_0}{\Delta t_0} + \varepsilon_1\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0} + \varepsilon_2\frac{\Delta y_0}{\Delta t_0} \ .$$

Para $\Delta t_0 \to 0$, el segundo miembro tiene límite, por haber supuesto derivables $x(t)$ é $y(t)$, y por tanto existentes y finitas $x'(t_0)$ é $y'(t_0)$ y ser también infinitésimas (§ 65-3, *b*) para $\Delta t_0 \to 0$ las funciones compuestas ε_1 y ε_2 de Δt_0 mediante Δx_0 y Δy_0.

Por tanto, existe derivada finita $dz/dt_0 = F'(t_0)$ y vale

[67-3] $$\frac{dz}{dt_0} = \frac{\partial z}{\partial x_0}\cdot\frac{dx}{dt_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0}\cdot\frac{dy}{dt_0} \ .$$

El mismo razonamiento es aplicable al caso en que z es función diferenciable de varias variables $u, v, \ldots, w$, que son funciones derivables de la única variable independiente t, resultando la que también llamaremos *derivada total*

[67-4] $\qquad z' = z_u \cdot u' + z_v \cdot v' + \ldots + z_w \cdot w'$

o bien

[67-5] $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dt}{dw} \ .$$

Así se obtiene la *regla de derivación de las funciones compuestas*:

TEOR. 2. *La derivada de una función diferenciable de las variables u, v, ..., w, que a su vez son funciones derivables de la variable independiente única t, es igual a la derivada parcial respecto de u por la derivada u respecto de t, más la derivada respecto de v por la derivada de v respecto de t, etc.*

NOTAS: 1. Obsérvese en [67-3], [67-4] y [67-5] la distinción entre derivadas parciales y ordinarias. ¿Por qué?

2. Las reglas de derivación dadas en § 32, en particular la de función de función, son caso particular de la anterior.

3. Algunos autores modernos (N. BARY, S. SAKS) llaman *superposición de funciones* a la consideración de función de funciones o funciones compuestas.

b) Ahora estamos en condiciones de demostrar que si existe plano tangente en (x_0, y_0, z_0) a una superficie uniforme, éste contiene las rectas tangentes a *todas las curvas* de la superficie que pasen por el punto (x_0, y_0, z_0) y *admitan tangente* en él (§ 66-5). Pues si la superficie $z = \mathrm{f}(x, y)$ contiene la curva $x = \mathrm{x}(t)$, $y = \mathrm{y}(t)$, $z = \mathrm{f}[\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t)]$, su tangente, en caso de existir, vendrá dada por la ecuación (§ 72-6, *b*):

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{\mathrm{f}_{x_0} . x'_0 + \mathrm{f}_{y_0} . y'_0} ,$$

y es inmediato comprobar que dicha recta tangente pertenece al plano tangente [66-8] a la superficie en (x_0, y_0, z_0).

c) Cuando las ecuaciones paramétricas [67-1] de la curva C supuesta rectificable con tangente continua (§ 55), se expresan como funciones de la longitud de arco *s* de C, es decir, si se tiene

$$x = \mathrm{x}(s) \quad , \quad y = \mathrm{y}(s) \quad ,$$

la fórmula [67-3] se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} ,$$

y por ser (§ 55-2) respecto de la inclinación φ de la tangente, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}s = \cos\varphi$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}s = \mathrm{sen}\,\varphi$, resulta $\mathrm{d}z/\mathrm{d}s = \partial z/\partial x . \cos\varphi + {}$ $+ \partial z/\partial y . \mathrm{sen}\,\varphi$, que es la derivada [66-11] en la dirección φ (§ 66-5). En esta expresión, los coeficientes $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ no dependen de C, sino que están determinados por la función $z = \mathrm{f}(x, y)$ en el punto que se considera, y en consecuencia el valor de $\mathrm{d}z/\mathrm{d}s$ en dicho punto depende sólo de φ. En otras palabras, *la derivada de* $\mathrm{f}(x, y)$ *con respecto a la longitud de arco en un punto es la misma para todas las curvas de tangente continua que tienen la misma dirección en dicho punto y su valor coincide con el de la derivada de* $\mathrm{f}(x, y)$ *en esa dirección* (§ 66-5).

EJEMPLOS: 1. Sea la función

$$\mathrm{f}(x, y) = x^5 - 2xy^2$$

donde $x = t + 2$ é $y = t^3 + 4$, y buscamos $\mathrm{df}(x, y)/\mathrm{d}t$ en el punto $t = 0$

Tendremos:

$$\mathrm{f}_x = 5x^4 - 2y^2 \quad , \quad \mathrm{f}_y = -4xy \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t^2 \quad .$$

y usando la regla [67-3] resulta:

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t} = (5x^4 - 2y^2) . 1 + (-4xy) . 3t^2 =$$
$$= 5(t+2)^4 - 2(t^3+4)^2 - 12t^2(t+2)(t^3+4) \quad ,$$

de donde

$$\left.\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 48.$$

2. Sea $y = u^v$, siendo u, v funciones de x; la derivada de y es

$$y' = v . u^{v-1} . u' + u^v . \ln u . v'.$$

Si es $y = x^x$ resulta:

$$y' = x . x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$$

que ya se obtuvo mediante logaritmos (§ 32-6).

2. Funciones compuestas de varias variables independientes. — Una función $z = \mathrm{f}(u, v, \ldots, w)$, donde $u, v, \ldots, w$ no son independientes, sino funciones de las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se llama también *función compuesta*. Una función compuesta de varias variables independientes es, pues, una *función de funciones* de estas variables.

Sea $z = \mathrm{f}(u, v, \ldots w)$ una función diferenciable de u, v, $\ldots$, w. Existirá y se obtendrá cada una de las derivadas

$$\mathrm{f}_1 = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_1} , \quad \mathrm{f}_2 = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_2} , \quad \ldots , \quad \mathrm{f}_n = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_n} ,$$

aplicando la misma regla anterior (§ 67-1, teor. 2), si son derivables las funciones intermedias $u, v, \ldots, w$ respecto de la correspondiente variable independiente, puesto que para cada una se suponen constantes las demás variables.

Si, por ejemplo, es $z = \mathrm{f}(u, v, w)$ diferenciable y u, v, w son funciones derivables de las variables independientes x, y, entonces es

$$[67\text{-}6] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} . \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} . \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial w} . \dfrac{\partial w}{\partial x} , \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} . \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} . \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial w} . \dfrac{\partial w}{\partial y} , \end{cases}$$

que también pueden escribirse

$$[67\text{-}6'] \quad \begin{cases} z_x = z_u . u_x + z_v . v_x + z_w . w_x , \\ z_y = z_u . u_y + z_v . v_y + z_w . w_y . \end{cases}$$

Si ahora multiplicamos la primera de éstas por el incremento independiente $\mathrm{d}x$ y la segunda por $\mathrm{d}y$ y sumamos, quedará

$$z_x\mathrm{d}x + z_y\mathrm{d}y = (z_u . u_x + z_v . v_x + z_w . w_x)\,\mathrm{d}x +$$
$$+ (z_u . u_y + z_v . v_y + z_w . w_y)\,\mathrm{d}y = z_u(u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y) +$$
$$+ z_v(v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y) + z_w(w_x\mathrm{d}x + w_y\mathrm{d}y).$$

Supuestas ahora diferenciables las funciones intermedias u, v, w, cada uno de los paréntesis del último miembro representa la diferencial total de u, v, y w respectivamente, que difieren de los respectivos incrementos en infinitésimos $\mathrm{o}(\varrho)$ con $\varrho = +\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Como Δz difiere de $z_u . \Delta u +$ $+ z_v . \Delta v + z_w . \Delta w$ en un infinitésimo $\varepsilon_1 . \Delta u + \varepsilon_2 . \Delta v + \varepsilon_3 . \Delta w$,

si se pone $\Delta u = du + o(\varrho)$, etc., este infinitésimo es $o(\varrho)$, y como también $z_u \cdot \Delta u + z_v \cdot \Delta v + z_w \cdot \Delta w$ difiere de $z_u du + z_v dv + z_w dw$ en un infinitésimo $o(\varrho)$, resulta en definitiva

TEOR. *Si $z = f(u, v, w)$ es una función diferenciable respecto de u, v, w, y éstas son funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ diferenciables de x, y, entonces es $z = f[u(x, y), v(x, y), w(x, y)]$ función diferenciable de x, y con diferencial total dada por*

[67-7] $$dz = z_u du + z_v dv + z_w dw ,$$

donde du, dv, dw son las diferenciales de las funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$.

Por § 66-4, los coeficientes de dx y dy en [67-7] serán las derivadas parciales z_x y z_y, volviéndose a encontrar [67-6′].

La expresión analítica [67-7] de la diferencial total de una función compuesta es la misma que para u, v, w variables independientes (cfr. § 34-5). Ésta es precisamente la ventaja de la notación diferencial y por ella se prefieren en Cálculo infinitesimal las diferenciales a las derivadas, pues al aplicar las fórmulas de diferenciación no interesa si una variable es independiente o es función de otras.

Sin embargo, se ha de tener muy en cuenta en los razonamientos cuando en fórmulas como la [67-7], las diferenciales se refieren a *incrementos independientes* o a *diferenciales funcionales*. Además, esta *invariancia de la expresión analítica de la diferencial de primer orden no se conserva en las diferenciales de orden sucesivo* (§ 69-3).

NOTA. En las aplicaciones de la derivación de funciones compuestas ocurre a veces que una de las funciones intermedias coincide ya con una variable independiente, por ejemplo $w \equiv x$, y entonces para $z = f(u, v, x)$ en [67-6] resulta la expresión confusa

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}$$

donde sería necesario escribir las derivadas parciales que figuran en los extremos en forma distinta, para significar que en la primera, se deriva parcialmente $z = f[u(x, y), v(x, y), x]$ manteniendo sólo y constante (siendo por tanto variables u y v), mientras que en la última, se deriva parcialmente $z = f(u, v, x)$ manteniendo u y v constantes. Siguiendo una notación muy usada en Termodinámica, distinguiremos ambas derivadas parciales escribiendo para la primera $(\partial z/\partial x)_y$ y para la última $(\partial z/\partial x)_{u,v}$, donde los índices indican las variables que se mantienen constantes en la derivación parcial (cfr. § 67-8).

3. **Funciones homogéneas: teorema de Euler.** — DEF. 1. Se dice que la función $f(x, y, \ldots, w)$ es *positivamente homogénea de grado* $m \gtreqless 0$ real cualquiera en un recinto R, si para todo valor *positivo* de λ se verifica

[67-8] $$f(\lambda x, \lambda y, \ldots, \lambda w) = \lambda^m f(x, y, \ldots, w).$$

El recinto R, si no se extiende a todo el espacio de las variables independientes, debe ser *angular* en el sentido de que si $(x, y, \ldots, w) \varepsilon R$ también $(\lambda x, \lambda y, \ldots, \lambda w) \varepsilon R$ para todo $\lambda > 0$.

DEF. 2. Si la condición [67-8] se cumple para *todo λ real*, la función se llama *homogénea* (en sentido estricto). En particular, para m entero impar, la función f se llama *homogénea impar*, mientras que se llama *homogénea par* para m entero par. Por tanto, para $\lambda = -1$ es $f(-x, -y, \ldots, -w) = \mp f(x, y, \ldots, w)$ respectivamente.

EJEMPLOS: 1. $f(x, y) = x^{1/4} y^{-5/4} \operatorname{tg}(y/x)$; $f(0, 0) = 0$.
Esta función es homogénea impar de grado —1 en todo el plano.

2. $f(x, y) = 2 + \ln \dfrac{x + y}{x}$; $f(0, 0) = 0$.

Esta función es homogénea par de grado 0 y el recinto R excluye del plano las rectas $x = 0$, $x + y = 0$ con el ángulo agudo comprendido entre ellas.

3. La función $f(x, y, z) = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es sólo positivamente homogénea de grado 1, en todo el espacio, pero no es homogénea impar, porque no se cumple [67-8] para todo λ real, sino sólo

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = |\lambda| f(x, y, z).$$

Refiriéndonos especialmente al caso de dos variables, si $m = 0$, es $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, es decir, la superficie $z = f(x, y)$ se compone de rectas horizontales que cortan al eje z, o de semirrectas horizontales que parten de dicho eje según que f sea homogénea (en sentido estricto) o positivamente homogénea. En el primer caso, si la función es continua (excepto en el origen donde no puede serlo, salvo el caso de función constante), la superficie se llama *conoide* y es *par* (ejemplo 2).

Si $m = 1$, y la función $z = f(x, y)$ es homogénea (en sentido estricto), la superficie es un *cono impar* de vértice en el origen (§ 66-5, ejemplo 2); mientras que si la función es sólo positivamente homogénea, la superficie formada por una sola hoja, es un *cono par* (§ 66-4, ejemplo 1), aunque sea de grado $m = 1$ impar.

TEOR. 1. *Si la función homogénea (en sentido estricto o bien positivamente) $f(x, y, \ldots, w)$ de grado m es diferenciable en todo punto de su recinto R de definición, entonces se verifica la identidad de* EULER:

[67-9] $$x f_x(x, y, \ldots, w) + y f_y(x, y, \ldots, w) + \ldots + w f_w(x, y, \ldots, w) = m f(x, y, \ldots, w).$$

Pues basta derivar [67-8] parcialmente respecto de λ y hacer luego $\lambda = 1$.

El recíproco sólo subsiste para las funciones positivamente homogéneas. Es decir:

TEOR. 2. *Si la función $f(x, y, \ldots, w)$ es diferenciable en todo punto de un recinto R angular con vértice en el origen y en él se verifica [67-9], entonces dicha función es positivamente homogénea de grado m.*

En efecto, escogiendo arbitrariamente $(x_0, y_0, \ldots, w_0)$ en R formemos la función

$$g(\lambda) = f(\lambda x_0, \lambda y_0, \ldots, \lambda w_0)$$

definida para todo λ positivo. Por la regla de derivación de una función compuesta (§ 67-1, teor. 2) es:

$$g'(\lambda) = x_0 f_x(\lambda x_0, \ldots, \lambda w_0) + \ldots + w_0 f_w(\lambda x_0, \ldots, \lambda w_0)$$

y aplicando la hipótesis [67-9] resulta

$$\lambda g'(\lambda) = \lambda x_0 f_x(\lambda x_0, \ldots, \lambda w_0) + \ldots + \lambda w_0 f_w(\lambda x_0, \ldots, \lambda w_0) = m g(\lambda).$$

En virtud de esta igualdad, la función derivable $\lambda^{-m} g(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$, tiene derivada siempre nula

$$\lambda^{-m} g'(\lambda) - m\lambda^{-m-1} g(\lambda) = 0 \quad ,$$

y por tanto se reduce a una constante (§ 35-3) que para $\lambda = 1$ vale $g(1) = f(x_0, y_0, \ldots, w_0)$, siendo por tanto

$$\lambda^{-m} g(\lambda) = \lambda^{-m} f(\lambda x_0, \lambda y_0, \ldots, \lambda w_0) = f(x_0, y_0, \ldots, w_0) \quad ,$$

es decir, se cumple [67-8] para todo punto de R, c. q. d.

NOTAS: 1. La función del ejemplo 3 cumple [67-9] y no es homogénea en sentido estricto. Esto hace ver que la identidad de EULER [67-9] es sólo condición necesaria y *suficiente* para las funciones diferenciales *positivamente* homogéneas.

2. Una fácil generalización del concepto de función homogénea, al considerar varias razones de semejanza $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, tiene importancia en Física por ser la base del llamado *análisis dimensional*, que sirve de instrumento heurístico del investigador científico o técnico (ver vol. III, Apénd. I).

4. Función implícita de una variable independiente. — *a*) DEF. Se dice que y es función *implícita* de x cuando está dada indirectamente mediante una ecuación

$$[67\text{-}10] \qquad F(x, y) = 0 .$$

A veces es posible despejar y, es decir, transformar la función implícita en explícita. Por ejemplo:

$$y^3 + xy^2 + x - 1 = 0$$

es una ecuación de tercer grado en y que podría resolverse (§ 19-3), transformando la ecuación dada $F(x, y) = 0$ en una función explícita irracional $y = f(x)$.

Pero si en lugar de tener una ecuación de tercer grado, tuviésemos una de quinto grado en y, no sería posible esta transformación, en general (Cap. IV, nota II), y menos si la ecuación es trascendente. Además, ni aun en los casos en que es posible despejar y, ofrece ventaja la transformación.

Sin embargo, no por eso renunciaremos a construir la curva, sólo que para cada punto de la curva será necesario resolver la ecuación numérica por los métodos de aproximación que se estudian en Álgebra (§ 40-4 y § 41).

Decir que $y = f(x)$ es la función determinada por la ecuación [67-10], significa que se verifica idénticamente en x (es decir, para todo x del conjunto en que la función $f(x)$ exista): $F[x, f(x)] \equiv 0$.

Si tomamos un tercer eje z y representamos la superficie $z = F(x, y)$, la gráfica de la función buscada $y = f(x)$ mediante la ecuación [67-10] será la intersección de dicha superficie con el plano $z = 0$. O sea la curva de nivel 0 de $z = F(x, y)$ (§ 64-2, *b*).

Las *curvas de nivel* de cota c vienen dadas implícitamente por la ecuación $F(x, y) - c = 0$.

Ahora bien, no toda ecuación $F(x, y) = 0$, aun siendo $F(x, y)$ una función continua indefinidamente derivable, define en el campo real una función implícita; basta fijarse en los ejemplos siguientes.

EJEMPLOS: 1. La función $z = x^2 + y^2$ representada por un paraboloide elíptico que existe para todo par (x, y) es diferenciable y por tanto continua, no tiene curva de nivel real (§ 64-2, ejemplo 3, fig. 212) para $z = -1$, su intersección con $z = 0$ se reduce al sólo punto $(0, 0)$ y la curva de nivel de cota $z = 1$ es la circunferencia $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, definida solamente en el intervalo $[-1; 1]$. Obsérvese aún que en el punto $(1; 0)$ a la derecha de $x = 1$ no existe curva.

2. En el campo real no existe la curva definida implícitamente mediante $\operatorname{sen}(x + y) - x^2 = 5$, porque el seno nunca supera el valor 1.

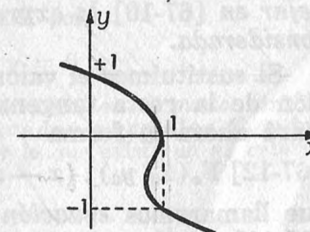


Fig. 229

3. La ecuación $y^5 + xy^2 + x - 1 = 0$, da para $x = 1$, los valores $y^2(y^3 + 1) = 0$, es decir, dos valores reales coincidentes en $y = 0$ y el $y = -1$. Obsérvese que en el entorno de $x = 1$ (fig. 229), para el punto $(1; 0)$, a la derecha de $x = 1$ no existe curva y a su izquierda existen *dos* ramas distintas que pasan por dicho punto, mientras que en un entorno no demasiado grande de $x = 1$, para el punto $(1; -1)$ existe una sola rama, función *uniforme* y *derivable* $y = f(x)$ que pasa por dicho punto.

Para estudiar geométricamente la curva [67-10], puede considerarse como independiente la variable que más convenga. Así, en este ejemplo es mejor considerar la función inversa $x = \varphi(y)$ de la anterior (§ 23-12), también definida implícitamente mediante

$$y^5 + y^2 \cdot \varphi(y) + \varphi(y) - 1 \equiv 0 \quad ,$$

dando $x = (1 - y^5)/(1 + y^2)$, uniforme y derivable en todo el campo real y.

b) Consideremos, pues, ecuaciones que tengan por lo menos una solución, es decir un par de números, x_0 é y_0 que verifiquen $F(x_0, y_0) = 0$; pero esto tampoco basta (ejemplo 1 en el origen) para que a los valores de x en un cierto entorno $(x_0 - h, x_0 + h)$ correspondan valores de y, es decir, para que exista una *función implícita uniforme* y de x.

Aun conociendo un punto $(x_0, y_0, 0)$ de la superficie $z = F(x, y)$ situado en el plano $z = 0$, falta determinar condiciones para que esta superficie *corte* a dicho plano en una *curva uniforme* (§ 25-1, *b*) que pase por dicho punto.

En el § 68-1 resolveremos esta cuestión, pospuesta por su dificultad y por no perturbar en un primer estudio el cálculo de la derivada de una función implícita, muy sencillo, *supuesta demostrada la existencia de esta función y su derivabilidad.*

Así, para $F(x, y)$ diferenciable en (x_0, y_0), considerada x como variable independiente y F como función compuesta de x por intermedio de x, y (§ 67-1), nula en el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, luego su derivada es nula, es decir:

$$\frac{d}{dx} F[x, f(x)] = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = F_x + F_y \cdot y' = 0 \quad ,$$

y suponiendo $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, resulta:

$$[67\text{-}11] \qquad y'_0 = f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \quad ,$$

donde el valor de la *derivada de la función implícita,* dado por el último cociente, *se obtiene sin necesidad de saber despejar en* [67-10] *la expresión explícita* $y = f(x)$ *de la función considerada.*

Si sustituímos el valor de $f'(x_0)$ dado por [67-11], la ecuación de la recta tangente (§ 31-1) a la curva $y = f(x)$ tomará ahora la forma

$$[67\text{-}12] \quad F_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0 \quad ,$$

que llamaremos *ecuación implícita de la tangente* a la curva [67-10]. Análogamente a lo visto en § 34-2 y § 66-5, al escribir que la diferencial total de [67-10], es idénticamente nula en el incremento independiente dx:

$$F_x(x_0, y_0)\,dx + F_y(x_0, y_0)\,dy = 0 \quad ,$$

se obtiene la llamada *ecuación incremental* de la recta tangente, pues de la anterior se pasa a [67-12], sustituyendo las diferenciales por los incrementos. Y en efecto, en el punto $(x_0, y_0, 0)$, la ecuación incremental del plano tangente (§ 66-5) a la superficie $z = F(x, y)$ es

$$z = F_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad ,$$

que cortado por el plano $z = 0$, da (§ 67-1, *b*) la recta tangente [67-12] a la curva intersección [67-10].

Demostraremos en § 68-1 que las condiciones que han hecho posible la obtención de [67-11] son suficientes para la supuesta existencia y derivabilidad de la función incógnita $y = f(x)$. Es decir, se demostrará así:

TEOR. *Sea* $F(x, y)$ *una función de dos variables que satisface las siguientes condiciones:*

1º) $F(x_0, y_0) = 0$;

2º) $F(x, y)$, *es una función continua y diferenciable en el punto* (x_0, y_0) ;

3º) *La derivada parcial* F_y *existe en el entorno* (x_0, y_0), *es continua en* (x_0, y_0) *y cumple* $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Entonces, para todo x *en un intervalo* $(x_0 - h, x_0 + h)$ *existe una función uniforme de* x *continua y derivable:* $y = f(x)$, *tal que* $F[x, f(x)] \equiv 0$ *y su derivada* $f'(x_0)$ *viene dada por* [67-11].

NOTA. Como hemos ya observado en el ejemplo 3, geométricamente no hay por qué distinguir en la ecuación [67-10] las variables x, y, por lo que en ella basta considerar como dependiente la variable que más convenga. Por tanto, si $F(x_0, y_0) = 0$ y además $F(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas en (x_0, y_0), sólo diremos que este punto no es *ordinario* sino *singular* para la curva dada implícitamente por [67-10], cuando sean *nulas ambas derivadas* $F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$, y sólo entonces queda indeterminada la ecuación implícita [67-12] de la tangente.

Así, en el ejemplo 3, aun cuando no exista función uniforme $y = f(x)$ en el entorno de (1; 0), dicho punto no es singular, porque en él es $F_x(1; 0) = 1 \neq 0$ con tangente: $x - 1 = 0$.

EJEMPLO 4. La función implícita definida por

$$x^2 \operatorname{sen} \sqrt{xy} - \frac{\pi^4}{16} y = 0$$

no se puede expresar explícitamente; sin embargo, en el punto $(\frac{1}{2}\pi^2, 1)$ que verifica la ecuación anterior, las derivadas parciales $F_x = \frac{1}{2}\pi^2$, $F_y = -\pi^4/16$, son continuas y no nulas, por lo que existe en su entorno curva uniforme con tangente de pendiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{\pi^2}.$$

¿Qué ocurre sobre el eje x? ¿Dónde existe $F(x, y)$?

5. Función implícita de varias variables independientes. Derivadas. Plano tangente. — *a*) Planteada la ecuación

$$[67\text{-}13] \qquad F(x, y, z) = 0 \quad ,$$

se dirá que define una función uniforme $z = f(x, y)$ de dos variables independientes en un cierto recinto R, si en él, se verifica idénticamente en (x, y):

$$[67\text{-}14] \qquad F[x, y, f(x, y)] \equiv 0.$$

Aun cuando un punto (x_0, y_0, z_0) verifique la ecuación [67-13], es decir, sea $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, esto no querrá decir (véase ejemplo 1) que exista en el entorno del punto (x_0, y_0) una función $f(x, y)$ que verifique [67-14].

b) Supuesta demostrada la existencia y diferenciabilidad de esta función incógnita $f(x, y)$, si $F(x, y, z)$ es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), la función compuesta [67-14] será diferenciable (§ 67-2), con diferencial total idénticamente nula en los incrementos independientes $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ (§ 66-2, corol. 1º)

$$[67\text{-}15] \; F_x(x_0, y_0, z_0)\,dx + F_y(x_0, y_0, z_0)\,dy + F_z(x_0, y_0, z_0)\,dz = 0.$$

Suponiendo $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, se podrá despejar dz en [67-15]:

$$[67\text{-}16]\quad dz = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}\,dx - \frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}\,dy ,$$

de donde (§ 66-4) se deducen las *derivadas parciales de la función implícita* z dadas por

$$[67\text{-}17]\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_0} = f_x(x_0, y_0) = -\dfrac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} ; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y_0} = f_y(x_0, y_0) = -\dfrac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} , \end{cases}$$

con *valores obtenidos en los últimos miembros sin necesidad de saber despejar en* [67-12] *la expresión explícita* $z = f(x, y)$ *de la función considerada.*

c) Si sustituímos el valor de dichas derivadas parciales en la ecuación del plano tangente [66-8] a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) (§ 66-5), dicha ecuación tendrá ahora la forma:

$$[67\text{-}18]\quad F_x(x_0, y_0, z_0) \,.\, (x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) \,.\, (y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \,.\, (z - z_0) = 0 ,$$

que llamaremos *ecuación implícita del plano tangente* a la superficie [67-13]. Podemos también decir aquí (cfr. § 67-4) que [67-15] representa la *ecuación incremental* del plano tangente, pues de ella se pasa a [67-18] reemplazando las diferenciales por los incrementos.

NOTAS: 1. En § 68-1 demostraremos y enunciaremos en forma exacta condiciones suficientes para la validez de las fórmulas anteriores, dando un teorema general referente a una función implícita de un número cualquiera de variables independientes y del que también es caso particular el de § 67-4.

2. También aquí (cfr. § 67-4) en la ecuación [67-13] no hay por qué distinguir geométricamente entre las tres variables, pudiéndose tomar como dependiente la que más convenga. Así supuesta $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y además que $F(x, y, z)$ tenga derivadas parciales continuas en (x_0, y_0, z_0), sólo diremos que este punto no es *ordinario*, sino *singular* para la superficie dada implícitamente por [67-13], cuando *son nulas simultáneamente* las derivadas parciales:

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = F_y(x_0, y_0, z_0) = F_z(x_0, y_0, z_0) = 0 ,$$

y sólo entonces queda indeterminada la ecuación implícita [67-18] del plano tangente.

Los parámetros directores (§ 60-5, *d*) de la normal a la superficie (§ 66-5) son aquí

$$F_x(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad F_y(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad F_z(x_0, y_0, z_0) ,$$

y así es nulo (§ 60-5, *c*) su producto escalar [67-18] con un vector de origen (x_0, y_0, z_0) y extremo (x, y, z) en un punto cualquiera del plano tangente.

3. Una curva cualquiera

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

pertenece a la superficie [67-13] si se verifica idénticamente en t

$$[67\text{-}19]\quad F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0.$$

Si dicha curva en $t = t_0$ pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie, su tangente en caso de existir, tiene por ecuaciones (§ 72-6, *b*)

$$[67\text{-}20]\quad \frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0} ,$$

donde se designan abreviadamente $x'_0 = x'(t_0)$, etc. Si el punto (x_0, y_0, z_0) es ordinario para la superficie, esta recta pertenece al plano tangente [67-18], por ser nula en t_0 la derivada total (§ 67-1) de [67-19] dada por

$$F_x(x_0, y_0, z_0) \,.\, x'_0 + F_y(x_0, y_0, z_0) \,.\, y'_0 + F_z(x_0, y_0, z_0) \,.\, z'_0 = 0 ;$$

expresando (§ 60-8) que la dirección de la recta [67-20] pertenece a la orientación del plano [67-18], recta y plano que tienen además el punto común (x_0, y_0, z_0).

EJEMPLOS: 1. La ecuación $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2z^2 = 0$ es verificada por el punto $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, pero no existe superficie porque la suma de tres cuadrados no simultáneamente nulos es siempre positiva y ese punto es el único real que verifica la ecuación anterior. Es

$$F_x(1, 2, 0) = F_y(1, 2, 0) = F_z(1, 2, 0) = 0.$$

2. El elipsoide de revolución (§ 62-2, *a*)

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2z^2 = 1$$

para $x = 1$, $y = 2$, da $z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y en cada uno de los puntos $(1, 2, +\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(1, 2, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ es $F_z(1, 2, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \pm 2\sqrt{2} \neq 0$, por lo que pasa un trozo de superficie con respectivo plano tangente horizontal $z - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$, $z + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$, pues aquí resultan nulas las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0} = 0.$$

En el punto $(3/2,\ 2,\ \sqrt{6}/4)$, que es ordinario, el plano tangente tiene por ecuación $(x - 3/2) + \sqrt{6}(z - \sqrt{6}/4) = 0$. En el punto $(2, 2, 0)$ se anula F_z, y aunque en su entorno no existe z como variable dependiente, el punto es ordinario, pues $F_x(2, 2, 0) = 2$ y resulta para el plano tangente $x = 2$; obsérvese que tampoco puede tomarse y como variable dependiente en el entorno de dicho punto.

3. La ecuación [67-18] del plano tangente se simplifica en el caso de referirse a la ecuación canónica (§ 67-2) de las cuádricas con centro. Sea el hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Las derivadas parciales en el punto (x_0, y_0, z_0) son:

$$\frac{2x_0}{a^2} , \quad \frac{2y}{b^2} , \quad \frac{-2z_0}{c^2} .$$

El plano tangente tiene, pues, la ecuación:

$$\frac{(x - x_0)x_0}{a^2} + \frac{(y - y_0)y_0}{b^2} - \frac{(z - z_0)z_0}{c^2} = 0 ,$$

y como el punto (x_0, y_0, z_0) satisface a la ecuación de la superficie, la ecuación del plano se reduce a ésta:

$$\frac{x \,.\, x_0}{a^2} + \frac{y \,.\, y_0}{b^2} - \frac{z \,.\, z_0}{c^2} = 1.$$

Si en lugar del hiperboloide de una hoja tenemos el de dos hojas, o bien un elipsoide, basta cambiar signos.

No debe confundirse el tratamiento de este caso con el de los paraboloides (§ 66-5, ejemplo 1).

6. Sistemas de funciones implícitas. — *a*) Decir que las funciones

$$[67\text{-}21] \quad u = \mathrm{u}(x, y) \quad , \quad v = \mathrm{v}(x, y) \quad , \quad w = \mathrm{w}(x, y)$$

están definidas implícitamente por el sistema de ecuaciones

$$[67\text{-}22] \quad \begin{cases} \mathrm{F}_1(x, y, u, v, w) = 0 \\ \mathrm{F}_2(x, y, u, v, w) = 0 \\ \mathrm{F}_3(x, y, u, v, w) = 0 \end{cases}$$

significa que se verifica idénticamente en x, y

$$[67\text{-}23] \quad \mathrm{F}_i[x, y, \mathrm{u}(x, y), \mathrm{v}(x, y), \mathrm{w}(x, y)] \equiv 0.$$

Posponiendo como antes los teoremas de existencia (§ 68-2), si en un punto $(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0)$ se verifican las tres ecuaciones [67-22] cuyos primeros miembros sean diferenciables, y suponemos que existan en el entorno de (x_0, y_0) funciones diferenciables [67-21], entonces (§ 67-2) las funciones compuestas [67-23] serán diferenciables en (x_0, y_0), con diferenciales totales idénticamente nulas en los incrementos independientes dx, dy (§ 66-2, Corol. 1º):

$$[67\text{-}24] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_0} dx + \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_0} dy + \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial u_0} du + \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial v_0} dv + \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial w_0} dw = 0, \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x_0} dx + \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_0} dy + \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial u_0} du + \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial v_0} dv + \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial w_0} dw = 0, \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial x_0} dx + \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial y_0} dy + \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial u_0} du + \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial v_0} dv + \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial w_0} dw = 0. \end{cases}$$

Así, sin necesidad de conocer la expresión explícita [67-21] de las funciones incógnitas, obtendremos las diferenciales totales de éstas resolviendo el sistema de ecuaciones lineales en ellas [67-24] por la regla de CRAMER (§ 15-4), siempre que el determinante del sistema sea distinto de cero:

$$[67\text{-}25] \quad \mathrm{J} = \frac{\partial(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)}{\partial(u_0, v_0, w_0)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial u_0} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial v_0} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial w_0} \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial u_0} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial v_0} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial w_0} \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial u_0} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial v_0} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial w_0} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Todo determinante de este tipo, formado con las n derivadas parciales de cada una de las n funciones respecto de las

n variables, se llama *determinante funcional* o *jacobiano* de las funciones respecto de las n variables y se suele representar por la misma notación de las derivadas parciales, como se ha hecho en el segundo miembro de [67-25], empleándose también la letra D en lugar de la ∂.

NOTAS: 1. Es importante observar en la notación el orden en que aparecen las funciones y las variables a que se refiere el jacobiano. Si consideramos tres funciones F, G, H, de seis variables $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, los jacobianos de F, G, H respecto de u_1, u_3, u_6 y de u_3, u_1, u_6 son, respectivamente,

$$\frac{\partial(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H})}{\partial(u_1, u_3, u_6)} = \begin{vmatrix} \mathrm{F}_1 & \mathrm{F}_3 & \mathrm{F}_6 \\ \mathrm{G}_1 & \mathrm{G}_3 & \mathrm{G}_6 \\ \mathrm{H}_1 & \mathrm{H}_3 & \mathrm{H}_6 \end{vmatrix} \quad , \quad \frac{\partial(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H})}{\partial(u_3, u_1, u_6)} = \begin{vmatrix} \mathrm{F}_3 & \mathrm{F}_1 & \mathrm{F}_6 \\ \mathrm{G}_3 & \mathrm{G}_1 & \mathrm{G}_6 \\ \mathrm{H}_3 & \mathrm{H}_1 & \mathrm{H}_6 \end{vmatrix}$$

y tienen signos contrarios.

En cambio, da lo mismo cambiar filas por columnas (§ 13-3, c_1), considerando en cada fila las derivadas respecto de una misma variable, como se hace a veces.

2. Obsérvese que respecto de las variables x_i, el determinante del sistema de CRAMER [15-7] es precisamente su jacobiano, cuya no anulación da la condición necesaria y suficiente (§ 15-4 y 5) para que dicho sistema tenga solución en las x_i unívocamente determinadas.

b) Las soluciones del sistema [67-24] en las diferenciales totales incógnitas du, dv, dw dadas por la regla de CRAMER (§ 15-4) son funciones lineales homogéneas en dx, dy cuyos coeficientes (§ 66-4) darán las derivadas parciales de las funciones incógnitas [67-21], *sin necesidad de conocer sus expresiones explícitas*, pues sólo intervendrán en ellos las derivadas parciales de las funciones dadas [67-22]. Así, por ejemplo:

$$du = \frac{1}{\mathrm{J}} \cdot \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_0} dx - \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_0} dy & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial v_0} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial w_0} \\ -\dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x_0} dx - \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_0} dy & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial v_0} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial w_0} \\ -\dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial x_0} dx - \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial y_0} dy & \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial v_0} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial w_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{M}_1(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0)\, dx + \mathrm{M}_2(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0)\, dy \quad ,$$

nos da

$$[67\text{-}26] \quad \frac{\partial u}{\partial x_0} = \mathrm{M}_1(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0) \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y_0} = \mathrm{M}_2(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0).$$

El método de diferenciar totalmente [67-22] es útil si se desean hallar todas las derivadas parciales, o no se especifican previamente las variables que hayan de tomarse como dependientes, lo que será preferible efectuar en el mismo sistema [67-24] para considerar las que originen un jacobiano no nulo.

Pero si por ejemplo se supone existente $(\partial u/\partial y_0)_x$ (recuérdese § 67-2, nota) y sólo interesa obtener ésta, bastará derivar parcialmente en (x_0, y_0) respecto de y las [67-22], considerándolas funciones compuestas de x e y, mediante las [67-21], dando:

[67-27]
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial y_0}\right)_x \equiv \dfrac{\partial F_1}{\partial y_0} + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_0}\cdot\dfrac{\partial u_0}{\partial y_0} + \dfrac{\partial F_1}{\partial v_0}\cdot\dfrac{\partial v_0}{\partial y_0} + \dfrac{\partial F_1}{\partial w_0}\cdot\dfrac{\partial w_0}{\partial y_0} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial y_0}\right)_x \equiv \dfrac{\partial F_2}{\partial y_0} + \dfrac{\partial F_2}{\partial u_0}\cdot\dfrac{\partial u_0}{\partial y_0} + \dfrac{\partial F_2}{\partial v_0}\cdot\dfrac{\partial v_0}{\partial y_0} + \dfrac{\partial F_2}{\partial w_0}\cdot\dfrac{\partial w_0}{\partial y_0} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial F_3}{\partial y_0}\right)_x \equiv \dfrac{\partial F_3}{\partial y_0} + \dfrac{\partial F_3}{\partial u_0}\cdot\dfrac{\partial u_0}{\partial y_0} + \dfrac{\partial F_3}{\partial v_0}\cdot\dfrac{\partial v_0}{\partial y_0} + \dfrac{\partial F_3}{\partial w_0}\cdot\dfrac{\partial w_0}{\partial y_0} = 0, \end{cases}$$

de donde puede despejarse $\partial u/\partial y_0$ por la regla de CRAMER, en un sistema lineal cuyo determinante es también el jacobiano J.

NOTA 3. Una curva del espacio euclídeo de tres dimensiones viene definida implícitamente como intersección de dos superficies

[67-28]
$$F(x, y, z) = 0 \quad , \quad G(x, y, z) = 0 \quad ,$$

donde sólo una de las variables es independiente, pues las otras dos quedan determinadas por el par de ecuaciones, si se cumplen determinadas condiciones de existencia (§ 68-2). Es importante considerar éstas, pues aun cuando un punto (x_0, y_0, z_0) sea común a ambas superficies [67-28], podrá no haber curva común a ellas; por ejemplo, en el caso de dos superficies esféricas tangentes.

Suponiendo que las funciones [67-28] tengan derivadas continuas en dicho punto común (x_0, y_0, z_0), la anulación de sus diferenciales totales

[67-29]
$$\begin{cases} F_x(x_0, y_0, z_0)\,dx + F_y(x_0, y_0, z_0)\,dy + F_z(x_0, y_0, z_0)\,dz = 0 \quad , \\ G_x(x_0, y_0, z_0)\,dx + G_y(x_0, y_0, z_0)\,dy + G_z(x_0, y_0, z_0)\,dz = 0 \quad , \end{cases}$$

da las ecuaciones incrementales de los planos tangentes (§ 67-5, c). Ambos planos serán distintos cuando y sólo cuando sus parámetros directores no sean proporcionales (cfr. § 60-8, b_1) y para esto es necesario y suficiente que alguno de los jacobianos de las funciones F, G respecto de dos de las tres variables x, y, z no se anule en el punto (x_0, y_0, z_0). Pues bien, se da la feliz circunstancia que esto es ya suficiente (§ 68-2) para poder asegurar la existencia de una curva intersección en el entorno de la variable dejada como independiente, con tangente existente en el punto considerado. De [67-29] se obtiene (§ 15-6, c):

[67-30]
$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} \quad ,$$

concibiéndose dos de las diferenciales como funcionales, y la otra como incremento independiente, pudiendo tomarse como tal la que tenga determinante denominador no nulo. Y entonces la recta intersección de los planos tangentes [67-29] dada (§ 67-6, b) por:

[67-31]
$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(z_0, x_0)}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x_0, y_0)}} \quad ,$$

cuyos denominadores son los mismos de [67-30], (¡cuidando el orden de las variables!) es precisamente la recta tangente a la curva dada implícitamente por [67-28] (cfr. § 67-6, b). Obsérvese que las ecuaciones [67-31] tendrán sentido cuando y sólo cuando los denominadores no sean simultáneamente nulos; si *algunos* se anulan, se procederá como en § 60-8, nota 11.

EJEMPLO. El paraboloide $z = 2x^2 - y^2$, y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$, tienen común el origen de coordenadas y en él sus planos tangentes son, respectivamente:

$$z = 0 \quad ; \quad -2y = 0 \quad ,$$

con jacobiano respecto de y, z (los otros dos son nulos):

$$\begin{vmatrix} 2y & 1 \\ 2y - 2 & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad ,$$

luego existe intersección, cuya tangente es el eje x.

7. Inversión y cambio de variables. — El estudio de las funciones implícitas nos permite el de los sistemas de funciones. Caso importante es aquel en donde el número de funciones es el mismo que el de variables independientes. Como en el caso de transformaciones lineales (§ 61-2) un conjunto de igualdades de la forma

[67-32]
$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}$$

recibe también el nombre de *transformación*, pues puede interpretarse que transforma el punto de coordenadas (x, y, z) en otro de coordenadas (u, v, w), llamado *imagen* suya.

Si se interpretan las [67-32] como ecuaciones en las incógnitas x, y, z y pueden resolverse en ellas, tendremos tres funciones de u, v, w que constituyen la llamada transformación *inversa* de la [67-32]. Esta inversa daría el punto, o puntos, (x, y, z) de donde uno dado (u, v, w) podría proceder en la transformación original o *directa*; estos (x, y, z) se llaman *pre-imágenes* o *modelos* del (u, v, w).

Si las funciones [67-32] son diferenciables, con jacobiano

$$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \neq 0 \quad ,$$

el método del § 67-6 nos permite obtener las derivadas de x, y, z, respecto de u, v, w, sin conocer la transformación inversa. Pues basta poner

[67-33]
$$\begin{cases} F_1(u, v, w, x, y, z) \equiv u - u(x, y, z) = 0 \\ F_2(u, v, w, x, y, z) \equiv v - v(x, y, z) = 0 \\ F_3(u, v, w, x, y, z) \equiv w - w(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

donde el jacobiano

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)} \quad ,$$

coincide (acaso salvo el signo) con el

$$J = \frac{\partial(u.\,v.\,w)}{\partial(x, y, z)}.$$

Así, por ejemplo, de

$$\begin{cases} du - \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx - \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy - \dfrac{\partial u}{\partial z}\,dz = 0, \\[2mm] dv - \dfrac{\partial v}{\partial x}\,dx - \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dy - \dfrac{\partial v}{\partial z}\,dz = 0, \\[2mm] dw - \dfrac{\partial w}{\partial x}\,dx - \dfrac{\partial w}{\partial y}\,dy - \dfrac{\partial w}{\partial z}\,dz = 0, \end{cases}$$

podemos obtener $\partial y/\partial w$, sin más que hacer $du = dv = 0$ y despejar

$$\frac{d_w y}{dw} = \frac{\partial y}{\partial w}$$

calculando $d_w y = dy$ $[du = dv = 0]$ por la regla de CRAMER (§ 15-4). Así resulta:

$$\frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, z)} \Big/ \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}.$$

El mismo teorema de existencia anunciado (§ 68-2) nos permitirá además afirmar que si las funciones [67-32] son continuas y tienen derivadas parciales en el entorno del punto (x_0, y_0, z_0), y en este punto dichas derivadas parciales son continuas y el jacobiano J no es nulo, entonces existe unívocamente determinada una transformación inversa en el entorno del punto (u_0, v_0, w_0) correspondiente al (x_0, y_0, z_0) por [67-32]. Es decir, obtendremos así entre ambos entornos una correspondencia *biunívoca,* tal que un contorno simple cerrado tiene por homólogo otro contorno simple cerrado con la misma u opuesta orientación (§ 54-1, *d*) según que J sea positivo o negativo.

Si las variables x, y, z proceden de ξ, η, ζ mediante otra transformación

$$[67\text{-}34] \qquad \begin{cases} x = \mathrm{x}(\xi, \eta, \zeta), \\ y = \mathrm{y}(\xi, \eta, \zeta), \\ z = \mathrm{z}(\xi, \eta, \zeta), \end{cases}$$

la superposición de las transformaciones [67-32] y [67-34] vendrá dada por las funciones compuestas

$$[67\text{-}35] \qquad \begin{cases} u = \mathrm{u}[\mathrm{x}(\xi, \eta, \zeta),\ \mathrm{y}(\xi, \eta, \zeta),\ \mathrm{z}(\xi, \eta, \zeta)] \equiv \mathrm{U}(\xi, \eta, \zeta), \\ v = \mathrm{v}[\mathrm{x}(\xi, \eta, \zeta),\ \mathrm{y}(\xi, \eta, \zeta),\ \mathrm{z}(\xi, \eta, \zeta)] \equiv \mathrm{V}(\xi, \eta, \zeta), \\ w = \mathrm{w}[\mathrm{x}(\xi, \eta, \zeta),\ \mathrm{y}(\xi, \eta, \zeta),\ \mathrm{z}(\xi, \eta, \zeta)] \equiv \mathrm{W}(\xi, \eta, \zeta), \end{cases}$$

con jacobiano obtenido por regla análoga a la de derivación de función de función (§ 32-3; cfr. § 61-3, *a*):

$$[67\text{-}36] \qquad \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}.$$

Pues basta multiplicar los determinantes del segundo miembro según la regla de filas por columnas (§ 13-6) para obtener el primer miembro al aplicar la regla de derivación de funciones compuestas (§ 67-2):

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_x x_\xi + u_y y_\xi + u_z z_\xi & u_x x_\eta + u_y y_\eta + u_z z_\eta & u_x x_\zeta + \dots \\ v_x x_\xi + v_y y_\xi + v_z z_\xi & v_x x_\eta + v_y y_\eta + v_z z_\eta & v_x x_\zeta + \dots \\ w_x x_\xi + w_y y_\xi + w_z z_\xi & w_x x_\eta + w_y y_\eta + w_z z_\eta & w_x x_\zeta + \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_\xi & u_\eta & u_\zeta \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \\ w_\xi & w_\eta & w_\zeta \end{vmatrix}.$$

En el caso particular de que la transformación [67-34] coincida con la inversa de [67-32], es decir: sea $u = \xi$, $v = \eta$, $w = \zeta$, entonces [67-36] se convierte en:

$$[67\text{-}37] \qquad \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 1,$$

fórmula análoga a la que corresponde a la derivación de la función inversa (§ 32-8; cfr. § 61-3, *b*).

Como en § 67-2, para la validez de [67-36] y [67-37] es suficiente la diferenciabilidad de las funciones [67-32] y derivabilidad de las [67-34].

NOTAS: 1. Las sustituciones lineales estudiadas en § 15-7 y § 61 son caso muy particular de una transformación funcional [67-32], llamada entonces *afín*, si es de jacobiano (módulo) no nulo.

2. Si las variables intermedias exceden al de las finales, tal en $u = \mathrm{u}(x, y, z)$, $v = \mathrm{v}(x, y, z)$ con $x = \mathrm{x}(\xi, \eta)$, $y = \mathrm{y}(\xi, \eta)$, $z = \mathrm{z}(\xi, \eta)$, se demuestra en forma análoga a [67-36], aunque algo más complicada, que:

$$[67\text{-}38] \qquad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(\xi, \eta)} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(\xi, \eta)},$$

generalización de la derivación de funciones compuestas (§ 67-2).

3. Si el jacobiano es nulo en el punto considerado o no existe, por no ser las funciones diferenciables, nada puede afirmarse respecto de la transformación inversa.

Por ejemplo, el sistema:

$$u = x^3 \quad , \quad v = y \ ,$$

tiene en el entorno del origen transformación inversa unívocamente determinada

$$x = \sqrt[3]{u} \quad , \quad y = v \ ,$$

aunque el jacobiano se anule en el origen. Claro está que entonces el jacobiano de dicha transformación inversa no puede existir (la función $\sqrt[3]{u}$ no es derivable en el origen), pues si no habría de cumplirse [67-37]. Por otra parte, el sistema

$$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy$$

de jacobiano nulo en el origen, no tiene transformación inversa unívoca en el entorno de éste, pues los dos puntos (x, y) y $(-x, -y)$ tienen el mismo homólogo en el plano (u, v).

EJEMPLO. La *transformación por radios vectores recíprocos*

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2} \ ,$$

o *inversión respecto del círculo unidad*, hace corresponder al punto $P(x, y)$ otro $Q(u, v)$ en el mismo rayo OP, satisfaciendo $OQ = 1/OP$, es decir, $u^2 + v^2 = 1/(x^2 + y^2)$. Los puntos del interior del círculo unidad se transforman en los del exterior y recíprocamente.

En este caso la transformación inversa

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad , \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

vuelve a ser una inversión.

8. **Discriminación de variables dependientes e independientes.** — Al plantear las ecuaciones de un problema en que intervienen varias variables, deben determinarse cuidadosamente las variables tomadas como independientes, al obtener derivadas parciales de las variables que se tomen como dependientes (cfr. § 67-2, nota). La expresión de estas derivadas parciales, mediante las ecuaciones dadas, será una u otra según cuáles sean las variables que tomadas como independientes se mantienen constantes. Es interesante aclarar bien esta cuestión de gran importancia práctica y en realidad sencilla, pues es fuente de confusión para el técnico que tenga poco desarrollado su sentido crítico.

Si por ejemplo tenemos el sistema

[67-39] $$u = f(x, y) \quad ; \quad y = g(x, z) \quad ,$$

que en las condiciones de existencia esbozadas en el § 67-6, y a demostrar en el § 68-2, determina dos variables dependientes en función de dos independientes, la expresión $\partial u/\partial x$ (presuponiendo, ya tomamos u como variable dependiente y x como independiente) será ambigua si no determinamos cuál de las otras dos variables y, z es la independiente. Como dijimos anteriormente (§ 67-2, nota), seguiremos la notación usada en Termodinámica, por la que $(\partial u/\partial x)_y$ expresa la derivada parcial de u respecto de x, conservando y constante, mientras que $(\partial u/\partial x)_z$ significa la derivada parcial de u respecto de x, conservando z constante. Así queda especificado en uno y otro caso cuál de las dos variables y, z es la dependiente y cuál la independiente.

Para u, z variables dependientes, es inmediato $(\partial u/\partial x)_y = f_x$, para lo que basta utilizar sólo la primera de las dos ecuaciones [67-39]. En cambio para u, y variables dependientes, será:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z = f_x + f_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \quad , \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = g_x \ ,$$

de donde $(\partial u/\partial x)_z = f_x + f_y g_x$, *valor distinto* del f_x hallado anteriormente.

Para tratar todos los casos posibles, el mejor procedimiento es el de diferenciar totalmente ambas ecuaciones [67-39], dando

[67-40] $$\begin{cases} du = f_x dx + f_y dy \\ dy = g_x dx + g_z dz \ , \end{cases}$$

y entonces tomar en [67-40] las diferenciales como funcionales o incrementos independientes (§ 67-2) según el caso de que se trate, anulando los incrementos adecuados para obtener la derivada parcial que interese.

Así, para obtener $(\partial u/\partial x)_z$ en el caso anterior, los incrementos independientes son dx, dz, del que al anular $dz = 0$, queda, indicando como subíndices de d las variables *independientes* que *no* se mantienen fijas

$$(d_x u)_z = f_x dx + f_y . (d_x y)_z \quad ; \quad (d_x y)_z = g_x . dx \quad ,$$

y de aquí se deduce $(\partial u/\partial x)_z$ formando el cociente $(d_x u)_z : dx$.

Si queremos obtener $(\partial u/\partial y)_z$ del mismo sistema [67-39], anularemos también $dz = 0$, siendo dy el otro incremento independiente en [67-40], por lo que será

$$(d_y u)_z = f_x . (d_y x)_z + f_y dy \quad , \quad dy = g_x . (d_y x)_z \quad ,$$

y para $g_x \neq 0$, resulta

$$(d_y u)_z = \left(\frac{f_x}{g_x} + f_y\right) dy$$

es decir:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_z = \frac{f_x}{g_x} + f_y .$$

Obsérvese que para tomar u, x como variables dependientes en [67-39] debe ser (§ 67-6) el jacobiano:

$$\frac{\partial(u - f, g - y)}{\partial(u, x)} = \begin{vmatrix} 1 & -f_x \\ 0 & g_x \end{vmatrix} = g_x \neq 0 .$$

Consideremos ahora otro ejemplo algo más complicado. Respecto del sistema

[67-41] $v = \mathrm{f}(x, y, z) \quad , \quad x = \mathrm{g}(y, u, v) \quad ,$

la expresión $\partial y/\partial x$ es triplemente ambigua, pues con la notación empleada antes, según sea el otro par de variables independientes, puede significar

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{u,v} \quad , \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{v,z} \quad \text{ó} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z,u}$$

Para expresarlas mediante las derivadas parciales de las funciones f y g, diferenciemos totalmente las [67-41],

[67-42] $$\begin{cases} dv = \mathrm{f}_x dx + \mathrm{f}_y dy + \mathrm{f}_z dz \\ dx = \mathrm{g}_y dy + \mathrm{g}_u du + \mathrm{g}_v dv \end{cases}$$

y resulta:

1º) y, z dependientes:

$$du = dv = 0 \quad ; \quad dy = (d_x y)_{u,v} \quad ; \quad dz = (d_x z)_{u,v} \quad ;$$
$$dx = \mathrm{g}_y . (d_x y)_{u,v} \quad ; \quad (\partial y/\partial x)_{u,v} = 1/\mathrm{g}_y \quad ,$$

con $\mathrm{g}_y \neq 0$, última condición ya exigible para la existencia de las funciones y, z determinadas por el sistema de funciones [67-41] de jacobiano

$$\frac{\partial(\mathrm{f}-v,\ \mathrm{g}-x)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \mathrm{f}_y & \mathrm{f}_z \\ \mathrm{g}_y & 0 \end{vmatrix} = -\mathrm{f}_z . \mathrm{g}_y \neq 0 .$$

2º) y, u dependientes:

$$dv = dz = 0 \quad ; \quad dy = (d_x y)_{v,z} \quad ; \quad du = (d_x u)_{v,z} \quad ;$$
$$0 = \mathrm{f}_x dx + \mathrm{f}_y (d_x y)_{v,z} \quad ; \quad (\partial y/\partial x)_{v,z} = -\mathrm{f}_x/\mathrm{f}_y \quad ,$$

siendo $\mathrm{f}_y \neq 0$ con jacobiano del sistema

$$\frac{\partial(\mathrm{f}-v,\ \mathrm{g}-x)}{\partial(y, u)} = \begin{vmatrix} \mathrm{f}_y & 0 \\ \mathrm{g}_y & \mathrm{g}_u \end{vmatrix} = \mathrm{f}_y . \mathrm{g}_u \neq 0 .$$

3º) y, v dependientes:

$$dz = du = 0 \quad ; \quad dy = (d_x y)_{z,u} \quad ; \quad dv = (d_x v)_{z,u} \quad ;$$
$$(d_x v)_{z,u} = \mathrm{f}_x dx + \mathrm{f}_y (d_x y)_{z,u} \ ; \ dx = \mathrm{g}_y (d_x y)_{z,u} + \mathrm{g}_v (d_x v)_{z,u} \ ;$$

de donde eliminando $(d_x v)_{z,u}$ queda

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z,u} = \frac{1 - \mathrm{f}_x . \mathrm{g}_v}{\mathrm{g}_y + \mathrm{f}_y . \mathrm{g}_v} \quad , \quad \text{siendo } \mathrm{g}_y + \mathrm{f}_y . \mathrm{g}_v \neq 0 \quad ,$$

con jacobiano del sistema

$$\frac{\partial(\mathrm{f}-v,\ \mathrm{g}-x)}{\partial(y, v)} = \begin{vmatrix} \mathrm{f}_y & -1 \\ \mathrm{g}_y & \mathrm{g}_v \end{vmatrix} = \mathrm{g}_y + \mathrm{f}_y \mathrm{g}_v \neq 0 .$$

EJERCICIOS

1. Hallar con [67-3] la derivada de la función compuesta $z = 2xy/\sqrt{x^2 + y^2}$, siendo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y verificar el resultado expresando z como función de t.

2. Estudiar la función compuesta $z = +\sqrt{x^2 - y^2}$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, hallando la expresión de z como función de t, su campo de definición y su derivada.

3. Estudiar la homogeneidad y aplicar, cuando sea posible, el teorema de EULER, en las siguientes funciones:

1º) La del ejercicio 4 de § 64;
2º) $u = y\sqrt{x^2 + y^2} \ln[(x + y)/x]$;
3º) $u = x^{1/3} y^{-2/3} + x^{2/3} y^{-1/3}$.

4. Si $\mathrm{F}(x, y, z)$ es homogénea de grado h, el plano tangente a la superficie $\mathrm{F}(x, y, z) = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$x\mathrm{F}_x(x_0, y_0, z_0) + y\mathrm{F}_y(x_0, y_0, z_0) + z\mathrm{F}_z(x_0, y_0, z_0) = h .$$

5. Demostrar que las derivadas laterales en el origen $\mathrm{f}^+_x(0, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathrm{f}^+_w(0, 0, \ldots, 0)$ y en general $\mathrm{f}_\varphi(0, 0, \ldots, 0)$ son nulas en toda dirección en que se anule la función homogénea $\mathrm{f}(x, y, \ldots, w)$ en algún punto (y por ende en todos los de la semirrecta) cualquiera que sea m.

Si $m > 1$, son nulas en toda dirección. Si $m < 1$ son infinitas, excepto en las direcciones donde es $\mathrm{f} = 0$. Si $m = 1$ es f lineal en cada dirección y su pendiente es la derivada.

Consecuencia: si $m \geqslant 1$ subsiste en el origen la identidad de EULER.

6. Si al multiplicar las variables x_i por sendos factores reales λ_i, independientes o ligados, la función $\mathrm{f}(x_1 \ldots, x_n)$ queda multiplicada por un *factor de homogeneidad* $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, es decir, si se cumple

$$\mathrm{f}(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) . \mathrm{f}(x_1, \ldots, x_n)$$

para todo sistema de valores reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, independientes o ligados por ciertas relaciones llamadas *ecuaciones de condición*, entonces la función $\mathrm{f}(x_1, \ldots, x_n)$ se llama respectivamente *incondicional o condicionalmente homogénea generalizada.* (T. EHRENFEST-AFANASSJEWA).

Demostrar que para valores positivos de los factores de homogeneidad y función diferenciable, es suficiente se verifiquen las ecuaciones de condición $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$ para que se cumpla [67-8]. (Cfr. Vol. III, Ap. I, *f*).

7. Campo de existencia y ramas de la función $y = \mathrm{y}(x)$ definida implícitamente mediante $\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} y = 0$. Diferenciabilidad.

8. Hallar las derivadas parciales de la función $z = \mathrm{f}(x, y)$ definida por $\mathrm{F}(x, y, z) \equiv x^4 + y^4 + z^2 + 2xz - 2yz + 5 = 0$, y verificar con la expresión explícita de f.

9. Estudio de la función $z = \mathrm{z}(x, y)$ dada implícitamente mediante $x + y + z = \operatorname{sen} xyz$ en el entorno de $(0; 0; 0)$.

10. Planos tangentes: 1º) De la superficie $z = \ln(\cos y/\cos x)$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0); 2º) De la superficie $\operatorname{sen}^2 x + \cos(y + z) = 3/4$ en el punto $(\pi/6, \pi/3, 0)$.

11. Ecuación del conoide cuyas generatrices son paralelas al plano yz, y se apoyan en la elipse $(x^2/4) + z^2 = 1$ del plano $y = 1$ y en el eje x. Normal y plano tangente en el punto $(6/5; 5; 4)$.

12. Probar que el paraboloide $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$ y la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$ se cortan ortogonalmente en el punto $(1; 1; 2)$ y calcular los cosenos directores de la tangente común.

13. Probar que existe intersección de las superficies $z = 4x^2 - 3y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ en el punto $(2; -2; 4)$ y hallar los parámetros directores de la tangente en ese punto.

14. Estudiar la intersección de las superficies $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$ en el punto $(2; 1; 1)$.

15. Hallar $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ en el sistema: $v + \ln u = xy$, $u + \ln v = x - y$.

16. Hallar $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x$ en el sistema: $F[u, v, g(u, v, x)] = 0$, $G[u, v, h(u, v, y)] = 0$.

17. Demostrar que para $z = f(x, y)$, en coordenadas polares (r, φ) es $z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + (z_\varphi{}^2/r^2)$. Transformación análoga para $xz_y - yz_x$.

18. Demostrar que si las u_i están dadas como funciones implícitas de las x_j por n ecuaciones de la forma $F_k(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_n) = 0$, entonces es

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} : \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}.$$

19. Demostrar que el jacobiano de un sistema de funciones respecto de varias variables tiene la propiedad lineal respecto de las funciones, es decir, es aditivo y distributivo.

20. Demostrar que las condiciones para que una transformación $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ sea isogonal o conforme (§ 41-1, *c*) son las identidades $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. (Cfr. § 114-2, *a*).

21. Demostrar que la transformación por radios vectores recíprocos (§ 67-7, ejemplo) es conforme inversa, transforma circunferencias en circunferencias incluyendo las rectas como circunferencias de radio infinito, y hallar su jacobiano.

22. La ecuación $\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} = 1$, $(a > b)$, determina dos valores t_1 y t_2 de t para cada par (x, y), dando $t_1 = t_1(x, y)$, $t_2 = t_2(x, y)$, llamadas *coordenadas* (curvilíneas) *focales* (cfr. § 103-1, ejemplo 2).

1º) Demostrar que las curvas $t_1 = \text{const.}$, $t_2 = \text{const.}$, son elipses e hipérbolas confocales y ortogonales entre sí; 2º) Expresar x, y en función de t_1 y t_2; 3º) Expresar el jacobiano $\partial(t_1, t_2)/\partial(x, y)$ en función de x, y; 4º) Encontrar la condición para que dos curvas dadas paramétricamente en coordenadas focales: $t_1 = f_1(\lambda)$, $t_2 = f_2(\lambda)$; $t_1 = g_1(\mu)$, $t_2 = g_2(\mu)$ sean ortogonales.

23. Demostrar que la *transformación por radios vectores recíprocos en el espacio*:

$$u = x/(x^2 + y^2 + z^2), \quad v = y/(x^2 + y^2 + z^2), \quad w = z/(x^2 + y^2 + z^2)$$

conserva los ángulos entre dos superficies y transforma superficies esféricas en superficies esféricas (incluyendo los planos como superficies esféricas de radio infinito).

24. Obtener para [67-39] todas las derivadas parciales posibles y aplicarlo al caso $u = x^2 + y^2$, $y = x^2$.

25. Obtener du/dx si $f(u, v, w) = x^2$; $g(u, v, x) = \ln w$; $h(u, v, w, x) = 0$.

26. Obtener los distintos $\partial u/\partial s$ si $u = y/x$; $y = \ln s$; $x = r^s$.

§ 68. TEOREMAS DE EXISTENCIA DE LAS FUNCIONES IMPLÍCITAS. DEPENDENCIA FUNCIONAL

1. **Función definida por una ecuación.** — Veamos ahora el teorema de existencia de una función implícita de un número cualquiera de variables independientes anunciado en § 67-5 y también su caso particular en § 67-4.

TEOR. *Sea* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; u)$ *una función uniforme de* $n + 1$ *variables que satisface las siguientes condiciones*:

1º) $F(a_1, a_2, \ldots, a_n; b) = 0$.

2º) $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; u)$ *es una función continua en un entorno del punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b)$ *del espacio* E_{n+1}.

3º) *Existe no nula la derivada parcial* $F_u(a_1, a_2, \ldots, a_n; b) \neq \neq 0$.

Entonces, en un cierto entorno del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *del espacio* E_n *formado por las variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *existe al menos una función* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *tal que* $b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y cumple idénticamente* $F[x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv 0$ *en dicho entorno de* E_n.

Si además se cumple:

4º) *La derivada parcial* $F_u(x_1, x_2, \ldots, x_n; u)$ *existe sin anularse en un entorno del punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b)$, *por ejemplo, es continua en* $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b)$; *entonces, la función* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es única, es decir, uniforme, y es continua en el punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Si finalmente se cumple también:

5º) *La función* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; u)$ *es diferenciable en el punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b)$ *de* E_{n+1}: *entonces, la función* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es diferenciable en el punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *de* E_n, *y basta diferenciar totalmente*

[68-1] $$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; u) = 0$$

para obtener mediante

[68-2] $$F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n + F_u du = 0 ,$$

la diferencial total du *de la función* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *por lo que existen las derivadas parciales* $f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *dadas por*

[68-3] $$f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = - F_i(a_1, a_2, \ldots, a_n; b)/F_u(a_1, a_2, \ldots, a_n; b) ; \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

El plan de la demostración consiste en ver primero que existe superficie de nivel [68-1] (fig. 230).

Si $F_u(a_1, a_2, \ldots, a_n; b) \neq 0$, la función $F(a_1, a_2, \ldots, a_n; u)$ de la sola

variable u es estrictamente creciente o decreciente (§ 33-1) en $u = b$ y por ser $F(a_1, a_2, \ldots, a_n; u)$ continua en $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b)$ (§ 65-3), existe un número positivo $\delta > 0$ tal que

$$\operatorname{sg} F(a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b - \delta) \neq \operatorname{sg} F(a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b + \delta),$$

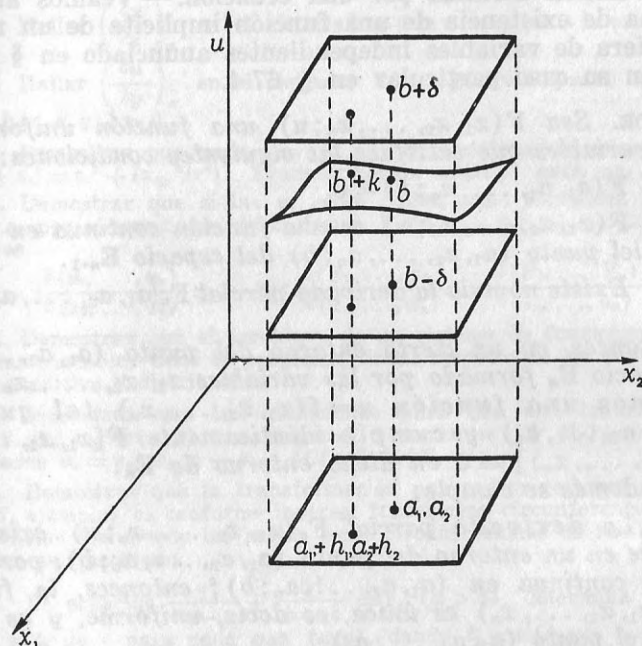


Fig. 230

y un $\eta > 0$ tal que (§ 26-1) para todo $|h_i| < \eta$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\operatorname{sg} F(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n;\ b - \delta) = \operatorname{sg} F(a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b - \delta) \neq$$
$$\neq \operatorname{sg} F(a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b + \delta) = \operatorname{sg} F(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n;\ b + \delta).$$

Por el teorema de BOLZANO (§ 26-2), existe para cada

$$(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n)$$

tal que $|h_i| < \eta$, al menos un punto $b + k$ en el intervalo $(b - \delta,\ b + \delta)$ (y acaso varios), tal que $F(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n;\ b + k) = 0$, es decir, en $x_i = a_i + h_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, el valor $u = b + k$ define la función (acaso multiforme $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que en el entorno de $(a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b)$ definido por $|k| < \delta$, $|h_i| < \eta$ cumple

$$F[x_1, \ldots, x_n;\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv 0.$$

Si además se cumple la hipótesis 4ª, la solución

$$b + k = f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n)$$

de [68-1] es *única*, pues si hubiesen dos valores $k_1 \neq k_2$ para los que

$$F(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n;\ b + k_1) = F(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n;\ b + k_2),$$

existiría por el teorema de ROLLE (§ 35-2) un punto c del intervalo $(b + k_1,\ b + k_2)$, donde $F_u(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n;\ c) = 0$, contrariamente a lo supuesto en 4º).

Por construcción, el valor $b + k$ pertenece al intervalo $(b - \delta,\ b + \delta)$, es decir, se cumple

$$|f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, \ldots, a_n)| < \delta$$

para $|h_i| < \delta$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, lo que quiere decir que

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

es continua en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Finalmente, supongamos que también se cumple la hipótesis 5ª), es decir (§ 66-4):

[68-4] $$\Delta F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u) - F(a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b) = \\ = \sum_i h_i F_i(a_1, \ldots, a_n;\ b) + k F_u(a_1, \ldots, a_n;\ b) + \alpha\rho = 0,$$

donde la anulación se refiere a los valores $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ que cumplen la ecuación [68-1], con $k = u - b$, siendo

[68-5] $$\lim \alpha = 0 \quad \text{para} \quad \rho \to 0$$

si es

$$\rho^2 = \rho_0^2 + k^2 \quad ; \quad \rho_0^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i^2.$$

Por la continuidad de $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es

$$\lim k = 0 \quad \text{para} \quad \rho_0 \to 0$$

y por tanto es

[68-6] $$\lim \rho = 0 \quad \text{para} \quad \rho_0 \to 0.$$

Por la desigualdad triangular que relaciona la diagonal del paralelepípedo con la suma de sus lados (§ 64-4), es

$$\rho = \theta \left(|k| + \sum_{i=1}^{n} |h_i| \right),$$

con $0 < \theta \leq 1$, de donde, si se pone

[68-7] $$\varepsilon = \theta\alpha \operatorname{sg} k \quad ; \quad \varepsilon_i = \theta\alpha \operatorname{sg} h_i$$

resulta $\quad (|k| = k \operatorname{sg} k \quad ; \quad |h_i| = h_i \operatorname{sg} h_i):$

[68-8] $$\alpha\rho = \varepsilon k + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i h_i.$$

De [68-5], [68-6] y [68-7] puede afirmarse que

[68-9] $$\begin{cases} \lim\limits_{\rho_0 \to 0} \alpha = \lim\limits_{\rho \to 0} \alpha = 0 \\ \lim \varepsilon = 0;\ \lim \varepsilon_i = 0;\ \text{para } \rho_0 \to 0;\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Sustituyendo [68-8] en [68-4] queda

[68-10] $$k[F_u(a_1, \ldots, a_n;\ b) + \varepsilon] = -\sum_{i=1}^{n} h_i [F_i(a_1, \ldots, a_n;\ b) + \varepsilon_i],$$

de donde

$$k = -\sum h_i \frac{F_i}{F_u} - \sum h_i \left(\frac{F_i + \varepsilon_i}{F_u + \varepsilon} - \frac{F_i}{F_u} \right),$$

es decir
$$k = -\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{F_i(a_1, \ldots, a_n; b)}{F_u(a_1, \ldots, a_n; b)} -$$
$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i F_u(a_1, \ldots, a_n; b) - \varepsilon F_i(a_1, \ldots, a_n; b)}{F_u(a_1, \ldots, a_n; b)\,[F_u(a_1, \ldots, a_n; b) + \varepsilon]} h_i$$
y como $|h_i/\varrho_0| \leqslant 1$ y se cumple la hipótesis 3ª), de [68-9] se deduce que la última suma es la de la forma $\varepsilon_0\varrho_0$ con
$$\lim \varepsilon_0 = 0 \quad \text{para} \quad \varrho_0 \to 0$$
como queríamos demostrar (§ 66-4).

NOTAS: 1. En el caso particular $F(x, y) = 0$, [68-4] descompuesta en
$$\Delta F = \Delta_x F + \Delta_y F = 0$$
da lugar a [68-10], aquí:
$$[F_x(a; b) + \varepsilon_x]h + [F_y(a; b) + \varepsilon_y]k = 0 \ ,$$
suponiendo sólo la existencia de $F_x(a; b)$, (pues entonces $\Delta_x F/h = F_x(a; b) + \varepsilon_x$, § 30-2) y la existencia de $F_y(x, y)$ en el entorno de $(a; b)$ y su continuidad en dicho punto (para aplicar § 35-1, fig. 231 y poner $\Delta_y F = F_y(a+h, \eta)k = [F_y(a; b) + \varepsilon_y]k$). Claro que entonces, por el teorema 2 de § 66-4, la $F(x, y)$ es diferenciable en $(a; b)$ recayendo en la formulación dada en § 67-4.

Fig. 231

2. *Si la función* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; u)$ *es diferenciable en los puntos de un entorno de* $(a_1, \ldots, a_n, b)$, *entonces la función* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *es diferenciable en los puntos de un cierto entorno de* $(a_1, \ldots, a_n)$, pues la demostración anterior se aplica para cada punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n; u)$.

3. Este teorema asegura la existencia de la función implícita "en pequeño", es decir, en un cierto entorno de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Para pasar del estudio local al global, es decir, a la existencia "en grande", si en cada punto de un *dominio* (§ 64-5) se verifica el teorema, basta entonces aplicar el lema de BOREL (nota II; íd. Cap. VI, nota III) para construir la $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mediante un número finito de correspondencias parciales.

2. Funciones definidas por un sistema de ecuaciones.

— El problema resuelto sobre existencia de una función implícita, es el caso más sencillo del teorema siguiente:

TEOR. *Sea dado un sistema de m ecuaciones entre* $n + m$ *variables:*

$$[68\text{-}11] \quad \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m) = 0 \ , \\ F_2(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m) = 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ , \\ F_m(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m) = 0 \ , \end{cases}$$

que satisfaga las siguientes condiciones:

1º) $F_j(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m) = 0, \ (j = 1, 2, \ldots, m)$.

2º) *Las funciones* $F_j(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *son continuas en un entorno del punto* $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$ *del espacio* $\mathbf{E}_{n+m}$.

3º) *El jacobiano* (§ 67-6) *siguiente, supuesto existente, es no nulo:*

$$[68\text{-}12] \qquad J = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_m)} \neq 0$$

en el punto $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$.

4º) *Las derivadas parciales* $\partial F_j/\partial u_i$ $(j, i = 1, 2, \ldots, m)$ *existen en el entorno y son continuas en el punto* $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$ *del espacio* $\mathbf{E}_{n+m}$.

5º) *Las funciones* $F_j(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m)$ *son diferenciables en los puntos de un entorno de* $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$ *en* $\mathbf{E}_{n+m}$;

entonces en un entorno del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *del espacio* $\mathbf{E}_n$ *formado por las variables* $x_1, \ldots, x_n$ *existe un solo sistema de funciones uniformes* $u_j = f_j(x_1, \ldots, x_n)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, *tales que* $b_j = f_j(a_1, \ldots, a_n)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, *cumplan idénticamente*
$$F_j[x_1, \ldots, x_n; f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)] \equiv 0 \ ,$$
$(j = 1, 2, \ldots, m)$ *en dicho entorno de* $\mathbf{E}_n$ *y en los puntos del mismo sean dichas funciones* $f_j(x_1, \ldots, x_n)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *continuas y diferenciables; sus diferenciales totales se obtienen en la forma expuesta en* § 67.6.

DEM. Puesto que para $m = 1$ el teorema se reduce al de § 68-1, nota 2, podemos probarlo por inducción completa (§ 2-2, *b*). Supongámoslo, pues, cierto para $m - 1$ ecuaciones con $m - 1$ funciones incógnitas.

Por la hipótesis [68-12], existe en este jacobiano algún menor de orden $m - 1$ no nulo, y cambiando adecuadamente la numeración de índices, podemos suponer sea

$$[68\text{-}13] \qquad \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_{m-1})}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})} \neq 0$$

en $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots; b_m)$, conservándose la desigualdad [68-13] en un entorno de este punto por la continuidad de las derivadas parciales supuesta en la hipótesis 4ª).

Por hipótesis inductiva, tomando u_m como variable independiente adjunta a las $x_1, \ldots, x_n$, de las $m - 1$ primeras ecuaciones [68-11] se deducen las $m - 1$ funciones

$$[68\text{-}14] \quad u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n; u_m), \ \ldots, \ u_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n; u_m) \ ,$$

que además de ser diferenciables respecto de $x_1, \ldots, x_n, u_m$ en los puntos de un cierto entorno de $(a_1, \ldots, a_n; b_m)$, verifican idénticamente en dicho entorno, las ecuaciones:

$$[68\text{-}15] \quad F_j[x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n; u_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n; u_m), u_m] \equiv 0 \ , \ (j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Si reemplazamos [68-14] en la última ecuación [68-11], obtendremos una nueva ecuación de la forma

[68-16] $$\mathrm{F}_m[x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n; u_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n; u_m), u_m] \equiv \equiv \Phi(x_1, \ldots, x_n; u_m) = 0 \quad ,$$

que es diferenciable en los puntos de un entorno de $(a_1, \ldots, a_n; b_m)$, por serlo (§ 67-2) las [68-14] y [68-11]. En un entorno de $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_m)$ se conserva $\partial\Phi/\partial u_m \neq 0$, pues aplicando la regla de derivación (§ 67-2) de funciones compuestas a las expresiones *idénticamente nulas* [68-15] respecto de u_m:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_m} + \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_m} + \ldots + \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial u_{m-1}} \cdot \dfrac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_m} + \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial u_m} \equiv 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ , \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_{m-1}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_m} + \dfrac{\partial \mathrm{F}_{m-1}}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_m} + \ldots + \dfrac{\partial \mathrm{F}_{m-1}}{\partial u_{m-1}} \cdot \dfrac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_m} + \dfrac{\partial \mathrm{F}_{m-1}}{\partial u_m} \equiv 0 \ , \end{cases}$$

si además supusiéramos que en algún punto de todo entorno de $(a_1, \ldots, a_n; b_m)$ es nula la derivada de [68-16]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_m} \equiv \frac{\partial \mathrm{F}_m}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m} + \frac{\partial \mathrm{F}_m}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_m} + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}_m}{\partial u_{m-1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial \mathrm{F}_m}{\partial u_m} = 0 \quad ,$$

en dicho punto existirían $m - 1$ valores

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m} \ , \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_m} \ , \ldots, \ \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_m}$$

que verificasen las m condiciones lineales que expresan esta última y las anteriores, por lo que (§ 15, Ej. 9) habría de ser nulo en él el jacobiano [68-12], contrariamente a las hipótesis 3ª) y 4ª).

Por tanto, en dicho entorno de $(a_1, \ldots, a_n; b_m)$, según § 68-1, podemos existencialmente despejar de la ecuación [68-16], la función diferenciable

$$u_m = \mathrm{f}_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

que sustituída en las [68-14], da las restantes funciones diferenciables buscadas

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1[x_1, \ldots, x_n; \ \mathrm{f}_m(x_1, \ldots, x_n)] \equiv \mathrm{f}_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{m-1} = \varphi_{m-1}[x_1, \ldots, x_n; \ \mathrm{f}_m(x_1, \ldots, x_n)] \equiv \mathrm{f}_{m-1}(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Las m funciones así obtenidas, según ya hemos visto en § 67-6, aplicando las reglas de diferenciación de § 67-2, verifican la tesis a demostrar.

NOTA. Obsérvese que para apoyarse en los teoremas de derivación y diferenciación de funciones compuestas (§ 67-2), no basta suponer la función $\mathrm{F}_m(x_1, \ldots, x_n; \ u_1, \ldots, u_m)$ diferenciable en el solo punto $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$ para asegurar la existencia de $\partial\Phi/\partial u_m$ en todo un entorno de $(a_1, a_2, \ldots, a_n; \ b_m)$ y así aplicar § 67-1, hipótesis 4ª).

3. Dependencia funcional. — *a*) Vemos en los teoremas anteriores (§§ 68-2 y 67-7) el importante oficio que desempeña el jacobiano. Vamos a estudiar ahora el significado de su anulación idéntica.

Dadas n funciones de n variables independientes

[68-17] $$\begin{cases} u_1 = \mathrm{u}_1(x_1, \ldots, x_n) \ , \\ u_2 = \mathrm{u}_2(x_1, \ldots, x_n) \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \mathrm{u}_n(x_1, \ldots, x_n) \ , \end{cases}$$

el jacobiano, respecto de estas variables independientes, es:

[68-18] $$\mathrm{J} = \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

y tiene propiedades análogas a las de la derivada, siendo como una generalización de ésta. Así como la función derivable $u = \mathrm{u}(x)$ pone generalmente en correspondencia (un segmento de) el eje x con (un segmento de) el eje u, pero dicha función se reduce a una constante (§ 35-3) cuando y sólo cuando es la derivada $\mathrm{u}'(x) \equiv 0$, idénticamente nula en x, así también (§ 67-7) el sistema [68-17] transforma *en general* (un recinto n-dimensional de) el espacio $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en (otro recinto n-dimensional de) el espacio $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, pero dicha correspondencia degenera, como vamos a ver ahora en el caso de anulación idéntica del jacobiano.

En el caso de *una* función de *una* variable, la condición $\mathrm{u}(x) \equiv \mathrm{c^{te}}$ puede interpretarse en el sentido de que a (un segmento de) el eje x (dimensión 1) le corresponde un punto (dimensión 0) en el eje u, o bien en el sentido equivalente de que $u = \mathrm{u}(x)$ satisface una *relación independiente de* x, lo que en vista de la generalización subsiguiente, se expresa también diciendo que *existe dependencia funcional* para $u = \mathrm{u}(x)$.

DEF. Si las funciones [68-17] están definidas para los puntos de un recinto cerrado y acotado D del espacio $(x_1, \ldots, x_n)$, diremos que existe una *relación entre ellas independiente de las variables* $x_1, \ldots, x_n$, o también que son *funciones dependientes* en D, cuando existe una función $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ no idénticamente nula en ningún entorno completo de un punto del espacio $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, tal que sea

[68-19] $$\Phi[\mathrm{u}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathrm{u}_n(x_1, \ldots, x_n)] \equiv \equiv \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$$

idénticamente nula en D.

En este caso, la transformación [68-17] hace corresponder al dominio D de n dimensiones un conjunto de dimensión menor en el espacio $(u_1, \ldots, u_n)$.

Obsérvese que Φ no necesita contener explícitamente las n variables $u_1, \ldots, u_n$, y que por tanto, si p funciones son funcionalmente dependientes $(p < n)$, ya lo son las n.

EJEMPLOS: 1. Las funciones

$$u = x(y-z) \quad , \quad v = y(z-x) \quad , \quad w = z(x-y)$$

son funcionalmente dependientes, pues existe la función no idénticamente nula $\Phi = u + v + w$, tal que se tiene

$$\Phi(u,v,w) = x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) \equiv 0$$

idénticamente nula en el espacio (x,y,z), es decir, a todo (recinto de) el espacio (x,y,z) corresponde (un recinto de) el plano $u+v+w=0$ en (u,v,w).

Obsérvese que aun cuando se mantenga nula Φ en los puntos de dicho plano, no es idénticamente nula en ningún entorno completo de un punto (u,v,w).

El jacobiano del sistema es:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} y-z & x & -x \\ -y & z-x & y \\ z & -z & x-y \end{vmatrix} \equiv 0.$$

2. Las funciones

$$u = 2xy + 2x + 1 \quad , \quad v = x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 1 \quad ,$$

son también funcionalmente dependientes, pues transforman (un recinto de) el plano (x,y) en (un arco de) la curva

$$v = (y^2 + 2y + 1)\left(\frac{u-1}{2y+2}\right)^2 - 1 = \tfrac{1}{4}(u^2 - 2u - 3)$$

de (u,v). Aquí puede tomarse $\Phi(u,v) = u^2 - 2u - 4v - 3$ y es también idénticamente nulo el jacobiano

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2xy^2 + 4xy + 2x & 2x^2y + 2x^2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3. Si las funciones

$$u = \mathrm{u}(x,y) \quad , \quad v = \mathrm{v}(x,y)$$

son tales que sus segundos miembros no dependen efectivamente de y, es decir, son sólo funciones de x, tendremos (§ 29-2) una curva en el plano (u,v) y efectivamente entonces es idénticamente nulo:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \mathrm{u}_x & 0 \\ \mathrm{v}_x & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

b) Ahora estamos en condiciones de entender la formulación del teorema fundamental.

TEOR. *Dadas las n funciones* [68-17] *de las n variables independientes* $x_1, \ldots, x_n$ *con derivadas parciales continuas en un dominio acotado* D *de estas variables, la condición necesaria y suficiente para que sean funcionalmente dependientes en* D, *es decir, para que valga idénticamente en* D *una relación* [68-19] *con* $\Phi(u_1, \ldots, u_n)$ *no idénticamente nula en ningún entorno completo de un punto del espacio* $(u_1, \ldots, u_n)$ *es que el jacobiano* [68-18] *sea idénticamente nulo en* D.

DEM. b_1) *La condición es necesaria.* Supongamos se cumpla [68-19] idénticamente en D para $\Phi(u_1, \ldots u_n)$ no idénticamente nula en ningún

entorno completo de un punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Derivando [68-19] respecto de x_i por la regla de funciones compuestas (§ 67-2), será

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \equiv 0 \quad ,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Este sistema de n ecuaciones lineales homogéneas en las $\partial\Phi/\partial u_j$ es posible (§ 15-6, *b*) para Φ no idénticamente nulo (§ 66-2, cor. 1º) cuando es nulo el determinante [68-18] de los coeficientes; sólo si es $\partial\Phi/\partial u_j = 0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ podría ser $\mathrm{J} \neq 0$ (§ 15-6, *b*), pero tales puntos, donde $\mathrm{J} \neq 0$, *no pueden formar un entorno completo de un punto* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, pues a él correspondería un entorno completo de $(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0)$, al poder despejar (§§ 68-2 y 67-7) las $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del sistema [68-17]; entonces, ahí sería $\partial\Phi/\partial u_j \equiv 0$, es decir, $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv 0$ (§ 66-2, corol. 1º e hipótesis [68-19]) en dicho entorno completo, contrariamente a lo supuesto respecto de la función Φ. Así, pues, aún los puntos excepcionales, donde $\partial\Phi/\partial u_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ son de acumulación (§ 64-4, *b*) de aquéllos para los que $\mathrm{J} = 0$ y por continuidad, para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \varepsilon \mathrm{D}$ *cerrado* (§ 64-4, nota 1) resulta J idénticamente nulo en D.

b_2) *La condición es suficiente.* Basta proceder por inducción. El teorema es cierto para $n = 1$, pues la condición $\mathrm{J} \equiv 0$ equivale a la $\mathrm{u}_x \equiv 0$, de donde (§ 35-3) $\mathrm{u}(x) \equiv c$ (constante) y basta escoger la función no idénticamente nula $\Phi = \mathrm{u} - c$, para que se verifique [68-19], es decir $\Phi[\mathrm{u}(x)] \equiv \mathrm{F}(x) \equiv \mathrm{u}(x) - \mathrm{c} \equiv 0$, idénticamente nula en x.

Supongamos, pues, cierto el teorema para un sistema de $n-1$ funciones de $n-1$ variables y demostrémoslo para n funciones de n variables para lo que suponiendo que [68-17] no son funcionalmente dependientes, vamos a ver que en algún punto de D es $\mathrm{J} \neq 0$.

Probemos primero que no todas las $\partial u_j/\partial x_n$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ son idénticamente nulas en D. Pues en caso contrario, las [68-17] serían independientes de x_n (§ 35-3):

$$[68\text{-}20] \qquad \begin{cases} u_1 = \mathrm{u}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \quad , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1} = \mathrm{u}_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \quad , \\ u_n = \mathrm{u}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \quad , \end{cases}$$

lo que vamos a ver es incompatible con la hipótesis de que no son funcionalmente dependientes. En efecto, en algún punto de D ha de ser

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \neq 0$$

para que por hipótesis inductiva las $n-1$ primeras funciones [68-20], y por tanto las n funciones [68-20] no sean funcionalmente dependientes. Entonces, de las $n-1$ primeras ecuaciones [68-20] podrán despejarse (§ 68-2) las $x_j = \mathrm{x}_j(u_1, \ldots, u_{n-1})$, $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, y sustituídas en la última [68-20] se habrá obtenido una función de la forma

$$\Phi(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n) \equiv u_n - \mathrm{u}_n[\mathrm{x}_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ \ldots, \ \mathrm{x}_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})]$$

que evidentemente no es idénticamente nula en $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n$, pues u_n sólo figura en su primer término y que en cambio se anula idénticamente en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, al sustituir $u_1, u_2, \ldots, u_n$ por las funciones [68-20] y entonces éstas serían funcionalmente dependientes en contra de lo supuesto inicialmente.

Al no ser todas las $\partial u_j/\partial x_n$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ idénticamente nulas en D, podemos suponer que tal ocurra (cambiando si fuera necesario la numeración de las u_j) para $\partial u_n/\partial x_n$. Existe entonces, al menos, un punto

de D en el cual $\partial u_n/\partial x_n \neq 0$, y a causa de la supuesta continuidad de la derivada, esta desigualdad se mantiene en todo un entorno de dicho punto. En tal entorno, de la última [68-17] se puede despejar (§ 68-1):

$$[68\text{-}21] \qquad x_n = \xi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; u_n)$$

y sustituir en las [68-17] dando $n-1$ relaciones y una identidad:

$$[68\text{-}22] \quad \begin{cases} u_j = \mathrm{u}_j[x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi(x_1, \ldots, x_{n-1}; u_n)] \equiv \omega_j(x_1, \ldots, x_{n-1}; u_n), \\ \qquad\qquad (j=1,2,\ldots,n-1) \quad , \\ u_n = \mathrm{u}_n\,[x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi(x_1, \ldots, x_{n-1}; u_n)] \equiv \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}; u_n), \end{cases}$$

donde la última función ω_n será en realidad independiente de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, reduciéndose simplemente a la variable u_n. Si derivamos las [68-22] respecto de x_i, $(i=1,2,\ldots,n-1)$, se obtienen

$$[68\text{-}23] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x_i} ; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (j, i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \dfrac{\partial \omega_n}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x_i} \equiv 0 \ , \end{cases}$$

que prueban es

$$[68\text{-}24] \qquad \mathrm{J}_1 \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_n} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x_{n-1}}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x_{n-1}}, \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_n}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x_{n-1}}, \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

para

$$[68\text{-}25] \qquad \mathrm{J}_1 = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \ ,$$

pues, desarrollando el determinante [68-24] por los elementos de su última fila (§ 13-4, *b*), todos los términos del desarrollo son nulos por las últimas $n-1$ identidades [68-23], salvo el último que por las primeras relaciones [68-23] y la [68-25] es precisamente el producto que figura en el primer término de [68-24].

Por otra parte, el determinante de [68-24] no se altera (§ 13-4, c_2) si restamos de su primera columna el producto de la última por $\partial\xi/\partial x_1$, de la segunda columna el producto de la última por $\partial\xi/\partial x_2$ y así sucesivamente, quedando entonces reducido dicho determinante al [68-18], lo que prueba se cumple

$$[68\text{-}24'] \qquad \mathrm{J}_1 \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \mathrm{J}$$

en todo el entorno donde se han establecido las [68-22].

En este entorno no puede anularse idénticamente J_1, pues si así fuera, las ω_j, $(j=1,2,\ldots,n-1)$ serían dependientes, por la hipótesis inductiva, y la relación de dependencia contendría también u_n, de donde existiría una función $\Phi(u_1, \ldots, u_{n-1})$ no idénticamente nula en $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, tal que

$$\Phi[\omega_1(x_1, \ldots, x_{n-1}; u_n), \ldots, \omega_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}; u_n)] \equiv$$
$$\equiv \Phi[\mathrm{u}_1\{x_1, \ldots, x_{n-1}, \ \xi(x_1, \ldots, x_{n-1}; u_n)\}, \ldots,$$
$$, \ldots, \mathrm{u}_{n-1}\{x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi(x_1, \ldots, x_{n-1}; u_n)\}] \equiv 0 \quad ,$$

idénticamente en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; u_n$. Por [68-21] puede hacerse $\xi = x_n$ arbitrario del entorno considerado, lo que prueba sería

$$\Phi[\mathrm{u}_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n), \ldots, \mathrm{u}_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)] = 0$$

idénticamente en $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, es decir, las $n-1$ primeras funciones [68-17], y por tanto también las n funciones [68-17], serían funcionalmente dependientes, en contra de la hipótesis inicial.

Como por otra parte, $\partial u_n/\partial x_n$ no se anula *en ningún punto* del entorno considerado, queda probado por [68-24′] que J no puede anularse idénticamente en este entorno y por tanto, tampoco en D como queríamos demostrar.

NOTAS: 1. Se demuestra análogamente (véase bibliografía, nota III) que si el jacobiano J no sólo es idénticamente nulo, sino que aún la característica máxima en los puntos del dominio D es $n-r$, entonces existen r relaciones "distintas" no idénticamente nulas, entre las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ independientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y r funciones pueden expresarse mediante las $n-r$ restantes (cfr. § 61-5). Que las relaciones sean "distintas" quiere decir que vienen expresadas por funciones Φ que no son funcionalmente independientes. Geométricamente, a un recinto n-dimensional de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ corresponde entonces una variedad $n-r$ dimensional de puntos $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

2. También se demuestra que dadas n funciones con $n+p$ variables independientes, la condición necesaria y suficiente para que exista una relación entre las funciones, independientemente de las variables, es que los $\binom{n+p}{n}$ jacobianos de las n funciones respecto de cada combinación de n variables independientes, sean idénticamente nulos.

En particular, para que $\mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathrm{g}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sean una función de la otra, independientemente de las $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es necesario y suficiente que

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_1} : \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_2} : \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x_2} \equiv \ldots \equiv \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_n} : \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x_n}$$

idénticamente en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

4. **Dependencia lineal: wronskiano.** — DEF. 1. Dadas n funciones de *una* variable en un intervalo $[a, b]$:

$$[68\text{-}26] \qquad u_1 = \mathrm{u}_1(x), \ \ldots, \ u_n = \mathrm{u}_n(x) \quad ,$$

se dicen *linealmente dependientes*, cuando existen constantes $c_1, \ldots, c_n$ no todas nulas, tales que

$$[68\text{-}27] \qquad c_1\mathrm{u}_1(x) + \ldots + c_n\mathrm{u}_n(x) \equiv 0 \quad ,$$

en todo punto $x \in [a, b]$; se dirán *linealmente independientes* en caso contrario.

NOTAS: 1. Para $n=1$, la definición anterior equivale a decir que $\mathrm{u}_1(x)$ es linealmente dependiente si $\mathrm{u}_1(x) \equiv 0$ para $x \in [a, b]$.

2. Para $n > 1$, las funciones [68-26] son siempre *funcionalmente* dependientes (§ 68-3, ejemplo 3), aun cuando sean *linealmente* independientes.

DEF. 2. Dadas las n funciones [68-26], supuestas derivables hasta el orden $n-1$, se llama *wronskiano* de estas funciones al determinante

$$[68\text{-}28] \quad W = W(u_1, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u'_2 & \ldots & u_n' \\ u_1'' & u_2'' & \ldots & u_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} & u_1^{(n-1)} \end{vmatrix} .$$

TEOR. 1. *Si* Δ_i *es el adjunto* (§ 13-4, *a*) *de* $u_i^{(n-1)}$ *en el wronskiano* [68-28], *entonces es*:

$$[68\text{-}29] \qquad \sum_{i=1}^{u} u_i^{(j)} \Delta_i = \begin{cases} 0 & si \quad j = 0, 1, \ldots, n-2 \ , \\ W & si \quad j = n-1 \ , \\ W' & si \quad j = n \ , \end{cases}$$

supuestas las funciones [68-26] *derivables hasta el orden* n *para la última igualdad* [68-29].

Se deducen inmediatamente: de § 13-4, b_1, el caso $j = n - 1$ (desarrollo de W por la última línea), y de § 13-4, b_2, los casos $j = 0, 1, 2, \ldots, n-2$. Si recordamos la regla de derivación de un determinante (§ 32-5), el determinante W′ será suma de n determinantes, siendo los $n-1$ primeros nulos por tener dos filas iguales (§ 13-3, c_2, corol.) y coincidiendo el último con [68-29] si $j = n$, al desarrollarlo por los elementos de la última fila.

TEOR. 2. *Si las* n *funciones* [68-26] *derivables hasta el orden* $n - 1$ *son linealmente dependientes en* $[a, b]$, *entonces el wronskiano* [68-28] *es idénticamente nulo en* $[a, b]$.

Pues de [68-27] se deducen

$$c_1 u_1^{(j)}(x) + \ldots + c_n u_n^{(j)}(x) \equiv 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \ ,$$

que con la de partida forman un sistema que para todo $x \varepsilon [a, b]$ se satisface para c_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, no todas nulas, y para ello es necesario (§ 15-6, *b*) que se anule el determinante [68-28] para todo $x \varepsilon [a, b]$.

TEOR. 3. *Si el wronskiano* [68-28] *es idénticamente nulo en* $[a, b]$ *y si en ningún punto de* (a, b) *se anulan simultáneamente los adjuntos* Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *de su última línea, entonces las funciones* [68-26] *son linealmente dependientes en* $[a, b]$.

DEM. Si E_i son los adjuntos de la penúltima línea del wronskiano [68-28], la derivación de Δ_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, por la misma razón que en el teorema 1, muestra que es

$$[68\text{-}30] \qquad \Delta_i' = - E_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Por otra parte, al no ser todos los adjuntos Δ_i simultáneamente nulos, el wronskiano W, idénticamente nulo, tiene característica $n - 1$, y como por el teorema 1 y su análogo para las E_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, se verifica

$$\left. \begin{array}{l} u_1^{(j)}\Delta_1 + u_2^{(j)}\Delta_2 + \ldots + u_n^{(j)}\Delta_n = 0, \\ u_1^{(j)}E_1 + u_2^{(j)}E_2 + \ldots + u_n^{(j)}E_n = 0, \end{array} \right\} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

resultarán (§ 15-6, *d*) proporcionales

$$E_1/\Delta_1 = E_2/\Delta_2 = \ldots = E_n/\Delta_n \ ,$$

y teniendo en cuenta [68-30], quedará

$$[68\text{-}31] \qquad \frac{\Delta_1'}{\Delta_1} = \frac{\Delta_2'}{\Delta_2} = \ldots = \frac{\Delta_n'}{\Delta_n}$$

para todo $x \varepsilon (a, b)$.

Si se pone

$$M^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 \ ,$$

será M distinto de cero en todo $x \varepsilon (a, b)$. De [68-31] se deduce

$$\frac{\Delta_1'}{\Delta_1} = \frac{\Delta_2'}{\Delta_2} = \ldots = \frac{\Delta_n'}{\Delta_n} = \frac{\Delta_1\Delta_1' + \Delta_2\Delta_2' + \ldots + \Delta_n\Delta_n'}{M^2} = \frac{MM'}{M^2} = \frac{M'}{M}$$

y por tanto se podrá escribir

$$\frac{M\Delta_i' - M'\Delta_i}{M^2} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Esto indica que la derivada de Δ_i/M es nula en todo (a, b), por lo que (§ 35-3) existen constantes c_i no simultáneamente nulas tales que en (a, b) sea

$$\Delta_i/M = c_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De ahí y [68-29] para $j = 0$, se deduce que en $[a, b]$ es

$$M(c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n) = 0 \ ,$$

equivalente a la [68-27], como queríamos demostrar.

NOTA 3. Si todos los adjuntos Δ_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se anulan simultáneamente en un mismo punto de (a, b), la condición lineal [68-27] puede cambiar sus coeficientes c_i a uno y otro lado de dicho punto. Así, en el ejemplo de PEANO $u_1 = x^2$, $u_2 = x \,.\, |x|$, el wronskiano es

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x \,.\, |x| \\ 2x & 2\,|x| \end{vmatrix} \equiv 0$$

para todo valor real de x, y sin embargo, las funciones u_1, u_2 no son linealmente dependientes en cualquier intervalo que contenga el origen en su interior, pues para $x \geqslant 0$ se cumple $u_1(x) - u_2(x) \equiv 0$, mientras que para $x \leqslant 0$ es $u_1(x) + u_2(x) \equiv 0$.

Por el teorema de identidad de las funciones analíticas (§ 44-1, *b*), esta anomalía no puede presentarse en las funciones desarrollables en serie de potencias. Otra condición necesaria y suficiente de dependencia lineal se da en el ejercicio 12.

EJERCICIOS

1. Si $\Phi(x, y)$ verifica $\Phi(0, 0) = 0$, y en el rectángulo R: $|x| < a$, $|y| < b$ es continua y cumple la *condición de* LIPSCHITZ

(*) $\quad |f(x, Y) - f(x, y)| < k\,|Y - y|$, $(x, Y) \varepsilon R$, $(x, y) \varepsilon R$, con $k < 1$,

existe un rectángulo R′: $|x| < a'$, $|y| < b$ donde la ecuación $\Phi(x, y) = y$ admite una solución $y = f(x)$ continua para $|x| < a'$, obtenida como límite de la sucesión de funciones:

$$(**) \qquad y_1(x) = \Phi(x, 0) \quad , \quad y_2(x) = \Phi[x, y_1(x)] \quad , \ldots , \quad y_n(x) = \Phi[x, y_{n-1}(x)] \quad , \ldots$$

2. Demostrar que la solución $f(x)$ del ejercicio 1 es única.

3. Utilizando los resultados y notaciones de los ejercicios 1 y 2 demostrar que si $F(x, y)$ y $F_y(x, y)$ son continuas en R, y $F(0, 0) = 0$, $F_y(0, 0) \neq 0$, la ecuación $F(x, y) = 0$ tiene en un intervalo $|x| < a'$ solución continua única $y = f(x)$ tal que $f(0) = 0$.

4. Diremos que un conjunto de puntos $(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m)$ de $\mathbf{E}_{n+m}$ forma una *rama* V de la solución del sistema de funciones implícitas definidas por [68-11], si se cumple: 1º) Es conexo (§ 64-5, y nota I, *c*); 2º) Para cada uno de sus puntos $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$ existe un entorno de $\mathbf{E}_{n+m}$ donde no ocurre que dos distintos puntos de $\mathbf{E}_{n+m}$ sean correspondientes (tengan la misma proyección) de un mismo $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{E}_n$; 3º) A cada entorno de $(b_1, \ldots, b_m)$ de $\mathbf{E}_m$ corresponde un entorno de $(a_1, \ldots, a_n)$ en $\mathbf{E}_n$ tal que cada punto del entorno de $\mathbf{E}_n$ sea la proyección en $\mathbf{E}_n$ de un punto de V en $\mathbf{E}_{n+m}$ que tenga por proyección un punto del entorno considerado en $\mathbf{E}_m$. Demostrar que en el teorema de § 68-2, si las funciones F_j tienen derivadas parciales continuas, existe una sola rama V que contiene el punto $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$, tal que está formada por puntos que cumplen las hipótesis del teorema y se prolonga hasta sus puntos frontera no pertenecientes a ella, caracterizados éstos por la anulación del jacobiano [68-12].

5. Aplíquese el ejercicio anterior a estudiar las ramas de las soluciones de: 1º) $u_1^2 - u_2^2 - x_1 = 0$, $2u_1u_2 - x_2 = 0$; 2º) $u^2 - x = 0$ (compárese con el caso anterior extendiéndola al campo complejo); 3º) $x_1^2 + x_2^2 + u^2 - 1 = 0$.

6. Si las funciones [68-11] dependen de p parámetros $c_1, \ldots, c_p$ con valores correspondientes a los puntos de un recinto C_p de $\mathbf{E}_p$ de tal modo que en el teorema de § 68-2 se verifiquen las condiciones 2ª, 4ª y 5ª de continuidad y diferenciabilidad respecto de un recinto de puntos $(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m; c_1, \ldots, c_p)$ de $\mathbf{E}_{n+m+p}$ cuya proyección sobre $\mathbf{E}_p$ contenga C_p y las condiciones 1ª y 3ª se verifiquen en $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$ de $\mathbf{E}_{n+m}$ para todo $(c_1, \ldots, c_p)$ de C_p; demostrar que para cualesquiera valores de $(c_1, \ldots, c_p)$ correspondientes a todo dominio (§ 65-4, def. 4) contenido en C_p se obtienen las funciones $u_j = f_j(x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_p)$ del teorema de § 68-2 que además resultan continuas y diferenciables respecto de las $n + p$ variables $x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_p$.

7. Demostrar que no son independientes las funciones $u = x/y$, $v = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ y hallar la relación que las liga.

8. Demostrar que no son independientes las funciones $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$, $w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ y hallar la relación que las liga.

9. Demostrar que si todas las normales de una superficie $z = z(x, y)$ cortan al eje z, la superficie es de revolución.

10. Demuéstrense los teoremas enunciados en § 68-3, notas 1 y 2.

11. Demostrar la dependencia lineal de las funciones $x \cos^2 x$, $x \cos^4 x$, $x \cos 4x$, x.

12. Si las funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ son continuas en $[a, b]$, y se pone $I_{hk} = \int_a^b u_h(x) u_k(x)\, dx$, es condición necesaria y suficiente para su dependencia lineal la anulación de su *determinante de* Gram (cfr. § 60-5, nota 1, y Cap. XVII, nota II, *a*):

$$G(u_1, \ldots, u_n) = \det\{I_{hk}\} \quad , \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

13. Demostrar que si a_{ik} son constantes, el wronskiano de las funciones $a_{i1}u_1 + \ldots + a_{in}u_n$, $(i = 1, \ldots, n)$ es: $\det\{a_{ik}\} . W(u_1, \ldots, u_n)$.

NOTAS AL CAPÍTULO XVIII

I. Espacios topológicos y métricos. — *a*) La Matemática y la Física modernas tratan siempre de obtener con la máxima generalidad posible los resultados buscados o las propiedades de los entes lógicos que estudian, haciendo para ello un análisis profundo tendiente a delimitar los conceptos primitivos y proposiciones fundamentales que forman los sistemas de axiomas y postulados sobre los que basan sus diversas teorías (§ 1-7).

Analizar hasta qué punto las propiedades que atañen a los conceptos dependen de las condiciones que definen a éstos y por tanto cuáles son las condiciones de que podemos hacer *abstracción* en el proceso de generalización de un concepto dado, servirá no sólo para dar valor más extenso a dichas propiedades, sino también hará comprender mejor el fondo último que entraña el concepto objeto del análisis.

Los métodos matemáticos utilizados hasta hace unas cuantas décadas por los físicos se referían siempre al espacio euclídeo de tres dimensiones; Minkowski primero, Einstein después, les condujeron a utilizar los espacios riemannianos referidos a la noción de *espacio-tiempo* o *punto de universo*, utilizando cuatro o cinco dimensiones. Pero roto ya el hielo, los físicos han advertido que la teoría de los espacios abstractos les permite razonar sobre elementos de naturaleza no especificada, pues lo que importa son las propiedades expresadas formalmente, precisamente a la manera empleada en la teorías abstractas, para poder así prescindir en el razonamiento de la misma naturaleza incognoscible de los elementos estudiados.

Con ello se consigue también prescindir del apriorismo científico, incluso en la noción de *espacio físico*, cuya naturaleza se considera hoy condicionada por la experiencia. Actualmente la Geometría euclídea no tiene el valor absoluto que Kant le asignaba[1]: "Las proposiciones geométricas son apodícticas, esto es, todas ellas se presentan con la certeza interna de su necesidad". Muy al contrario se está con H. von Helmholz, quien al hablar (1870) sobre el origen y la significación de los axiomas geométricos[2] ya afirmaba que la intuición del espacio euclídeo proviene de la noción de cuerpo sólido, abstracción física, y de la que se pasa naturalmente a la Geometría euclídea. Riemann también decía[3]: "Muchos sistemas diferentes de hechos pueden presentarse como suficientes para la definición de las propiedades métricas del espacio; así, las más importantes son aquellas que eligió Euclides. Estos hechos son como todos los demás no necesarios, pero están de acuerdo con la experiencia...". Con esa misma experiencia que hoy Einstein trata de mostrarnos como más acorde, no con la Geometría euclídea, sino con esa otra que el mismo Riemann en intuición genial, creó el siglo pasado.

La generalización del concepto de espacio euclídeo de tres dimensiones aplicada a conjuntos de entes que tengan propiedades parecidas a las esenciales de éste, se hace de manera que pueda ser objeto de un *Análisis general*, en el que se definan conceptos análogos a los conocidos de la teoría elemental de funciones y que conserven las propiedades que más interesen, según la aplicación que de ellos quiera hacerse. Así se ha visto que el espacio abstracto más general que pueda dar lugar a dicho estudio es un sistema en el que se determine la noción de "proximidad" respecto de los entes que lo formen.

A un conjunto de elementos de una misma naturaleza desconocida, o voluntariamente ignorada, se le llama, según Fréchet, *clase abstracta*, y las condiciones que en forma de axiomas se imponen a dichos elemen-

---

1 *Crítica de la razón pura* (Parte 1ª, Libro I, Cap. I, § 3).

2 *Vorträge und Reden* (T. 2, 4ª ed., Braunschweig, 1896).

3 *Abhandl. d. Kön. Gesellsch. d. Wissensch. Göttingen*, vol. 13 (1867).

tos y entre los que figuran como fundamentales los que introducen la *proximidad*, determinan diversas categorías de *espacios abstractos*.

Se obtendrán "ejemplos", "interpretaciones concretas" (§ 1-8), "aplicaciones" o "casos particulares" de un determinado espacio abstracto, si se toma como "punto" de dicho espacio el elemento de una clase concreta de entes matemáticos (funciones, vectores, elementos o figuras geométricas, series, grupos de números, etc.) siempre y cuando se puedan *definir* los conceptos y *demostrar* las proposiciones que introducen aquellos axiomas referidos a la clase concreta de entes matemáticos tomados como "puntos" (cfr. § 1-8).

b) La noción de proximidad puede introducirse previamente a la de distancia y aun sin necesidad de que ésta exista; así puede efectuarse mediante la noción de entorno (abierto o cerrado).

Un *espacio topológico* E (HAUSDORFF) consiste en un conjunto I de elementos llamados *puntos* de E y una familia Ω de subconjuntos G de I que llamaremos *conjuntos abiertos* de E, tales que cumplan las siguientes condiciones (tomadas como *axiomas* en el concepto *abstracto*):

H_1) El conjunto vacío Θ y el total I pertenecen a Ω, es decir $\Theta\varepsilon\Omega$, $I\varepsilon\Omega$.

H_2) Si $G_1\varepsilon\Omega$, $G_2\varepsilon\Omega$ también pertenece a Ω su intersección $G_1 \cap G_2\varepsilon\Omega$.

H_3) La unión de una familia cualquiera de conjuntos G pertenecientes a Ω es un conjunto perteneciente a Ω.

H_4) Si los puntos $a\varepsilon I$, $b\varepsilon I$ son distintos, $a \neq b$, existen simpre conjuntos $G_a\varepsilon\Omega$, $G_b\varepsilon\Omega$ tales que $a\varepsilon G_a$, $b\varepsilon G_b$ y que además sean disjuntos, es decir $G_a \cap G_b = \Theta$.

El establecimiento de la familia Ω efectúa la *topologización* del conjunto I para convertirlo en un *espacio* E.

Todo conjunto abierto G que contenga el punto a *se llama* entorno de a. Una *base* es una familia Ω_B de conjuntos abiertos tal que para todo $a\varepsilon I$ y cualquier entorno G de a, existe un conjunto $B\varepsilon\Omega_B$ tal que $a\varepsilon B(\leqq)G$.

Si se toman como conjuntos abiertos los que se han definido métricamente en el espacio euclídeo E_n (§ 64-4, nota 2), se demuestra fácilmente que éste es un caso particular de espacio topológico, es decir, se cumplen entonces como teoremas los axiomas de HAUSDORFF.

Obsérvese que (H_2) no implica que cualquier familia (infinita) de conjuntos G tenga una intersección perteneciente a Ω. Por ejemplo, para la interpretación concreta constituída por la recta euclídea, la familia de intervalos $\{(-1/n, 1/n)\}$ con n número natural cualquiera, tiene como intersección el origen, que no es un conjunto abierto.

En el espacio topológico abstracto E, se define el *conjunto cerrado* $F(\leqq)I$ como el complemento (Cap. I, nota I) de uno abierto, es decir, por definición es F cerrado si $CF = I - F\varepsilon\Omega$. Los conjuntos vacíos Θ y total I son a la vez abiertos y cerrados (H_1).

Por las leyes dualítivas del álgebra de conjuntos (Cap. I, nota I), la intersección de una familia cualquiera de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado (cfr. H_3), mientras que la unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado (cfr. H_2). La topologización del espacio puede hacerse dualmente mediante familias de conjuntos cerrados en lugar de abiertos. Obsérvese que puede ocurrir que la unión de una familia infinita de conjuntos cerrados no sea cerrada; por ejemplo, en la recta euclídea, la unión de la familia de intervalos cerrados $\{[1/n; 1]\}$, con n número natural cualquiera, es el intervalo semicerrado $(0; 1]$.

Dado un subconjunto cualquiera $X(\leqq)I$, por definición se llama *clausura* de X, y se designa por $\overline{X}$, a la intersección de todos los conjuntos cerrados F que contienen X. Por tanto, siempre $X(\leqq)\overline{X}$. La *frontera* de X, designada por fr X, se define por la fórmula $\mathrm{fr}\,X =$

$= \overline{X} \cap \overline{I - X}$. Es fácil demostrar que $X \cup \mathrm{fr}\,X = \overline{X}$, basándose en las definiciones anteriores, pues $X \cup (\overline{X} \cap \overline{I - X}) = \overline{X} \cap (X \cup \overline{I - X}) (\leqq) \overline{X}$; $X \cup (\overline{X} \cap \overline{I - X}) (\geqq) \overline{X} \cup [\overline{X} \cap (I - X)] = \overline{X} \cap [X \cup (I - X)] = \overline{X} \cap I = \overline{X}$, (cfr. Capítulo I, nota I).

El *interior* X° de X se define por el conjunto de puntos pertenecientes a X que no pertenecen a su frontera, es decir:

$$X^\circ = X - (X \cap \mathrm{fr}\,X).$$

Acaso sería más simétrico definir el interior como el máximo abierto contenido en X, es decir $X^\circ = \bigcup_{G(\leqq)X} G$. Ambas definiciones son equivalentes, porque si $G(\leqq)X \rightarrow I - G(\geqq)I - X$ y por ser cerrado $I - G$, será $I - G(\geqq)\overline{I - X}(\geqq)\mathrm{fr}\,X$ y por tanto $G(\leqq)X - (X \cap \mathrm{fr}\,X)$. Por otra parte, $X - (X \cap \mathrm{fr}\,X)$ es abierto, pues su complemento $(I - X) \cup \mathrm{fr}\,X = [(I - X) \cup \overline{X}] \cap \overline{I - X} = \overline{I - X}$ es cerrado. (Es $(I - X) \cup \overline{X} (\geqq) (\geqq) (I - X) \cup X = I$).

Para todo conjunto abierto G es $G^\circ = G$, pues $I - G = \overline{I - G}$ por ser $I - G$ cerrado, de donde

$$G \cap \mathrm{fr}\,G = G \cap (\overline{G} \cap \overline{I - G}) = G \cap [\overline{G} \cap (I - G)] = G \cap (I - G) = \Theta.$$

Dos conjuntos X é Y se llaman *no rampantes*, si ningún punto de uno de ellos pertenece al interior del otro, es decir, si $(X \cap Y^\circ) \cup (X^\circ \cap Y) = \Theta$, aun cuando puedan tener comunes puntos frontera.

c) Si un conjunto X de un espacio topológico abstracto E es la unión de dos subconjuntos A y B no vacíos tales que ningún punto de uno de éstos pertenece a la clausura del otro, es decir, $X = A \cup B$, $A \neq \Theta$, $B \neq \Theta$, $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \Theta$, entonces diremos que A y B constituyen una *separación* de X, escribiendo $X = A \mid B$. Un conjunto X de E se llama por definición *desconexo* si existe alguna separación $X = A \mid B$. En caso contrario, se llama *conexo*. Por ejemplo en el plano euclídeo, dados dos círculos tangentes exteriormente, si consideramos sus interiores, tendremos un conjunto desconexo, pero basta agregar el punto de contacto para tener un conjunto conexo.

Se llama *componente* de X a un conjunto $A(\leqq)X$ tal que A sea conexo sin ser parte (§ 1-1) de otro conjunto conexo incluído en X. Si A y B son ambos componentes distintos de X, debe ser $A \cap B = \Theta$.

El conjunto X se llama *totalmente desconexo*, si cada componente de X se reduce a un punto. Por lo tanto, los conjuntos formados por un solo punto, y sólo ellos, son a la vez conexos y totalmente desconexos.

Un espacio topológico E se llama *localmente conexo*, si para cada conjunto abierto G de E, toda componente de G es un conjunto abierto.

Se llama *recinto* a un conjunto abierto y conexo, según ya vimos en § 64-5. Como allí, a la clausura de un recinto se le llama *recinto cerrado* o, más brevemente, *dominio*. En el plano euclídeo, si la frontera de un recinto acotado tiene una sola componente, el recinto es *simplemente conexo*. En el *plano euclídeo*, el *orden de conexión* es igual al *número de componentes de la frontera* del recinto, si éste es acotado (cfr. § 64, ejercicios 12 a 15).

d) Si a cada par de elementos a y b distintos o coincidentes de un espacio topológico se le puede asignar un número real finito $\varrho(a, b)$ que cumpla los axiomas de la distancia:

D_1) La *distancia* $\varrho(a, b)$ es un número real finito correspondiente a cada par de puntos del espacio, que es nula cuando y sólo cuando ambos puntos coinciden $a = b$.

D_2) $\varrho(b, c) \leqslant \varrho(a, b) + \varrho(a, c)$ para puntos a, b, c cualesquiera del espacio (condición triangular).

se dice que el espacio es *metrizable* y cada distancia así introducida define un correspondiente *espacio métrico*. Éste queda ya en principio estructurado por la noción de distancia que se considere, pues mediante ella puede definirse el entorno y de ahí llegar al concepto de punto interior, conjunto abierto, cerrado, clausura, etc., como se ha hecho en el § 64-4 siguiendo la teoría clásica.

De los postulados D_1) y D_2) se deducen fácilmente los dados en § 64-4. En efecto, para $\mathbf{c}=\mathbf{b}$ en D_2), teniendo en cuenta D_1), se obtiene $0 \leqq 2\varrho(\mathbf{a},\mathbf{b})$, es decir, la distancia es un número no-negativo. Por otra parte, para $\mathbf{c}=\mathbf{a}$ en D_2), teniendo en cuenta D_1), se obtiene $\varrho(\mathbf{b},\mathbf{a}) \leqslant \varrho(\mathbf{a},\mathbf{b})$, válida para todo par, y por tanto, aplicada al par **b**, **a**, da $\varrho(\mathbf{a},\mathbf{b}) \leqslant \varrho(\mathbf{b},\mathbf{a})$, de donde con la anterior se obtiene la condición de simetría $\varrho(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \varrho(\mathbf{b},\mathbf{a})$.

El espacio euclídeo (§ 64-4) es un espacio métrico de distancia dada por [64-4]. En efecto, es inmediato ver que se cumple el axioma D_1) de la distancia. Se cumple también la condición triangular D_2), porque poniendo $u_i = a_i - b_i$, $v_i = c_i - a_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, nunca es negativo el trinomio de segundo grado en λ:

$$0 \leqslant \Sigma\,(\lambda u_i + v_i)^2 = \lambda^2\Sigma u_i^2 + 2\lambda\Sigma u_i v_i + \Sigma v_i^2 \quad ,$$

de donde su discriminante debe ser

$$(\Sigma u_i v_i)^2 - (\Sigma u_i^2)(\Sigma v_i^2) \leqslant 0 \quad ,$$

llamada *desigualdad de* CAUCHY-SCHWARZ (Cap. XVII, nota II, *b*).

Por consiguiente,

$$\Sigma(u_i + v_i)^2 \leqslant \Sigma u_i^2 + \Sigma v_i^2 + 2\sqrt{(\Sigma u_i^2)(\Sigma v_i^2)} = (\sqrt{\Sigma u_i^2} + \sqrt{\Sigma v_i^2})^2 \quad ,$$

y de aquí resulta

$$\varrho(\mathbf{b},\mathbf{c}) = \sqrt{\Sigma(u_i+v_i)^2} \leqslant \sqrt{\Sigma u_i^2} + \sqrt{\Sigma v_i^2} = \varrho(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \varrho(\mathbf{a},\mathbf{c}) \quad ,$$

como queríamos demostrar. Obsérvese que además se da en $\leqslant$ el signo $=$, cuando y sólo cuando existe algún valor de λ que haga

$$\Sigma\,(\lambda u_i + v_i)^2 = 0 \quad ,$$

es decir, sea $c_i = (1+\lambda)a_i - \lambda b_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, equivalente a que los puntos **a**, **b**, **c** estén en línea recta (§ 64-4).

En el espacio cuyos puntos son sucesiones $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de números reales o complejos tales que las coordenadas x_i forman una serie absolutamente convergente, puede definirse la distancia mediante

$$\varrho(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{\infty} |\,a_i - b_i\,| \quad ,$$

por cumplir los axiomas D_1) y D_2). Sin embargo aquí, el origen de coordenadas $\mathbf{0} = (0,0,0,\ldots)$ y los puntos unidad $\mathbf{u}_1 = (1,0,0,\ldots)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,\ldots)$ no están en línea recta [64-5], y sin embargo $\varrho(\mathbf{0},\mathbf{u}_1) + \varrho(\mathbf{0},\mathbf{u}_2) = \varrho(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$.

Esto no ocurre en el importante espacio concreto de HILBERT, cuyos puntos son sucesiones $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de números reales o complejos tales que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\,x_i\,|^2$$

converja y donde la distancia se define por $\varrho(\mathbf{a},\mathbf{b}) = +\sqrt{\Sigma\,|\,a_i - b_i\,|^2}$, por ser ello natural generalización a infinitas dimensiones del espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$ (cfr. § 96).

c) Dados dos conjuntos X y X*, se establece una *transformación*

unívoca, aplicación o representación $\mathbf{x}^* = \mathrm{T}(\mathbf{x})$ de X en X*, si a cada punto $\mathbf{x}\varepsilon\mathrm{X}$ se le hace corresponder un solo punto *imagen* $\mathrm{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*\varepsilon\mathrm{X}^*$. Puede T hacer corresponder a puntos distintos $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ de X una misma imagen en X* y no todo punto de X* debe ser necesariamente imagen de algún punto $\mathbf{x}\varepsilon\mathrm{X}$. Respecto de un conjunto $\mathrm{A}(\leqq)\mathrm{X}$, designa T(A) la imagen de A (es decir, el conjunto de las imágenes de los puntos de A) obtenida en X* por la transformación T. Respecto de la transformación T, se llama *conjunto inverso* $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}^*)$ de $\mathrm{A}^*(\leqq)\mathrm{X}^*$, al conjunto de puntos $\mathbf{x}\varepsilon\mathrm{X}$ para los que $\mathrm{T}(\mathbf{x})\varepsilon\mathrm{A}^*$. Si A* tiene un solo punto $\mathbf{x}^*$, entonces $\mathrm{T}^{-1}(\mathbf{x}^*)$ es el conjunto inverso o *preimagen* del punto $\mathbf{x}^*$.

Dados dos espacios topológicos $\mathrm{E}(\mathrm{I},\Omega)$ y $\mathrm{E}^*(\mathrm{I}^*,\Omega^*)$ y una transformación unívoca $\mathrm{T}(\mathrm{I})(\leqq)\mathrm{I}^*$, se llama T *continua* en el punto $\mathbf{a}\varepsilon\mathrm{I}$, si para cada conjunto abierto $\mathrm{G}^*\varepsilon\Omega^*$ que contenga el punto $\mathrm{T}(\mathbf{a})$, existe algún conjunto abierto $\mathrm{G}\varepsilon\Omega$ tal que $\mathbf{a}\varepsilon\mathrm{G}$ y $\mathrm{T}(\mathrm{G})(\leqq)\mathrm{G}^*$ (cfr. § 24-6).

Si T es continua en todo punto de E, entonces T se llama *continua sobre* E. Una transformación $\mathrm{T}(\mathrm{I}) = \mathrm{I}^*$ se llama *topológica* o se dice también que es un *homeomorfismo* (POINCARÉ), si T es *biunívoca* (§ 2-8) y por tanto $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{I}^*) = \mathrm{I}$ es también biunívoca, y además T es *continua sobre* E y T^{-1} es *continua sobre* E*. Si respecto de dos espacios topológicos puede establecerse algún homeomorfismo $\mathrm{T}(\mathrm{I}) = \mathrm{I}^*$, entonces y sólo entonces se dice que ambos espacios son *homeomorfos*. El homeomorfismo es una relación de *equivalencia* (§ 1-5), es decir, es una relación binaria (entre espacios topológicos) que es reflexiva, simétrica y transitiva.

El *intervalo cerrado lineal* I formado por los números reales x tales que $a \leqq x \leqq b$ con la distancia $\varrho(x_1,x_2) = |\,x_1 - x_2\,|$, es un espacio topológico (métrico). Un espacio topológico cualquiera homeomorfo con el intervalo cerrado lineal I se llama *arco simple de* JORDAN (definición que generaliza la incluída en § 29-2). El arco simple $\gamma = \mathrm{T}(\mathrm{I})$ tiene por *extremos* los puntos $\mathrm{T}(a)$ y $\mathrm{T}(b)$, independientes del homeomorfismo T elegido para transformar I en γ, extremos que según el orden en que se tomen fijan una u otra *orientación* del arco simple γ.

II. Lema de Borel: espacios compactos. — *a*) En el espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$ subsiste el lema de BOREL enunciado con las mismas palabras empleadas para los conjuntos lineales (Cap. VI, nota III) y demostración análoga por el método de la dicotomía adecuadamente adaptado a varias dimensiones (§ 64-4, nota 3).

En los espacios topológicos abstractos de HAUSDORFF (nota I), se toma el lema de BOREL como *definición axiomática* de los espacios *compactos* (según KURATOWSKI).

Dado un conjunto $\mathrm{X}(\leqq)\mathrm{I}$ del espacio topológico E, se llama *cubrimiento abierto* de X a una familia $\{\mathrm{G}\}$ de conjuntos abiertos G de E tal que para cada punto $\mathbf{x}\varepsilon\mathrm{X}$ existe al menos un entorno $\mathrm{G}\varepsilon\{\mathrm{G}\}$ tal que $\mathbf{x}\varepsilon\mathrm{G}$. Si la familia $\{\mathrm{G}\}$ consta sólo de un número finito de G el cubrimiento abierto se llama *finito*.

El conjunto X *del espacio topológico* E *se llama compacto cuando todo cubrimiento abierto de* X *contiene un subcubrimiento finito. El espacio mismo* $\mathrm{E}(\mathrm{I},\Omega)$ *se llama compacto cuando esta condición se cumple para* $\mathrm{X} = \mathrm{I}$.

El intervalo lineal cerrado $a \leqq x \leqq b$ es un espacio topológico (métrico) compacto (Cap. VI, nota III), mientras que el intervalo lineal abierto $a < x < b$ es un espacio topológico (métrico) no compacto, ambos con la distancia $\varrho(x_1,x_2) = |\,x_1 - x_2\,|$.

El espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$ (sin puntos impropios) no es compacto. En cambio, todo conjunto cerrado y acotado del espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$ es compacto (lema de BOREL). Como esta propiedad es la base de las principales consecuencias referentes a los conjuntos cerrados y acotados (Cap. VI, nota III), en topología general, donde la noción de acotación no

tiene sentido, el conjunto compacto reemplaza al acotado cerrado del espacio ordinario.

Un conjunto X del espacio topológico E se llama un *continuo* cuando es compacto, conexo y tiene por lo menos dos puntos distintos. Algunos autores sustituyen la última condición por la de ser no vacío y entonces el conjunto formado por un solo punto es también un continuo.

En los espacios compactos puede simplificarse la definición de homeomorfismo (nota I); en efecto, en espacios topológicos cualesquiera, si la transformación $T(X) = X^*$ es biunívoca y continua sobre X y además X es *compacto*, entonces $X = T^{-1}(X^*)$ es también continua. Para X no compacto, la conclusión puede no subsistir, aunque X* sea compacto; por ejemplo, si consideramos que X está constituído por $x \leqq 0$ y $x = 1$, con los entornos formados por la intersección de X con los de la recta euclídea real y lo transformamos en el X* constituído por el segmento $0 \leqq y \leqq 1$, con entornos también de la recta euclídea real, mediante la transformación biunívoca y continua T dada por $y = e^x$ si $x \leqslant 0$, $y = 0$ si $x = 1$, vemos que en cambio T^{-1} no es continua (nota I).

b) Otros autores, siguiendo a FRÉCHET, en lugar de partir de la noción de entorno como hace HAUSDORFF (nota I), parten de la *relación de acumulación*, mediante la atribución a cada conjunto X de un *derivado* X' (cfr. § 64-4, nota 2) con correspondencia que satisfaga a propiedades axiomáticas que definan así implícitamente el concepto de espacio topológico. Por ejemplo, ellas son: 1º) $X' \smile Y' = (X \smile Y)'$; 2º) el derivado del conjunto formado por un solo punto es vacío; 3º) $X''(\leqq)X'$, donde X'' es el derivado de X'. Éste es el llamado por FRÉCHET espacio topológico *accesible*.

Estas propiedades son duales de las siguientes de la clausura $\overline{X}$ de un conjunto X (nota I): 1º) $\overline{X} \smile \overline{Y} = \overline{X \smile Y}$; 2º) la clausura del conjunto formado por un punto es el mismo conjunto; 3º) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, donde $\overline{X}$ es la clausura de X. Éstos son los *axiomas de clausura* que sirven a KURATOWSKI como punto de partida de la Topología.

En la escuela de FRÉCHET se define la compacidad tomando el teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS (§ 64-4, nota 3) como definición característica (o axiomática). Así, un conjunto X del espacio E se llama *compacto* (en E) si cualquier subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación (punto de E) que puede pertenecer o no a X. (Por ejemplo $X = \{1/n\}$ con *n* número natural cualquiera no es compacto en el espacio métrico $0 < x < 1$, pero sí lo es en el espacio métrico $0 \leqslant x \leqslant 1$, con distancia en ambos dada por $\varrho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$). Esta noción reemplaza a la de conjunto acotado del espacio ordinario. La correspondiente a la de conjunto acotado y cerrado es la de conjunto *compacto en sí* para el que se exige que el punto de acumulación pertenezca al mismo conjunto X. Entonces, *para los espacios métricos* se cumple el lema de BOREL, y así *en los espacios métricos* el conjunto compacto en sí de FRÉCHET equivale al compacto de KURATOWSKI. Ello no ocurre en un espacio topológico general y por ello la relación de acumulación se complica con consideraciones sobre la potencia o número cardinal (Cap. II, nota II) del conjunto acumulante. FRÉCHET dice que X es un *conjunto perfectamente compacto* (*en sí*) si para todo subconjunto infinito C de X existe un punto (de X) tal que el interior de cada uno de los entornos de este punto contenga un conjunto de puntos de C con la misma potencia que X. Y así la condición necesaria y suficiente para que X cumpla el lema de BOREL (sea compacto en el sentido de KURATOWSKI), es que sea perfectamente compacto en sí en el sentido de FRÉCHET.

III. **Bibliografía.** — 1. Las obras citadas en el volumen I sobre cálculo infinitesimal abarcan también, en general, el estudio de las funciones de varias variables. A ellas nos hemos referido en el Cap. VI, nota VI, y Cap.

IX, nota VIII. Recordamos en especial los textos de J. REY PASTOR (*Elementos de la teoría de funciones*, 3ª ed., 1953), COURANT, VALLÉE-POUSSIN, SEVERI, LEVI, VALIRON, GOURSAT, GRAVES, SAGASTUME y HOBSON.

En la 2ª edición del volumen I se han agregado además las siguientes citas:

Abarcando desde el número real hasta integrables dobles:

J. ABDELHAY: *Curso de análise matemática*, (2 vols., Univ. Brasil, Río de Janeiro; 2ª ed., 1953);

la extensa y muy difundida obra:

H. v. MANGOLDT (refundición de K. KNOPP): *Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum Selbstudium. I. Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre*; II. *Differentialrechnung, unendliche Reihen, Elemente der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie*; III. *Integralrechnung und ihre Anwendungen, Funktionentheorie, Differentialgleichungen* (Hirzel, Stuttgart; 9ª ed., 1948);

la didáctica y adaptada a programas modernos:

A. DUSCHEK: *Vorlesungen über höhere Mathematik* (vol. I, 3ª ed., 1960; vol. II, 2ª ed., 1958; vol. III, 2ª ed., 1960; Springer, Viena);

la excelente obra de tratamiento meticuloso del Análisis infinitesimal clásico, resaltando los aspectos teóricos, con cuyo propósito deja casi totalmente de lado las aplicaciones, pero con abundancia de ejercicios y ejemplos de naturaleza estrictamente matemática:

A. OSTROWSKI: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* (I. *Funktionen einer Variablen*, 2ª ed., 1960; II. *Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen*, 2ª ed., 1960; III. *Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen*, 1954; Bikhauser, Basilea);

y el completo y extenso tratado:

G. HAUPT, G. AUMANN y C. PAUC: *Differential- und Integralrechnung unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse* (W. de Gruyter. Berlín; vol. I, 2ª ed., 1948; vol. II, 2ª ed., 1950; vol. III, 1954).

2. Otro curso moderno de iniciación universitaria es:

F. TRICOMI: *Lezioni di Analisi Matematica*; *Parte 1ª* (6ª ed., 1948); *Parte 2ª* (4ª ed., 1939); *Esercizi e Complementi* (1949; CEDAM, Padua).

Obra que contiene mucho material moderno en forma muy condensada y casi telegráfica, con notaciones no usuales, es:

G. AUMANN: *Reelle Funktionen* (Springer, Berlín, 1954).

Obra original por su innovación conceptual al efectuar la distinción entre magnitud variable (función real definida sobre un conjunto arbitrario) y función de variable de WEIERSTRASS (función real definida sobre el conjunto de los números reales), escrita como curso de iniciación universitaria, es:

K. MENGER: *Calculus, a modern approach* (2ª ed., Illinois Institute of Technology; Chicago, 1953).

Superando los cursos intuitivos, pero prescindiendo demasiado de toda motivación de ese tipo, se logra, mediante la sistemática introducción de la continuidad y diferenciabilidad uniformes, un tratamiento riguroso y no difícil para una amplia clase de funciones, en la obra:

R. L. GOODSTEIN: *A text-book of Mathematical Analysis. The uniform calculus and its applications* (Clarendon Press, Oxford, 1948).

Los cursos comunes que se siguen en Norteamérica para la graduación suelen caracterizarse por su superficialidad, con lo que no tratan de abrir horizontes que eleven a los mejores alumnos de la común mediocridad, y no intentan, como los europeos o los mismos norteamericanos dirigidos a los postgraduados, de mirar más a la selección que al número y aspirar más a la elevada formación que a una adocenada instrucción. Entre los más correctos, para la iniciación universitaria y llegando hasta la derivación parcial e integrales múltiples, pueden citarse:

G. B. THOMAS: *Calculus and analytic geometry* (2ª ed., Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953; con edición reducida a *Calculus*, 1953);

J. F. RANDOLPH y M. KAC: *Analytic geometry and calculus* (Macmillan, 1946).

A éstos siguen los cursos de "cálculo avanzado" que comprenden derivación parcial, análisis vectorial, geometría diferencial, integrales múltiples y curvilíneas, trascendentes eulerianas, series de FOURIER y temas suplementarios como cálculo de variaciones o transformación de LAPLACE. Un texto que se distingue por su rigor completamente satisfactorio y la extrema precisión de enunciado y demostración de los teoremas es:

D. V. WIDDER: *Advanced Calculus*, (Prentice-Hall, Nueva York, 1947).

Otros muy reputados son:

W. KAPLAN: *Advanced Calculus*, (Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1952);

y los dos siguientes con numerosos ejercicios e indicaciones para su resolución, de los cuales el segundo está orientado hacia las técnicas de cálculo de interés en las aplicaciones, dejando de lado demostraciones y cuestiones de fundamentación tratadas en el primero, al cual hay frecuentes referencias:

PH. FRANKLIN: *A treatise on advanced calculus*, (Wiley, Nueva York, 1940);

PH. FRANKLIN: *Methods of advanced calculus* (McGraw-Hill, Nueva York, 1944).

3. Sobre teoría de conjuntos y espacios abstractos están las obras de HAUSDORFF, FRAENKEL y HAHN citadas en Cap. IX, nota VIII. Exposición muy completa y original de topología conjuntista contiene el monumental tratado de BOURBAKI (citado en Cap. I, nota IV, 9).

Es clásico el texto crítico como repertorio de resultados obtenidos con abundante bibliografía hasta la fecha de su publicación, ya lejana para el tema tratado:

M. FRÉCHET: *Les espaces abstraits* (Gauthier-Villars, París, 1928).

La obra más importante sobre topología conjuntista, que cubre un material inmenso en orden lógico estricto, con bibliografía abundante, excelente para referencia y también como texto (no apropiado para principiantes) es:

C. KURATOWSKI: *Topologie*; I. *Espaces métrisables, espaces complets* (2ª ed., 1948); II. *Espaces compacts, espaces connexes, plan euclidien* (2ª ed., 1952; Monografje Matematyczne, nos. 20 y 21, Varsovia).

Obra más incompleta es la de

W. SIERPINSKI: *General topology*, (Univ. Toronto, 1952).

Del mismo autor, trata de topología como capítulo de la teoría general de conjuntos una parte del libro:

W. SIERPINSKI: *Algèbre des ensembles*, (Monografje Matematyczne nº 23, Varsovia, 1951).

Exposición muy general y abstracta, no adecuada para principiantes, es:

G. NÖBELING: *Grundlagen der analytischen Topologie* (Springer, Berlín, 1954).

Es la primera parte de un excelente tratado autocontenido de carácter elevado y extremadamente general sobre espacios vectoriales topológicos, y contiene importantes resultados nuevos en un estudio muy detallado de los cuerpos conmutativos valuados, la obra:

L. NACHBIN: *Espaços vetoriais topologicos*. I. (Notas de Matem., nº 4, Boffoni, Río de Janeiro, 1948).

A espacios lineales se dedica el libro V: *Espaces vectoriels topologiques*, de la 1ª parte de la obra de BOURBAKI (citada en Cap. I, nota IV, 9) del que se han publicado los dos primeros capítulos (Act. Scient. et Ind., nº 1189; Hermann, París, 1953); sobre el mismo tema es clásica la célebre obra de

S. BANACH: *Théorie des opérations linéaires* (Monografje Matematyczne, nº 1, Varsovia, 1952; Chelsea, Nueva York, 1955).

Una lúcida y concisa exposición, apropiada para lectores con pocos conocimientos matemáticos, conteniendo cuestiones sobre conjuntos, topología, probabilidad y medida referidas a la recta real es

E. BOREL: *Éléments de la théorie des ensembles*, (Albin Michel, París, 1949).

De un tipo aún más elemental son los libritos de FAVARD y VERRIEST (citados en Cap. XVII, nota V, 7).

Orientada a dar un fundamento general al "análisis moderno", similar en sus propósitos a los dos primeros capítulos del libro III (*Topologie générale*) de la obra de BOURBAKI (citada en Cap. I, nota IV, 9) es la obra de orientación moderna y tratamiento refinado, con valiosa colección de ejercicios:

J. L. KELLEY: *General topology* (Van Nostrand, Toronto, 1955); trad. al castellano: *Topología general* (Eudeba, Bs. As., 1962).

4. Una obra completa, dedicada tanto a la topología conjuntista como a la combinatoria es

P. ALEXANDROFF y H. HOPF: *Topologie*. (Springer, Berlín, 1935; Edwards, Ann Arbor, 1945).

La topología combinatoria está también muy bien tratada en el libro de estilo claro y detallado:

H. SEIFERT y W. THRELFALL: *Lehrbuch der Topologie* (Teubner, Leipzig, 1934; Chelsea, Nueva York, 1947), traducción castellana: *Lecciones de topología* (Instituto Jorge Juan, Madrid, 1951).

Más concisos y abstractos son los siguientes, de los cuales el segundo complementa al primero:

S. LEFSCHETZ: *Algebraic topology*, (American Math. Soc., Nueva York, 1942);

S. LEFSCHETZ: *Topics in topology*, (Annals of Mathematics Studies, nº 10; Princeton Univ. Press, 1942).

Del mismo autor existe el didáctico texto, que con un mínimo de medios auxiliares resuelve los problemas y obtiene los teoremas que son típicos e importantes en la topología y sus aplicaciones:

S. LEFSCHETZ: *Introduction to topology*, (Princeton Univ. Press, 1949).

Clara y elemental introducción es la de

L. S. PONTRJAGIN: *Foundations of combinatorial topology*, (Graylock, Rochester, N. Y., 1952).

Algo más extensa es:

K. REIDEMEISTER: *Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe*, (Akademische Verlag, Leipzig; 2ª ed., 1953).

Conteniendo una exposición completa de la nueva teoría axiomática de la homología está la importante obra de

S. EILENBERG y N. STEENROD: *Foundations of algebraic topology*, (Princeton Univ. Press, 1952).

Entre las obras de entretenimiento y divulgación que tratan temas de topología, tan adecuados a este objeto, están:

W. W. ROUSE BALL: *Mathematical recreations and essays. Revised by* H. S. M. COXETER, (Macmillan, Nueva York, 1947);

D. HILBERT y S. COHN-VOSSEN: *Anschauliche Geometrie*, (Springer, Berlín, 1932); traducción inglesa: *Geometry and the imagination*, (Chelsea, Nueva York, 1952).

Es también curioso y fascinante el libro siguiente que da instrucciones para construir modelos en papel, cartón, madera flexible, plástico, alambre o metal:

H. M. CUNDY y A. P. ROLLETT: *Mathematical models*, (Clarendon Press, Oxford, 1952);

basado sobre todo en el completo tratado de

H. S. M. COXETER: *Regular polytopes* (Methuen, Londres, 1948).

CAPÍTULO XIX

FÓRMULA DE TAYLOR EN VARIAS VARIABLES

§ 69. DERIVACIÓN SUCESIVA Y FÓRMULA DE TAYLOR

1. Derivación sucesiva. — Si $f(x, y, \ldots, w)$ admite derivadas parciales en todos los puntos de un recinto y éstas admiten a su vez derivadas parciales, las nuevas funciones así definidas se llaman *derivadas segundas* de f; las derivadas de éstas se llaman *derivadas terceras* de f, etc. Si es n el número de variables, hay n derivadas primeras, n^2 segundas, n^3 terceras, etc., números que se reducen bajo ciertas condiciones, por ser iguales varias de ellas, como pronto veremos.

Refiriéndonos especialmente al caso de dos variables, las derivadas segundas de $u = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) se representan por esta notación:

$$f_{xx}(x_0, y_0) \quad , \quad f_{xy}(x_0, y_0) \quad , \quad f_{yx}(x_0, y_0) \quad , \quad f_{yy}(x_0, y_0) \quad ,$$

y al variar el punto, las *funciones derivadas segundas* (que suelen llamarse brevemente *derivadas segundas*, sin peligro de confusión con los valores numéricos en el punto (x, y)), se designan así:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} \quad ,$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy} \quad ,$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{yx} \quad ,$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} \quad ,$$

donde se ha empleado la notación de JACOBI para derivadas primeras y segundas en los miembros intermedios. En lugar de f_{xx} ó u_{xx} se emplean también f_{x^2}, u_{x^2}.

Si las variables independientes son x, y, z, las derivadas segundas serán:

$$u_{xx} \quad , \quad u_{xy} \quad , \quad u_{xz} \quad , \quad u_{yx} \quad , \quad u_{yy} \quad , \quad u_{yz} \quad , \quad \ldots$$

y las terceras:

$$u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

$$u_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y},$$

$$u_{xyz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z},$$

etc.

Para el caso de más variables convendrá designar éstas por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y emplear las notaciones:

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, \ldots, f_{nn} \quad \text{o bien} \quad u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{nn},$$
$$f_{111}, f_{112}, f_{113}, \ldots, f_{nnn} \quad \text{o bien} \quad u_{111}, u_{112}, u_{113}, \ldots, u_{nnn}.$$

EJEMPLO. Calculemos las derivadas parciales segundas de la función

$$f(x,y) = \frac{x^2}{6} + \frac{xy^3}{18}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{6} + \frac{y^3}{18}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{y^2}{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy^2}{6}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{xy}{3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{y^2}{6}.$$

El ejemplo anterior nos muestra que para ese caso particular es $f_{xy} = f_{yx}$; esto, como veremos (§ 69-2), no ocurre siempre.

2. Conmutabilidad de la derivación sucesiva. — Para una función poco sencilla, tal como

$$u = 6x^3y^2 - 7x^2y + 5xy^3,$$

sus derivadas primeras

$$u_x = 18x^2y^2 - 14xy + 5y^3, \quad u_y = 12x^3y - 7x^2 + 15xy^2$$

son a primera vista lo bastante distintas para impedirnos prever la igualdad de las derivadas segundas cruzadas:

$$u_{xy} = 36x^2y - 14x + 15y^2 = u_{yx}.$$

Sin embargo, ésta se hace plausible si consideramos las diferencias segundas. De igual modo que la derivada segunda en funciones de una variable es caso particular del límite de un cociente incremental (Cap. XII, nota I, *d*), veamos la relación existente entre las derivadas segundas de $f(x, y)$ y las diferencias

[69-1]
$$\begin{cases} \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0), \\ \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_{xy} f = \Delta_y(\Delta_x f) = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] - \\ \qquad - [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)], \\ \Delta_{yx} f = \Delta_x(\Delta_y f) = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] - \\ \qquad - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]. \end{cases}$$

Salta a la vista la igualdad

[69-2] $$\Delta_{xy} f(x_0, y_0) = \Delta_{yx} f(x_0, y_0),$$

y el significado geométrico de ambos miembros es éste: suma de valores en dos vértices opuestos del rectángulo de incrementos menos suma en los otros dos.

Aplicando el teorema del valor medio (§ 35-1) resultan estas expresiones:

[69-3]
$$\begin{cases} \Delta_y(\Delta_x f) = k[f_y(x_0 + h, y_0 + \theta_2 k) - f_y(x_0, y_0 + \theta_2 k)], \\ \Delta_x(\Delta_y f) = h[f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)], \end{cases}$$
$$0 < \theta_i < 1, \quad (i = 1, 2),$$

suponiendo solamente la existencia de *derivadas primeras*, pero no sólo en el punto (x_0, y_0), sino también en un entorno U de él o más estrictamente en el respectivo segmento paralelo a los ejes coordenados que pasan por (x_0, y_0); según sean las nuevas hipótesis que introduzcamos, resultan importantes teoremas.

TEOR. 1 (LLORENTE*). HIP. α_1) *Existen números positivos* K *y* H *tales que para* $|k| < K$ *y* $|h| < H$ *existen* $f_x(x_0, y_0 + k)$ *y* $f_y(x_0 + h, y_0)$;

β_1) *Si es* $\Delta^2 f$ *el valor común de* [69-2], *existe*

[69-4] $$\lim_{(h,k) \to 0} \frac{\Delta^2 f}{hk} = \lambda;$$

TESIS: *Existen y son iguales*

[69-5] $$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) = \lambda.$$

En efecto, recordemos que cuando existe límite doble y existe el límite interior del sucesivo, entonces existe el límite sucesivo exterior y coincide con el límite doble (§ 65-2, nota 1). Apliquémoslo a $\lim_{(h,k) \to 0} \frac{\Delta^2 f}{hk} =$

$= \lim_{k \to 0} \frac{1}{k}\left[\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^2 f}{h}\right]$, pues por α_1) existe el límite interior:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^2 f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_y(\Delta_x f)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} - \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}\right] =$$

$= f_x(x_0, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)$, de donde existe:

$$= f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(x_0, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{1}{k}\left[\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^2 f}{h}\right] = \lambda.$$

Del mismo modo, aplicando la última [69-1], de α_1) y § 65-2, nota 1, obtenemos que existe

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\lim_{k \to 0} \frac{\Delta_x(\Delta_y f)}{k}\right] = \lambda,$$

y por tanto queda demostrada la tesis [69-5].

---

* F. LLORENTE GONZÁLEZ-GALLARZA: *Euclides* XV, pp. 259-264 (Madrid, 1955).

TEOR. 8 (SCHWARZ). HIP. α) *Existen* f_x, f_y *en un entorno* U *de* (x_0, y_0);

β_2) *Existe* f_{xy} *en el entorno* U *y es continua en* (x_0, y_0);

TESIS: *Existe en este punto* f_{yx} *y se verifica la igualdad* [69-5].

En efecto, por la existencia de f_x en U, se cumple la última [69-3] y por existir f_{xy} en U, podemos volver a aplicar el teorema del valor medio, dando

[69-6] $$\Delta^2 f = \Delta_x (\Delta_y f) = hk\, f_{xy}(x_0 + \Theta_1 h,\ y_0 + \Theta k),$$

Entonces, de la continuidad (β_2) de f_{xy} en (x_0, y_0) resulta se cumple la hipótesis del teorema 1 para $\lambda = f_{xy}(x_0, y_0)$, de donde la tesis [69-5].

Como corolario inmediato resulta este teorema, que es suficiente en las aplicaciones del cálculo:

TEOR. 3 (BONNET). HIP. α) *Existen* f_x, f_y *en un entorno* U *de* (x_0, y_0);

β_3) *Existen en* U *las derivadas* f_{xy}, f_{yx} *y son continuas en el punto* (x_0, y_0);

TESIS:

[69-7] $$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)\ .$$

Otro teorema interesante que da también condiciones *suficientes* para la conmutabilidad de la derivación es el siguiente:

TEOR. 4. (HEFFTER - YOUNG). HIP. α) *Existen* f_x, f_y *en un entorno* U *de* (x_0, y_0);

β_4) *Estas funciones* f_x, f_y *son diferenciables en* (x_0, y_0), con lo que suponemos ya existentes f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} en dicho punto (§ 66-4).

TESIS: *Es* $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

En efecto, aplicando a cada término del paréntesis de la segunda de las [69-3] la hipótesis de diferenciabilidad (§ 66-4, DEF.):

$$f_x(x_0 + \theta_1 h,\ y_0 + k) - f_x(x_0, y_0) = \theta_1 h f_{xx}(x_0, y_0) + k f_{xy}(x_0, y_0) + \varepsilon_1 \varrho\ ,$$
$$f_x(x_0 + \theta_1 h,\ y_0) - f_x(x_0, y_0) = \theta_1 h f_{xx}(x_0, y_0) + \varepsilon_2 \varrho\ ,$$

con $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ para $\varrho \to 0$, de donde al restar:

$$\Delta_x(\Delta_y f) = hk f_{xy}(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) h\varrho.$$

Análogamente, por permutación de x por y, de la primera de las [69-3] se deduce

$$\Delta_y(\Delta_x f) = kh f_{yx}(x_0, y_0) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) k\varrho\ ,$$

con $\varepsilon_3 \to 0$, $\varepsilon_4 \to 0$ para $\varrho \to 0$.

De la igualdad [69-3] y de las dos anteriores para $h = k = \varrho/\sqrt{2}$, se obtiene:

$$\frac{\Delta_{xy} f(x_0, y_0)}{\varrho^2/2} = f_{xy}(x_0, y_0) + \sqrt{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = f_{yx}(x_0, y_0) + \sqrt{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

Haciendo en ésta $\varrho \to 0$, resulta [69-7], como queríamos demostrar.

NOTAS: 1. Obsérvese que mientras el teorema de SCHWARZ exige más por una parte (existencia de f_{xy} en un entorno y continuidad en el punto), en cambio el de HEFFTER (poco después encontrado por YOUNG), admite la existencia de las cuatro derivadas segundas en el punto y además la diferenciabilidad de las primeras.

Conviene fijarse, para evitar confusiones, en que Δ_{xy} conduce a f_{yx}, mientras Δ_{yx} da f_{xy}.

2. Las demostraciones subsisten para cualquier número de variables, puesto que en la derivación respecto de dos de ellas se conservan constantes las demás. Por tanto, una función de tres variables tiene seis derivadas segundas, diez terceras, etc. Una función de n variables que admite n^2 derivadas segundas, sólo tiene $n(n+1)/2$ distintas. En general, el número de derivadas sucesivas vendrá dado por el de combinaciones con repetición (§ 11-4, nota) que pueden formarse con las variables independientes respecto del orden de derivación respectivo. Finalmente, lo mismo que en el caso de las multiplicaciones en monomios (§ 4-2), puede alterarse arbitrariamente el orden de varias derivaciones consecutivas, siempre que las derivadas obtenidas sean continuas. Por esto, para definir una derivada basta indicar el número de veces que se deriva respecto de cada variable independiente.

EJEMPLO. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{para } x = y = 0\ , \end{cases}$$

resulta continua en $(0,0)$, pues $|f(x,y)| \leqslant |xy|$.

También es derivable hasta el segundo orden, pero en cambio, la derivación no es conmutativa en $(0,0)$, pues, sobre el eje y existe:

$$f_x(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0} y\,\frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2} = -\,y\ ;$$

sobre el eje x existe

$$f_y(x,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k \to 0} x\,\frac{x^2 - k^2}{x^2 + k^2} = +\,x.$$

De ahí resulta

$$f_{xy}(0,0) = -\,1 \neq f_{yx}(0,0) = +\,1.$$

Obsérvese que en este ejemplo no se cumple la hipótesis β_1) del teorema de SCHWARZ, porque f_{xy} no es continua en $(0,0)$, ya que $f_{xy}(x,0) = +1$ si $x \neq 0$.

Tampoco se cumple la hipótesis β_4) del teorema de HEFFTER - YOUNG porque para $x^2 + y^2 > 0$ es

$$f_x(x,y) = y\left[1 + 2y^2\,\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] \neq -\,y + \varepsilon\varrho\ ;$$

donde el último miembro representaría para $\lim\limits_{\varrho \to 0} \varepsilon = 0$ la diferencial total del primer miembro en $(0,0)$ si éste fuese diferenciable en dicho punto (§ 66-4), pues $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{xy}(0,0) = -1$, y en el origen coinciden $h = x$, $k = y$, siendo en este caso $\Delta f_x(0,0) = f_x(x,y) - f_x(0,0) = f_x(x,y)$. Si despejamos ε de los dos últimos miembros igualados, haciendo $x = y = \varrho/\sqrt{2}$, quedaría $\varepsilon = \sqrt{2}$ que no tiende a 0. Por tanto, $f_x(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

3. Diferenciales totales sucesivas: fórmula simbólica. —

a) Observando (§ 66-4) la definición de diferencial de $z = f(x,y)$:

$$df = f_x(x,y)\,.\Delta x + f_y(x,y)\,.\Delta y$$

vemos que df depende de x e y (pues $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ son funciones de x e y) y también de los incrementos Δx, Δy.

Si como en el caso de una variable (§ 38-2), damos a Δx, Δy, valores fijos, la diferencial df depende sólo de x é y, y considerada como función de estas variables podrá tener a su vez una diferencial que llamaremos *diferencial segunda de* f e indicaremos con d^2f:

$$d^2f = d(df).$$

Análogamente representaremos la diferencial de tercero, cuarto, ..., enésimo orden de $f(x,y)$ por d^3f, d^4f, ..., d^nf respectivamente, donde

$$d^3f = d(d^2f), \quad d^4f = d(d^3f), \quad \ldots, \quad d^nf = d(d^{n-1}f).$$

Si las segundas derivadas existen y son continuas en el punto considerado, existirá diferencial segunda (§ 66-4, teor. 2), y teniendo en cuenta la conmutabilidad de la derivación (§ 69-2, teor. 2) vamos a obtener su expresión.

Por haber supuesto fijos $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, resulta

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Observemos que la expresión d^2f puede escribirse en la forma

$$d^2f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f \ ,$$

donde el exponente simbólico $^{(2)}$ indica que después de elevar al cuadrado debemos reemplazar las potencias y productos de los símbolos de JACOBI por índices de derivación.

En general, si existen y son continuas las derivadas n-ésimas en el punto considerado, se tendrá:

$$[69\text{-}8] \qquad d^nf = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f \ ,$$

donde se aplica, con la convención anterior, el desarrollo de la potencia de un binomio (§ 12-1), expresión que vale también para $n = 1$. La [69-8] se demuestra por inducción completa:

$$d^nf = d(d^{n-1}f) = d\left[\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1-r}\partial y^r}dx^{n-1-r}dy^r\right] =$$

$$= dx\left[\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}dx^{n-1-r}dy^r\right] +$$

$$+ dy\left[\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1-r}\partial y^{r+1}}dx^{n-1-r}dy^r\right] =$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}dx^{n-r}dy^r \ ,$$

ya que, según § 11-4, *b*, es $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}$.

Para el caso de más de dos variables independientes, se llega a un desarrollo análogo, pero aplicando ahora la potencia de un polinomio mediante la fórmula de LEIBNIZ (§ 12-2), con la misma convención anterior respecto de las potencias y productos de los símbolos de derivación:

$$[69\text{-}9] \quad d^mf(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(m)} f =$$

$$= \Sigma\frac{m!}{r_1!\, r_2! \ldots r_n!}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\ldots\partial x_n^{r_n}}dx_1^{r_1}dx_2^{r_2}\ldots dx_n^{r_n} \ ,$$

donde $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = m$ representan todas las descomposiciones posibles de m en n enteros no negativos.

b) Hemos visto (§ 67-2) que la expresión de la diferencial total primera [67-7] es la misma, aunque las variables de que depende la función diferenciada sean a su vez funciones de otras variables independientes. Esta importante propiedad *no subsiste para las diferenciales de orden superior.* Pues, por ejemplo, en la diferencial segunda, ya no podrán tomarse dx, dy como parámetros fijos, sino como diferenciales funcionales, que tienen a su vez $d^2x = d(dx)$, $d^2y = d(dy)$, dando

$$[69\text{-}10] \quad d^2f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y.$$

Si x é y son independientes, por ser entonces $d^2x = d^2y = 0$, queda la fórmula dada anteriormente.

4. **Derivadas y diferenciales sucesivas de las funciones implícitas.** — Supuestas cumplidas las condiciones de existencia (§ 68-2) de las funciones definidas implícitamente por el sistema [68-11], el método de la anulación de las sucesivas diferenciales totales es muy cómodo para obtener las sucesivas diferenciales y derivadas parciales de dichas funciones implícitas, como ya se ha hecho (§ 67-6) para las de primer orden.

Así, respecto de las diferenciales totales primeras de [68-11]:

$$[69\text{-}11] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}du_1 + \ldots + \\ \qquad + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m}du_m = 0 \ , \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}dx_n + \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1}du_1 + \ldots + \\ \qquad + \dfrac{\partial F_2}{\partial u_m}du_m = 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ , \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n + \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1}du_1 + \ldots + \\ \qquad + \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m}du_m = 0 \end{cases}$$

si suponemos que las funciones F_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, tienen derivadas segundas continuas, podremos volver a diferenciar totalmente, teniendo en cuenta que $dx_1, \ldots, dx_n$ son parámetros *independientes*, mientras que $du_1, \ldots, du_m$ son diferenciales *funcionales*.

Aplicando la potencia simbólica d^p (§ 69-3), quedará:

$$[69\text{-}12]\quad \begin{cases} \left(dx_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \dfrac{\partial}{\partial x_n} + du_1 \dfrac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + du_m \dfrac{\partial}{\partial u_m}\right)^{(2)} F_1 + \\ \qquad + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} d^2u_1 + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} d^2u_m = 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ , \\ \left(dx_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \dfrac{\partial}{\partial x_n} + du_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + du_m \dfrac{\partial}{\partial u_m}\right)^{(2)} F_m + \\ \qquad + \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} d^2u_1 + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} d^2u_m = 0 \ , \end{cases}$$

donde los cuadrados simbólicos son formas cuadráticas (§ 4-7) en $dx_1, \ldots, dx_n, du_1, \ldots, du_m$ con coeficientes que son *derivadas segundas* de las funciones $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. El sistema [69-12] es también un sistema de CRAMER en $d^2u_1, \ldots, d^2u_m$, si no es nulo el jacobiano

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_m)} \neq 0 \quad (\S\ 67\text{-}6).$$

Así pueden despejarse (§ 15-4) las $d^2u_1, \ldots, d^2u_m$, sustituyendo en las expresiones que se obtengan las $du_1, du_2 \ldots, du_m$ por las halladas mediante [69-11].

En definitiva, llegaremos a una expresión cuadrática homogénea en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ para cada d^2u_j, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, de cuyos coeficientes podrán deducirse las derivadas segundas de las funciones incógnitas $u_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, sin más que identificar la expresión hallada de d^2u_j con la (§ 69-3):

$$d^2u_j = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)} f_j \ , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \ ,$$

en virtud (§ 16-2) del principio de identidad de los polinomios de varias variables (en este caso $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$).

Y así se sigue para diferenciales y derivadas de orden superior, donde el sistema de ecuaciones lineales en las nuevas diferenciales incógnitas tiene siempre como determinante el mismo jacobiano [68-12], siendo, por tanto, todas estas diferenciales obtenibles sin necesidad de conocer las expresiones explícitas $u_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de las funciones incógnitas determinadas por el sistema [68-11].

EJEMPLO. Hállense d^5z y las derivadas parciales de quinto orden de $z = f(x, y)$ definida por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

El método expuesto se recomienda aún en casos en que como éste, sea posible despejar explícitamente la función incógnita, si ésta resulta complicada para la diferenciación sucesiva. Además, conviene diferenciar directamente sin entretenerse en interpretar las fórmulas simbólicas [69-12] y demás que sigan. El trabajo puede simplificarse con adecuados cambios de variables; por ejemplo, en este caso tomaremos

$$x = a\xi \ , \quad y = b\eta \ , \quad z = c\zeta$$

con

$$d^5z = c\, d^5\zeta \ , \quad dx = a\, d\xi = ah \ ; \quad dy = b\, d\eta = bk.$$

De $\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 1$ resulta $\xi h - \eta k - \zeta d\zeta = 0$, y diferenciando sucesivamente:

$$h^2 - k^2 - d\zeta^2 - \zeta d^2\zeta = 0 \ ; \quad 3d\zeta d^2\zeta + \zeta d^3\zeta = 0 \ ,$$
$$3(d^2\zeta)^2 + 4d\zeta d^3\zeta + \zeta d^4\zeta = 0 \ ; \quad 10d^2\zeta d^3\zeta + 5d\zeta d^4\zeta + \zeta d^5\zeta = 0.$$

Despejando sucesivamente las diferenciales de orden inferior al quinto y sustituyéndolas en la última, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^9 d^5\zeta}{15} = {} & \xi(\zeta^2 - \xi^2)(3\zeta^2 - 7\xi^2)h^5 + \eta(30\xi^2\zeta^2 - 35\xi^4 - 3\zeta^4)h^4k + \\ & + 2\xi(35\xi^2\eta^2 - 15\eta^2\zeta^2 + 5\xi^2\zeta^2 - 3\zeta^4)h^3k^2 - \\ & - 2\eta(35\xi^2\eta^2 + 15\xi^2\zeta^2 - 5\eta^2\zeta^2 - 3\zeta^4)h^2k^3 + \\ & + \xi(30\eta^2\zeta^2 + 35\eta^4 + 3\zeta^4)hk^4 - \eta(\eta^2 + \zeta^2)(7\eta^2 + 3\zeta^2)k^5. \end{aligned}$$

Volviendo a las variables primitivas, queda en definitiva:

$$\begin{aligned} d^5z = \frac{15c^{10}}{z^9} \Bigg[& \frac{x}{a}\left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(3\frac{z^2}{c^2} - 7\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{dx^5}{a^5} + \\ & + \frac{y}{b}\left(30\frac{x^2z^2}{a^2c^2} - 35\frac{x^4}{a^4} - 3\frac{z^4}{c^4}\right)\frac{dx^4dy}{a^4b} + \\ & + 2\frac{x}{a}\left(35\frac{x^2y^2}{a^2b^2} - 15\frac{y^2z^2}{b^2c^2} + 5\frac{x^2z^2}{a^2c^2} - 3\frac{z^4}{c^4}\right)\frac{dx^3dy^2}{a^3b^2} - \\ & - 2\frac{y}{b}\left(35\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + 15\frac{x^2z^2}{a^2c^2} - 5\frac{y^2z^2}{b^2c^2} - 3\frac{z^4}{c^4}\right)\frac{dx^2dy^3}{a^2b^3} + \\ & + \frac{x}{a}\left(30\frac{y^2z^2}{b^2c^2} + 35\frac{y^4}{b^4} + 3\frac{z^4}{c^4}\right)\frac{dx\,dy^4}{ab^4} - \\ & - \frac{y}{b}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\left(7\frac{y^2}{b^2} + 3\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^5}{b^5}\Bigg]. \end{aligned}$$

Para las derivadas sería, por ejemplo:

$$\binom{5}{2}\frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2} = \frac{30c^{10}x}{a^4b^2z^9}\left(35\frac{x^2y^2}{a^2b^2} - 15\frac{y^2z^2}{b^2c^2} + 5\frac{x^2z^2}{a^2c^2} - 3\frac{z^4}{c^4}\right),$$

y análogamente las demás.

5. Fórmula de Taylor para dos variables. — Vamos a extender a funciones de dos variables la fórmula de TAYLOR estudiada en § 39 para funciones de una variable.

Sea $f(x, y)$ una función *diferenciable hasta el orden $n+1$ en un entorno del punto (a, b)*, que comprenda en su interior

el rectángulo de lados paralelos a los ejes y vértices opuestos $A(a, b)$ y $Q(a+h, b+k)$ (fig. 232). Tratamos de aproximar el valor $f(a+h, b+k)$ mediante un polinomio en h y k en menos de un término complementario del orden visto en § 39-3.

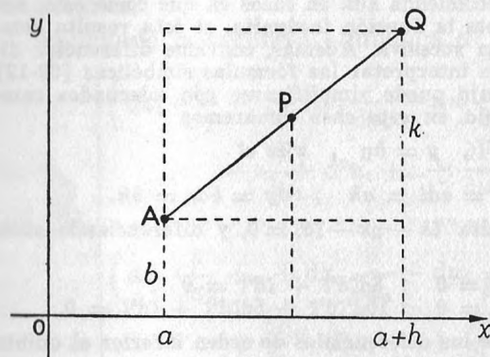


Fig. 232

Para pasar del punto $A(a, b)$ al $Q(a+h, b+k)$ podríamos primero incrementar a a en h y luego a b en k; pero vamos a pasar directamente de A a Q siguiendo la recta AQ, es decir, incrementando ambos valores al mismo tiempo.

Un punto P sobre la recta AQ está fijado por la relación:

$$AP/AQ = t \quad \text{siendo} \quad 0 < t < 1 \quad ;$$

luego los valores de x é y dependen de una variable t:

[69-13] $$x = a + ht \quad ; \quad y = b + kt.$$

(Para $t = 0$ se tiene el punto A, y para $t = 1$ el punto Q).

Resulta, pues,

$$f(x, y) = f(a+ht, b+kt) = \varphi(t) \quad ,$$

y aplicando la fórmula de MAC-LAURIN (§ 39-4) a la función $\varphi(t)$, se tiene:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta t)$$

con $0 < \theta < 1$.

Haciendo $t = 1$ queda:

[69-14] $$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \quad ,$$

donde $\varphi(1) = f(a+h, b+k)$ y $\varphi(0) = f(a, b)$.

Vamos a calcular los valores de las derivadas $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, $\varphi^{(n)}(0)$, $\varphi^{(n+1)}(\theta)$ aplicando la regla de derivación de las funciones compuestas (§ 67-1, teor. 1), puesto que f es función sucesivamente diferenciable de x, y, las cuales son funciones lineales de t. Resulta

[69-15] $$\varphi'(t) = f_x(a+ht, b+kt) . h + f_y(a+ht, b+kt) . k,$$

de donde

$$\varphi'(0) = f_x(a, b) . h + f_y(a, b) . k.$$

Para la obtención de $\varphi''(t)$ a partir de [69-15], observemos que al ser lineales en t las funciones [69-13], se aplicará el mismo cálculo aplicado para obtener la diferencial segunda (§ 69-3), resumido en la fórmula simbólica

$$\varphi''(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(a+ht, b+kt) \quad ,$$

de donde

$$\varphi''(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(a, b) = d^2f(a, b) .$$

Del mismo modo y en forma análoga a [69-8], escribiremos abreviadamente

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(a+ht, b+kt) \quad ,$$

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(a, b) = d^nf(a, b) \quad ,$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k) .$$

Sustituyendo estos valores en [69-14], obtenemos *la fórmula de* TAYLOR *para funciones de dos variables.*

[69-16] $$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(a, b) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(a, b) + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k) \quad ,$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Si se pasa el primer término del segundo miembro al primero y se emplea la notación diferencial (§ 69-3), se obtiene

[69-17] $$\Delta f(a, b) = \frac{df(a, b)}{1!} + \frac{d^2f(a, b)}{2!} + \ldots + \frac{d^nf(a, b)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(a+\theta h, b+\theta k)}{(n+1)!} \quad , \quad (0 < \theta < 1) \quad ,$$

con la misma forma [39-15] que para el caso de una variable (§ 39-4).

En el desarrollo [69-16], los incrementos h y k pueden ser reemplazados por $x-a$ é $y-b$ respectivamente, y así resulta $f(x, y)$ aproximada por un polinomio en potencias de $x-a$ é $y-b$.

En particular, si el punto (a, b) alrededor del cual se hace el desarrollo es el punto $(0, 0)$, donde $h = x$, $k = y$, obtenemos, reemplazando en [69-16], la llamada *fórmula de* MAC LAURIN *para funciones de dos variables*:

$$[69\text{-}18] \quad f(x,y) = f(0,0) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(0,0) + $$

$$+ \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(0,0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(0,0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(\theta x, \theta y)\,.$$

$$(0 < \theta < 1).$$

NOTAS: 1. Para $n = 0$, la fórmula [69-16] da una forma simétrica del teorema de los incrementos finitos (cfr. § 66-2, nota 2).

2. Si en el desarrollo de $\varphi(t)$ se aplica el término complementario de SCHLÖMILCH (§ 39-3, *c*), se obtendrá en lugar del de LAGRANGE

$$[69\text{-}19] \quad T_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h,\ b+\theta k),$$

el también llamado de SCHLÖMILCH

$$[69\text{-}20] \quad T_n = \frac{(1-\theta)^{n+1-p}}{n!p}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h,\ b+\theta k),$$

$$(0 < p < n+1 \ ;\ 0 < \theta < 1),$$

que para $p = 1$, toma la forma de CAUCHY:

$$[69\text{-}21] \quad T_n = \frac{(1-\theta)^{n}}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h,\ b+\theta k),$$

$$(0 < \theta < 1).$$

3. Si se aplica a $\varphi(t)$ la forma integral del término complementario (§ 51-5, *c*):

$$T_n = \frac{1}{n!}\int_0^t (t-\tau)^n \varphi^{(n+1)}(\tau)\,d\tau \ ,$$

para lo que supondremos que $f(x, y)$ *tiene derivadas parciales continuas hasta el orden* $n+1$ *en un entorno del punto* (a, b), resulta al sustituir en la análoga de [69-14], *la forma integral del término complementario* para funciones de dos variables:

$$[69\text{-}22] \quad T_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-\tau)^n \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+h\tau,\ b+k\tau)\,d\tau \ ,$$

que no incluye valores θ desconocidos.

Si se separa como factor no negativo el $(1-\tau)^{p-1}$ siendo $0 < p \leqslant n+1$ y se aplica a [69-22] el teorema del valor medio del cálculo integral (§ 48-6, *c*), se recae en la forma [69-20] de SCHLÖMILCH (o bien [69-19] de LAGRANGE o [69-21] de CAUCHY para $p = n+1$, $p = 1$ respectivamente).

4. Cuando los términos complementarios tienden a cero (cfr. § 44-2) para $n \to \infty$, supuesta $f(x, y)$ indefinidamente diferenciable en el entorno del punto (a, b), las [69-16] y [69-18] se convierten en las *series de* TAYLOR y *de* MAC-LAURIN respectivamente, sustituyendo el último término complementario por puntos suspensivos (con el significado de § 22-1).

EJEMPLO. Desarrollemos la función $f(x, y) = +\sqrt{1-x^2-y^2}$ en el entorno del punto $(0, 0)$. Las derivadas sucesivas son

$$f_x = \frac{-x}{+\sqrt{1-x^2-y^2}}\ ,\ f_y = \frac{-y}{+\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f_x(0,0) = 0\ ,\ f_y(0,0) = 0\ ,$$

$$f_{xx} = \frac{-1+y^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\ ,\ f_{xy} = \frac{xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\ ,\ f_{yy} = \frac{-1+x^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\ ,$$

$$f_{xxx} = \frac{(3/2)(1-y^2)x}{(1-x^4-y^2)^{5/2}}\ ,\ f_{xxy} = \frac{y^3-2xy^2-y}{(1-x^2-y^2)^{5/2}}\ ,\ \ldots$$

Por lo tanto:

$$+\sqrt{1-x^2-y^2} = 1 + (0x+0y) + \frac{1}{2}(-x^2+0xy-y^2) +$$

$$+ \frac{1}{6}(0x^3 + \ldots) + \ldots ,$$

es decir

$$+\sqrt{1-x^2-y^2} = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \text{términos de 4º orden} + \ldots$$

Aquí sería más sencillo aplicar el desarrollo de $\sqrt{1+x}$ (§ 45-5, ejemplo 1), sustituyendo x por $-(x^2+y^2)$, lo que presupone para las series dobles de potencias un teorema de unicidad análogo al visto en § 44-1 para el caso de una variable (cfr. § 81-4).

6. Generalización para más variables. — El mismo razonamiento empleado en el apartado anterior vale para más variables, conservándose aún la misma forma diferencial [69-17] si se aplica en ella la interpretación [69-9].

También se usa (BOURBAKI) escribir el desarrollo simbólico de MAC-LAURIN en la forma simbólica siguiente:

$$[69\text{-}23] \qquad f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{m}|<n} D^{\mathbf{m}} f(0)\,\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{m}}}{\mathbf{m}!} + T_n$$

donde $f(\mathbf{x})$ es una abreviatura de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{m}$ simboliza el sistema de enteros no negativos $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$ representa $x_1^{m_1}$, $x_2^{m_2}$, ..., $x_n^{m_n}$, mientras que $\mathbf{m}!$ significa $m_1!.\ m_2!.\ \ldots\ m_n!$, siendo

$$D^{\mathbf{m}} = \frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\ldots\partial x_n^{m_n}}\ .$$

En este simbolismo de representación de los sistemas de n enteros no negativos $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ por el solo símbolo **m**, se suele llamar:
Rango de $\mathbf{m} = \mathrm{M} = \max(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.
Orden de $\mathbf{m} = |\mathbf{m}| = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Se escribe $\mathbf{m} + \mathbf{p}$ por $(m_1 + p_1, m_2 + p_2, \ldots, m_n + p_n)$, $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{p}}$ por el producto

$$\binom{m_1}{p_1}\binom{m_2}{p_2}\cdots\binom{m_n}{p_n}$$

de números combinatorios (§ 11-4), mientras que $\mathbf{m} \geqslant \mathbf{p}$ significa que se cumplen conjuntamente las desigualdades $m_1 \geqslant p_1$, $m_2 \geqslant p_2$, $\ldots$, $m_n \geqslant p_n$.
En el mismo orden de ideas se expresa:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} \quad ; \quad \frac{\partial^r}{\partial \mathbf{x}^r} = \frac{\partial^{rn}}{\partial x_1{}^r \partial x_2{}^r \ldots \partial x_n{}^r}\,.$$

Obsérvese que ambas notaciones son casos particulares de $\mathrm{D}^{\mathbf{m}}$ para $\mathbf{m} = (1, 1, \ldots, 1)$; $\mathbf{m} = (r, r, \ldots, r)$.

Ejercicios

1. Obtener las derivadas parciales de segundo orden de las funciones $u = xy \,.\, \mathrm{arc\ sen}(z/x)$, $v = (e^x - 2e^y)/(e^x + 2e^y)$.

2. Si $\mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ depende sólo de $r = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2}$, es decir, $\mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{g}(r)$, calcular $\mathrm{f}_{11} + \mathrm{f}_{22} + \ldots + \mathrm{f}_{nn}$ y hallar la función f para que esta expresión se anule (cfr. Cap. XXIII, nota II, b_2).

3. Probar que $u = \mathrm{u}(x, y)$ es de la forma $u = \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(y)$ cuando y sólo cuando satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales $uu_{xy} - u_x u_y = 0$.

4. Hallar donde son iguales o distintas las derivadas f_{xy} y f_{yx} para la función $\mathrm{f}(x, y) = x^2 \,\mathrm{arc\,tg}(y/x) - y^2 \,\mathrm{arc\,tg}(x/y)$ si $xy \neq 0$, con $\mathrm{f}(0, y) = \mathrm{f}(x, 0) = 0$. Verificar si en el punto $(0, 0)$ se cumplen las condiciones de hipótesis de los teoremas de § 69-2.

5. Demostrar que para cualquier función $\mathrm{f}(x, y)$ es $\Delta_x[\Delta_y(\Delta \mathrm{f})] = \Delta_y[\Delta_x(\Delta_x \mathrm{f})]$.

6. Formular las hipótesis análogas a las de los teoremas 2 y 4 de § 69-2 para que $\mathrm{f}_{xyz}(x_0, y_0) = \mathrm{f}_{yxz}(x_0, y_0)$.

7. Obtener en forma simbólica la diferencial n-ésima de $z = e^{ax}\mathrm{f}(y)$; aplicarlo a $z = e^{ax} \cos by$.

8. Transformar, pasando de coordenadas cartesianas a polares $x = r\cos\varphi$, $y = r \,\mathrm{sen}\, \varphi$ las expresiones:

$$1^{\circ})\ u_{xx} + u_{yy} \quad ; \quad 2^{\circ})\ u = (1 + y'^2)^{3/2}/y''.$$

9. Demostrar que una función (positivamente) homogénea de grado m que tenga derivadas p-ésimas, cumple (cfr. § 67-3, teor. 1):

$$m(m-1)\ldots(m-p+1)\mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(p)} \mathrm{f}.$$

10. Demostrar que si una función (positivamente) homogénea $\mathrm{f}(x_1, \ldots, x_n)$ de grado m satisface la ecuación de Laplace (§ 91-6, *d*): $\Delta \mathrm{f} \equiv \mathrm{f}_{11} + \mathrm{f}_{22} + \ldots + \mathrm{f}_{nn} = 0$, satisface también la relación
$\Delta(r^{2p}\mathrm{f}) = 2p(2m + 2p + n - 2)r^{2p-2}\mathrm{f}$ con $r^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2$.

11. Derivadas primera y segunda de la función $y = \mathrm{y}(x)$ definida por $xy^2 + 4x^2y - 12 = 0$.

12. Si $z(z^2 + 3x) + 3y = 0$ demostrar que

$$z_{xx} + z_{yy} = 2z(x-1)/(z^2 + x)^3.$$

13. Derivadas sucesivas de las funciones $y = \mathrm{y}(x)$, $z = \mathrm{z}(x)$ definidas por el sistema $z = 4x^2 - 3y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

14. Derivadas sucesivas de las funciones $u = \mathrm{u}(x, y)$, $v = \mathrm{v}(x, y)$ definidas por el sistema $x + y + u + v = a$, $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = b^2$.

15. Desarrollar hasta los términos de tercer orden por la fórmula de Taylor la función $u = x^y$ en el punto $(1; 2)$.

16. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función $\mathrm{sen}\, x \,.\, \mathrm{sen}\, y$.

17. Desarrollar en serie de potencias las siguientes funciones, indicando su campo de convergencia: 1°) $u = 1/(1 - x - y)$; 2°) $u = e^{x+y}$.

18. Desarrollar la función $u = e^{-y^2+2xy}$ en el origen, en serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_n(x)}{n!} y^n$, convergente para todos los valores de x y de y, demostrando que:

1°) $\mathrm{H}_n(x)$ es el polinomio de Hermite de grado n (Cap. X, nota III-b_2; § 97-11 y 12);
2°) $\mathrm{H}'_n(x) = 2n\,\mathrm{H}_{n-1}(x)$;
3°) $\mathrm{H}_{n+1} - 2x\,\mathrm{H}_n + 2n\,\mathrm{H}_{n-1} = 0$;
4°) $\mathrm{H}''_n - 2x\,\mathrm{H}'_n + 2n\,\mathrm{H}_n = 0$.

19. Demostrar que si $\mathrm{f}(x, y)$, $\mathrm{g}(x, y)$ tienen derivadas primeras continuas en un entorno del origen, donde $\mathrm{f}(0, 0) = \mathrm{g}(0, 0) = 0$, con $\mathrm{g}_x{}^2(0, 0) + \mathrm{g}_y{}^2(0, 0) \neq 0$, es

$$\lim_{y=\lambda x \to 0} \frac{\mathrm{f}(x, y)}{\mathrm{g}(x, y)} = \frac{\mathrm{f}_x(0, 0) + \lambda \mathrm{f}_y(0, 0)}{\mathrm{g}_x(0, 0) + \lambda \mathrm{g}_y(0, 0)}\,. \quad (\lambda \neq 0).$$

20. En el ejercicio anterior, ¿cuándo existirá límite doble en $(0, 0)$?

21. Aplicar el ejercicio 19 para hallar $\lim(\mathrm{sen}\, xy + xe^x - y)/(x \cos y + \mathrm{sen}\, 2y)$ si $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de $y = -x$. ¿Existe para este ejemplo límite doble?

22. Aplicar el ejercicio 19 generalizado para hallar

$$\lim \frac{e^{xy} - 1}{\mathrm{sen}\, x \ln(1 + y)}$$

si $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de $y = \lambda x$. ¿Existe ahora límite doble?

§ 70. Extremos relativos

1. Definiciones. Funciones de dos variables: condiciones necesarias. — *a*) Los conceptos referentes a extremos absolutos y relativos, en sentido estricto o amplio, vistos en el caso de funciones de una variable (§ 33-2), se definen en modo análogo para una función de cualquier número de variables, siembre que en el punto que se considere se aplique el concepto de entorno pluridimensional (§ 64-4, Def. 2).

Def. 1. Una función $\mathrm{f}(\mathbf{x})$ de cualquier número de variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$ tiene un *extremo relativo* (en sentido

estricto) en el punto a de un conjunto X, si existe un número $\delta > 0$, tal que se cumpla una de las dos condiciones:

$$[70\text{-}1] \quad \begin{cases} f(x) < f(a) \ , & (\textit{máximo relativo}) \\ f(x) > f(a) \ , & (\textit{mínimo relativo}) \end{cases}$$

para todos los puntos $x \varepsilon X$ que pertenezcan al entorno reducido de a de radio δ, es decir, verifiquen $0 < |x - a| < \delta$, es decir $0 < (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < \delta^2$.

DEF. 2. Una función f(x) tiene un *máximo o mínimo absoluto* (en sentido estricto) en el punto a de un conjunto X si una u otra de las condiciones [70-1] se cumple para todo $x \varepsilon X$ distinto del punto a.

NOTA 1. Si en una u otra de las condiciones [70-1] se sustituye $<$ (o $>$) por $\leqslant$ (o $\geqslant$) se dice entonces que hay máximo (o mínimo), relativo o absoluto, *en sentido amplio*.

Algunos autores, por ejemplo SEVERI, llaman *impropios* a estos extremos, y *propios* o *efectivos* a los que nosotros llamamos extremos en sentido estricto.

EJEMPLO 1. La función $z = f(x, y) = x^2$ tiene en cada punto del eje y $(x = 0)$ un mínimo relativo en sentido amplio, pero no en sentido estricto. En cambio la función *de una variable* $z = f(x) = x^2$ tiene en $x = 0$ un mínimo (absoluto) en sentido estricto.

NOTA 2. En muchos textos se llaman sólo relativos a los extremos correspondientes a puntos *interiores* (§ 64-4, Def. 5) del campo X donde se estudie la función.

b) En el caso de una función de dos variables $f(x, y)$ definida en un recinto R, diremos por tanto que en el punto $(a, b) \varepsilon R$, en sentido *estricto*

toma valor *máximo* si se verifica $f(a + h, b + k) < f(a, b)$,

" " *mínimo* " " " $f(a + h, b + k) > f(a, b)$,

para todos los puntos que cumplan $0 < h^2 + k^2 < \delta^2$, con un cierto $\delta > 0$.

EJEMPLO 2. Sea la superficie de ecuación

$$z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) \ ,$$

obtenida por giro de la curva de ecuaciones $z = x^4 - 2x^2$, $y = 0$, alrededor del eje z.

Sobre el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$ la función z tiene en el punto (0, 0) un máximo relativo en sentido estricto de valor 0, aun cuando el máximo absoluto en sentido amplio, de valor 8, se dé para los puntos del contorno $x^2 + y^2 = 4$.

Estos puntos son también máximos relativos al círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$, en sentido amplio, según Def. 1, nota 1 (cfr. nota 2).

Los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ son de mínimo relativo y también absoluto en sentido amplio, con valor —1. No existen mínimos relativos en sentido estricto.

Obsérvese que en el anillo abierto $0 < x^2 + y^2 < 4$ no existen extremos ni relativos ni absolutos en sentido estricto.

c) *Condiciones necesarias. Para que la función derivable* $f(x, y)$ *tenga con respecto al campo* C *un máximo o mínimo relativo, en sentido estricto o amplio, en un punto interior* $(a, b) \varepsilon C$, *es necesario que se cumpla*

$$[70\text{-}2] \qquad f_x(a, b) = 0 \quad , \quad f_y(a, b) = 0 \ .$$

En efecto, fijado $y = b$, tenemos la función de una variable $f(x, b)$ y si su derivada en $x = a$ no fuera nula, sería en dicho punto $f(x, b)$ estrictamente creciente o decreciente (§ 33-1) y no podría haber extremo en (a, b). Análogo razonamiento se aplica a la otra derivada parcial.

Para el caso de una función diferenciable, las condiciones [70-2] significan geométricamente que el plano tangente (§ 66-5) es *horizontal* (es decir, paralelo al plano xy), con ecuación reducida a $z = c$.

NOTAS: 3. Las condiciones [70-2] son necesarias pero *no suficientes* para la existencia de extremo *relativo*. Cabe también la existencia de extremo relativo si la función *no es derivable*.

Todos los ejemplos dados en § 33-3 ilustran también el caso actual, pues si se sustituye en ellos y por z, representan superficies cilíndricas de generatrices paralelas al eje correspondiente a la variable que falta y las conclusiones subsisten aquí para extremos tomados en sentido amplio. También pueden tomarse aquellas ecuaciones de § 33-3 como meridianas generatrices de superficies de revolución y entonces el ejemplo 1 allí visto da mínimo relativo estricto en el origen con punto cónico (§ 66-5) en él sin que se verifiquen las [70-2].

4. Si la función es *derivable y continua* en un *recinto cerrado* y *acotado* existiendo por tanto *extremos absolutos* en sentido amplio (§ 65-3, c) y éstos *no se alcanzan en el contorno del recinto*, los extremos absolutos son también relativos en un punto interior y para hallarlos *deben también cumplirse las condiciones* [70-2].

En la práctica de la búsqueda de los extremos de una función $f(x, y)$, se comienza por resolver el sistema de ecuaciones

$$[70\text{-}3] \qquad f_x(x, y) = 0 \quad , \quad f_y(x, y) = 0 \ ,$$

obteniendo un número (finito o infinito) de raíces (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., que suelen llamarse puntos *críticos* o *extremantes*, pues en ellos *puede* haber extremo (relativo o absoluto en sentido estricto o amplio), y el examen directo del comportamiento de la función en su entorno o la comparación del valor tomado en él con los demás (cfr. § 33-5), acaba de decidir la cuestión. En el ejemplo 2, el sistema [70-3] tiene como raíces, aparte de (0, 0), los infinitos puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Se completa el examen considerando tanto los puntos donde $f(x, y)$ deja de ser derivable, como los puntos frontera del campo donde se buscan los extremos.

EJEMPLOS: 3. Hallar los extremos de la función $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Para esta función, fuera del origen donde no es derivable (compruébese por formación directa de los cocientes incrementales), nunca las de-

rivadas parciales se anulan simultáneamente. Directamente se ve que hay máximo absoluto en sentido estricto con valor 1 en el origen y mínimo absoluto en sentido amplio con valor 0 en los puntos de la circunferencia de contorno $x^2+y^2=1$.

4. Hallar los extremos de la función $f(x,y)=x+y$ en el círculo $x^2+y^2\leqslant 1$.

Esta función es derivable, pero sus derivadas parciales nunca son simultáneamente nulas. Por tanto los extremos han de buscarse sobre el contorno $x^2+y^2=1$. Pasando a coordenadas polares (§ 9-4, *c*), hay que hallar los extremos de $\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi$, lo que ocurre para $-\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi=0$, dando máximo para $\varphi=\frac{1}{4}\pi$ y mínimo para $\varphi=-3\pi/4$ (§ 33-7). Así pues, en el punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ tenemos máximo absoluto estricto y en el $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ mínimo absoluto estricto, sin que haya otros extremos.

2. **Condiciones suficientes de extremo relativo.** — Para obtener *condiciones suficientes* que aseguren la *existencia de extremo relativo* en un punto crítico (a,b), supongamos que la función $f(x,y)$ *tenga derivadas segundas en un entorno de dicho punto y sean continuas y no simultáneamente nulas en* (a,b).

La fórmula de TAYLOR [69-16] para $n=1$ da:

$$f(a+h,\ b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(a+\theta h,\ b+\theta k),\quad 0<\theta<1),$$

y teniendo en cuenta las condiciones necesarias [70-2] y la continuidad de las derivadas segundas:

$$f(a+h,\ b+k)=f(a,b)+\tfrac{1}{2}[h^2(f_{xx}+\varepsilon_1)+$$
$$+2hk(f_{xy}+\varepsilon_2)+k^2(f_{yy}+\varepsilon_3)]\ ,$$

con $\varepsilon_i\to 0$ para $\varrho=+\sqrt{h^2+k^2}\to 0$, $(i=1,2,3)$, es decir:

[70-4] $$f(a+h,\ b+k)-f(a,b)=$$
$$=\tfrac{1}{2}(f_{xx}h^2+2f_{xy}hk+f_{yy}k^2)+o(\varrho^2)\ ,$$

donde f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} indican las derivadas tomadas precisamente en el punto (a,b).

Si se introducen coordenadas polares

$$h=\varrho\cos\varphi\ ,\quad k=\varrho\operatorname{sen}\varphi\ ,$$

la [70-4] se convierte en

[70-5] $$\Delta f(a,b)=f(a+h,\ b+k)-f(a,b)=$$
$$=\tfrac{1}{2}\varrho^2(f_{xx}\cos^2\varphi+2f_{xy}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi+f_{yy}\operatorname{sen}^2\varphi)+o(\varrho^2),$$

y así para ϱ suficientemente pequeño, el signo de $\Delta f(a,b)$ es el mismo que el de la forma cuadrática en $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$:

[70-6] $$T(\varphi)=f_{xx}\cos^2\varphi+2f_{xy}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi+f_{yy}\operatorname{sen}^2\varphi\ ,$$

siempre que excluyamos un entorno angular arbitrariamente pequeño de cada dirección φ *en que se anula* $T(\varphi)$.

En efecto, $T(\varphi)$ es función continua de φ, no nula por haber excluído con sendos entornos el valor o los valores de φ donde se anule; luego su valor absoluto tiene un mínimo $m>0$ (§ 26-5) y tomando ϱ suficientemente pequeño para que en [70-5] sea $|o(\varrho^2)|<\frac{1}{4}m\varrho^2$, será seguramente Δf del mismo signo que $T(\varphi)$.

Recordemos, pues, la conocida variación del trinomio de segundo grado (§ 19-1, *c*).

Para estudiar la variación de la forma cuadrática [70-6], equivalente a estudiar la de $f_{xx}h^2+2f_{xy}hk+f_{yy}k^2$ para h y k no simultáneamente nulos, es esencial considerar el signo de su discriminante:

[70-7] $$H=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}\ ,$$

llamado determinante *hessiano* de la función $f(x,y)$. El hessiano $H=H(x,y)$ es una función de las mismas variables x, y, e interesará para nuestro estudio su signo en los puntos críticos.

En general, el hessiano de una función $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es el jacobiano (§ 67-6) de sus derivadas primeras $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

a) *Caso elíptico*: $H>0$. Veremos que si el punto es crítico hay extremo. En efecto, es necesariamente

$$f_{xx}>0\ \text{ y }\ f_{yy}>0,\quad\text{o bien:}\quad f_{xx}<0\ \text{ y }\ f_{yy}<0,$$

y mediante un artificio análogo al empleado en la resolución de la ecuación de segundo grado (§ 19-1) para completar el cuadrado, se puede escribir el trinomio [70-6] en la forma:

[70-8] $$T(\varphi)=\frac{1}{f_{xx}}\left[(f_{xx}\cos\varphi+f_{xy}\operatorname{sen}\varphi)^2+H\operatorname{sen}^2\varphi\right]\ ,$$

que no se anula para ningún valor de φ, pues si se anula el seno no se anula el coseno y viceversa. La forma $T(\varphi)$ tiene siempre el mismo signo que f_{xx} y se llama entonces *definida* (§ 63-7).

Además dicho signo será también por [70-5] el de $\Delta f=$ $=f(a+h,\ b+k)-f(a,b)$ en un entorno del punto crítico (a,b) y la superficie queda situada a un mismo lado del plano tangente; el punto $(a,b,f(a,b))$ se llama *elíptico* (cfr. § 71-5) y en él existe extremo relativo para este caso de plano tangente horizontal: si la superficie queda por debajo de éste ($f_{xx}<0$) tendremos *máximo estricto*; si queda por encima ($f_{xx}>0$) tendremos *mínimo estricto*.

En resumen habrá quedado demostrado:

TEOR. 1. *Si una función* $f(x,y)$ *tiene derivadas segundas continuas en el punto* (a,b) *de un recinto* R *y cumple las condiciones*:

1º) $f_x = f_y = 0$ *en el punto* (a, b),
2º) $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ *en* (a, b);

entonces $f(x, y)$ *tiene en el punto* (a, b) *de* R *un extremo relativo estricto, máximo si* $f_{xx} < 0$, *mínimo si* $f_{xx} > 0$.

Obsérvese que si por ejemplo es $f_{xx} > 0$, la curva sección $z = f(x, b)$ tiene en $x = a$ su concavidad hacia arriba (§ 33-9) y por tanto hay mínimo.

EJEMPLO 1. El punto $(0, 0)$ en el ejemplo 2 de § 70-1, donde $H = 16$ y $f_{xx} = f_{yy} = -4 < 0$, es máximo relativo estricto.

b) Caso hiperbólico: $H < 0$. Veremos que no hay extremo. Si es $f_{xx} \neq 0$, vale la transformación [70-8] y entonces para $\varphi = 0$ es sg T = sg f_{xx}, mientras que para la dirección correspondiente a tg $\varphi_0 = -f_{xx}/f_{xy} \neq 0$ es sg T = — sg f_{xx}, pues entonces $H \operatorname{sen}^2 \varphi_0 = f_{xx}T(\varphi_0) < 0$.

Si es $f_{xx} = 0$ con $f_{yy} \neq 0$ la conclusión sería análoga, empleando en lugar de [70-8] la expresión que resulta de cambiar x por y y el seno por el coseno.

Si $f_{xx} = f_{yy} = 0$, debe ser $f_{xy} \neq 0$ para que no se anule H y la expresión [70-6] se reduce a $T(\varphi) = 2f_{xy} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi = f_{xy} \operatorname{sen} 2\varphi$ que cambia también de signo al pasar de uno a otro cuadrante.

En resumen, si se llama *indefinida* a la forma [70-6] que tenga signo variable (§ 63-7), tal ocurre para $H < 0$. Las direcciones en que se anula el trinomio T determinan dos ángulos completos; en uno es $T < 0$ y en el otro $T > 0$. Entonces la superficie queda a uno y otro lado del plano tangente; el punto $(a, b, f(a, b))$ se llama *hiperbólico*. Este calificativo expresa no sólo que el plano tangente *atraviesa* la superficie (cfr. caso parabólico siguiente), sino también que su curva intersección tiene allí un punto *crunodal*, es decir singular a tangentes distintas (cfr. § 71-4). Para este caso de plano tangente horizontal el punto se llama *de ensilladura* y en él se puede asegurar que no hay extremo.

Por tanto, habrá quedado demostrado:

TEOR. 2. *Si una función* $f(x, y)$ *tiene derivadas segundas continuas en el punto* (a, b) *de un recinto* R *y cumple las condiciones*:

1º) $f_x = f_y = 0$ *en el punto* (a, b),
2º) $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ *en* (a, b);

entonces $f(x, y)$ *tiene en* (a, b) *un punto de ensilladura donde no hay extremo relativo.*

EJEMPLO 2. $z = xy$, en $(0, 0)$, donde $H = -1 < 0$, no tiene extremo.

c) Caso parabólico: $H = 0$. Si $f_{xx} \neq 0$, la expresión $f_{xx}T(\varphi)$ en [70-8] se reduce a un cuadrado, siempre positivo, excepto

para la recta "singular" cuya dirección corresponde a tg $\varphi_0 = -f_{xx}/f_{xy}$, donde se anula. Luego, de acuerdo con lo estudiado al pasar de [70-5] a [70-6], la superficie está a un lado del plano tangente, excepto en un ángulo arbitrariamente pequeño, entorno de dicha recta donde nada puede asegurarse.

Si $f_{xx} = 0$ y por tanto $f_{xy} = 0$, debe ser $f_{yy} \neq 0$, por haberse supuesto no simultáneamente nulas las tres derivadas segundas; entonces [70-6] se reduce a $T(\varphi) = f_{yy} \operatorname{sen}^2 \varphi$ y la conclusión anterior subsiste, excluyendo ahora el entorno angular de la recta "singular" en dirección de sentidos $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

Si es $H = 0$, la forma [70-6] se llama *semidefinida* (§ 63-7), porque aunque no cambie de signo como en el primer caso, se anula para algún valor de φ, o expresada dependiendo de h y k como en el primer término del segundo miembro de [70-4], se anula para valores de h y k no simultáneamente nulos, conservándose del mismo signo en los demás.

Entonces el punto se llama *parabólico*; el tipo más sencillo se presenta en las superficies cónicas y cilíndricas (§ 62-5).

Aunque el plano tangente sea horizontal, no se podrá afirmar o negar que hay extremo relativo, en sentido estricto o amplio: estaremos en un *caso dudoso*.

Sin embargo, en este caso también la superficie está de un solo lado del plano tangente en todas las direcciones rectilíneas, excepto en la correspondiente a una sola recta "singular". Por ello diremos se trata de un *casi-máximo* o un *casi-mínimo*. A pesar de estas conclusiones referentes al modo especial de *aproximación radial* al punto (a, b), nada podrá concluirse respecto de la aproximación superficial o por caminos curvos.

EJEMPLO 3. Sea la función

$$z = f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2) \quad [70\text{-}9]$$

o bien desarrollando

$$z = f(x, y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4 \quad [70\text{-}10]$$

que en $(0, 0)$ verifica $f_{yy} = 2$, $f_{xx} = f_{xy} = H = 0$, siendo el eje x recta "singular". Las parábolas $y = x^2$, $y = 3x^2$ (fig. 233) dividen el plano xy en tres regiones y dentro de cada una tiene z signo constante, indicado en la figura, anulándose z a lo largo de cada parábola. Cualquiera que sea la dirección *radial* elegida, hay un segmento de origen (a, b) sobre el cual toma z valores *positivos*, es decir, en *cada dirección* está la superficie encima del plano tangente $z = 0$, y sin embargo no existe ningún entorno circular del punto (a, b) en el cual la superficie permanezca a un lado de dicho

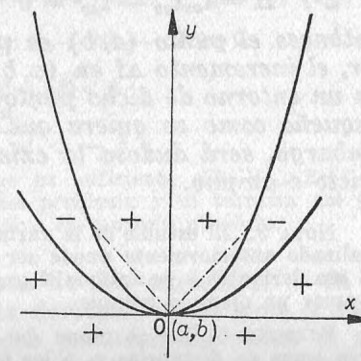


Fig. 233

plano, pues esos infinitos radios, *todos de longitud no nula, no forman ningún entorno superficial* (!).

Como excluyendo la recta "singular", aquí el eje x, por un entorno angular tan pequeño como se quiera, todos los valores de z en puntos próximos al $(0,0)$ son ya positivos, diremos que $(0,0)$ es un *casi-mínimo*.

NOTAS: 1. Hemos llamado *dudoso* al caso $H=0$ siguiendo la nomenclatura de los autores clásicos que lo dejan de lado, pero en realidad no lo es, como muestra el estudio anterior tomado de J. REY PASTOR: *Cálculo Infinitesimal* (citado en Cap. VI, nota VI, 2), donde se trata por primera vez.

2. Aquí la situación es diferente a la de las funciones de una variable, donde el comportamiento quedaba completamente decidido por el primer término no-nulo del desarrollo de TAYLOR, supuesta la función sucesivamente derivable (§ 40-3).

EJEMPLOS: 4. La función

$$[70\text{-}11] \qquad z = y^2 + x^4 + y^4 ,$$

tiene claramente un mínimo estricto en $(0,0)$ de valor 0; así el comportamiento de esta función en el entorno de $(0,0)$ es muy distinto al de la [70-10], *aunque ambas tengan los mismos términos de segundo grado* (reducidos a y^2). En efecto, si nos acercamos al origen por la parábola $y=2x^2$, en la [70-10] se conserva $z=-x^4<0$ y en la [70-11] se conserva $z=5x^4+16x^8>0$.

5. También en el caso dudoso $H=0$ puede haber extremos en sentido amplio en puntos aislados o no. Para la función

$$z = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$$

del ejemplo 2 del § 70-1, el hessiano vale

$$H = 48(x^2+y^2)^2 - 64(x^2+y^2) + 16 ,$$

el que se anula en los puntos críticos (§ 70-1) formando la circunferencia $x^2+y^2=1$. Dichos puntos corresponden a mínimo relativo en sentido amplio con valor -1.

En resumen, habrá quedado demostrado:

TEOR. 3. *Si una función* $f(x,y)$ *tiene derivadas segundas continuas, no simultáneamente nulas, en el punto* (a,b) *de un recinto* R *y cumple las condiciones*:

1º) $f_x = f_y = 0$ *en el punto* (a,b),

2º) $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ *en* (a,b);

entonces el punto (a,b) *es por lo menos casi-extremo, es decir, el incremento* Δf *en* (a,b) *se conserva de un mismo signo en un entorno de dicho punto si se excluye de él un ángulo tan pequeño como se quiera que incluya la recta "singular"; sin embargo, será dudosa la existencia de extremo en sentido estricto o amplio.*

NOTA 3. El estudio de la variación de las formas cuadráticas binarias realizado anteriormente puede ser útil aún en el caso de que la función no sea derivable y se aplique el examen directo recomendado en el § 70-1. Veamos un ejemplo notable.

EJEMPLO 6. En el plano de un triángulo hallar el punto $P(a,b)$ cuya suma de distancias r_k a los tres vértices $V_k(x_k,y_k)$, $k=1,2,3$, sea mínima.

Se ha de hacer mínima la función continua

$$[70\text{-}12] \qquad z = \sum_k r_k = \sum_k \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2} ,$$

que tendrá mínimo absoluto en un dominio circular que incluya el triángulo (§ 65-3, *c*).

La función es diferenciable excepto en los vértices V_k los que por tanto requerirán un examen especial. Las condiciones [70-2] dan las ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{x-x_k}{r_k} = 0 , \quad \sum_{k=1}^{3} \frac{y-y_k}{r_k} = 0 ,$$

que expresan que los tres versores (§ 60-1, *b*)

$$\mathbf{u}_k = \frac{x-x_k}{r_k}\,\mathbf{i} + \frac{y-y_k}{r_k}\,\mathbf{j} , \quad (k=1,2,3)$$

tienen suma 0 y entonces puede formarse con ellos un triángulo equilátero. Como $\mathbf{u}_k$ es paralelo a PV_k sigue que los tres vectores PV_k forman dos a dos ángulos $\frac{2}{3}\pi$, entonces el punto (a,b) buscado es aquel desde el cual se ven los tres lados del triángulo según el mismo ángulo $\frac{2}{3}\pi$, fácilmente obtenible mediante la construcción de los arcos capaces de dicho ángulo.

Sin embargo, dicho punto no existe si alguno de los ángulos del triángulo es mayor que $\frac{2}{3}\pi$, por ejemplo en V_1; pero entonces, el mínimo se da en V_1, donde precisamente no existen las derivadas parciales. En efecto, tomemos coordenadas rectangulares tales que $V_1(0,0)$, $V_2(1,0)$, $V_3(x_3,y_3)$. Las funciones r_2 y r_3 admitirán desarrollo de MAC-LAURIN alrededor del origen (§ 69-5) y por tanto [70-12] será de la forma

$$z(x,y) = r_1 + z(0,0) + c_1x + c_2y + \ldots$$

con

$$c_1 = -1 - \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2+y_3^2}} ; \quad c_2 = -\frac{y_3}{\sqrt{x_3^2+y_3^2}} .$$

Para que V_1 sea un mínimo relativo es suficiente que en un entorno se conserve positiva $z(x,y)-z(0,0)=r_1(1+c_1\cos\varphi+c_2\operatorname{sen}\varphi)+\ldots$, si φ es el ángulo que forma el radio vector del punto (a,b) con el semieje positivo x. Para ello basta sea $1+c_1\cos\varphi+c_2\operatorname{sen}\varphi>0$ para todo φ, o que se conserve $|c_1\cos\varphi+c_2\operatorname{sen}\varphi|<1$ equivalente a poner

$$[70\text{-}13] \quad (c_1^2-1)\cos^2\varphi + 2c_1c_2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + (c_2^2-1)\operatorname{sen}^2\varphi < 0.$$

La forma cuadrática [70-13] será definida negativa (§ 70-2, *a*) si

$$[70\text{-}14] \qquad \begin{vmatrix} c_1^2-1 & c_1c_2 \\ c_1c_2 & c_2^2-1 \end{vmatrix} = 1 - c_1^2 - c_2^2 > 0 ,$$

pues es siempre $c_2^2-1=-x_3^2/(x_3^2+y_3^2)\leqslant 0$.

La condición [70-14] equivale a

$$x_3/\sqrt{x_3^2+y_3^2} < -\tfrac{1}{2} ,$$

es decir, $\cos V_1 < -\frac{1}{2}$ para lo que es suficiente sea $V_1 > 2\pi/3$, como queríamos probar. La naturaleza del problema y el teorema del § 70-1 nos aseguran que este mínimo relativo es también absoluto.

3. Caso general en funciones de dos variables. — Si es m el orden mínimo en que alguna derivada no es nula y suponemos que $f(x,y)$ *tenga derivadas parciales de orden* m *en un entorno del punto* (a,b), *y sean continuas y no simultánea-*

mente nulas en (a, b) en virtud de [69-16] para m en lugar de $n+1$, se podrá escribir

$$f(a+h,\ b+k) - f(a,b) =$$
$$= \frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)} f(a,b) + o(\varrho^m),$$

y por el mismo método anterior resulta:

1º) Si la forma de grado m carece de raíces reales tiene signo constante, y según sea *definida positiva* o *negativa* resulta *mínimo* o *máximo* estricto.

2º) Si hay alguna raíz real de orden impar (tal sucederá seguramente si m es impar) no hay máximo ni mínimo, ni siquiera en sentido amplio.

3º) Si todas las raíces reales son de orden par hay casi-máximo o casi-mínimo (según sea el signo del primer coeficiente), y las rectas singulares están determinadas por dichas raíces reales.

4. Extremos relativos de las funciones de tres variables. — *a*) Para el caso de funciones de dos variables con derivadas segundas continuas y no simultáneamente nulas en (a, b), se ha visto (§ 70-2) que la existencia de extremo dependía de la conservación de signo de la forma cuadrática binaria en h, k:

[70-15] $$d^2f = f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2.$$

Teníamos seguramente mínimo estricto si la forma [70-15] era definida positiva (§ 70-2, teor. 1), y la discusión entonces realizada muestra que [70-15] es definida positiva cuando y sólo cuando es

[70-16] $$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \ , \quad H_{22} = f_{xx} > 0.$$

Es d^2f definida negativa, cuando y sólo cuando $-d^2f$ es definida positiva, y para ello es necesario y suficiente que

[70-17] $$H > 0 \ , \quad H_{22} = f_{xx} < 0 \ ,$$

dándose entonces seguramente máximo estricto.

Para $H < 0$ la forma [70-15] es indefinida y no hay extremo (§ 70-2, teor. 2).

En el caso [70-16], la forma [70-15] se conserva positiva y sólo se anula para $h = k = 0$. Pero la forma [70-15] puede no dejar de ser positiva siendo semidefinida, aunque entonces se anule para h y k no simultáneamente nulos. Esto ocurre cuando es

[70-18] $$H = 0 \ , \quad H_{22} = f_{xx} > 0.$$

Entonces teníamos casi-extremo, con recta singular y en general resultaba:

[70-19] $$H = 0 \ , \quad \begin{cases} f_{xx} > 0 \text{ ó } f_{yy} > 0 & \text{casi-mínimo,} \\ f_{xx} < 0 \text{ ó } f_{yy} < 0 & \text{casi-máximo.} \end{cases}$$

b) Para el caso de funciones $f(x, y, z)$ de tres variables con *derivadas segundas continuas y no simultáneamente nulas* en (a, b, c), la existencia de extremo dependerá también (cfr. § 70-6) de la conservación de signo de la forma cuadrática ternaria en h, k, l:

[70-20] $$d^2f = f_{xx}h^2 + f_{yy}k^2 + f_{zz}l^2 + 2f_{yz}kl + 2f_{zx}lh + 2f_{xy}hk.$$

Análogamente a [70-16] vimos (§ 63-7, teor. 1) un teorema general del que es caso particular:

TEOR. 1. *La forma* [70-20] *es definida positiva cuando y sólo cuando se cumple*

[70-21] $$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} > 0 \ ,$$

$$H_{33} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \ , \quad f_{xx} > 0.$$

NOTA. Existe sin embargo una importante distinción entre las formas de dos variables y las formas de más de dos variables. Para que [70-15] fuera semidefinida positiva era suficiente que se cumpliera [70-18]. Si en [70-21] se cambian $>, >, >$ por $=, \geqslant, \geqslant$ con algún signo de desigualdad, dicha condición ya *no es suficiente* para que [70-20] sea semidefinida positiva. Por ejemplo, la forma $(h+k+l)^2 - l^2$ para $h = k = 1$, $l = -2$ vale $-4 < 0$ y tiene $H = 0$, $H_{33} = 0$, $f_{xx} = 1 > 0$.

Lo mismo que en la deducción de [70-71], aquí también es d^2f definida negativa cuando y sólo cuando $-d^2f$ es definida positiva, y en las formas cuadráticas ternarias esto se traduce inmediatamente con el teorema 1 en el siguiente (§ 63-7, Corolario):

TEOR. 2. *La forma* [70-20] *es definida negativa cuando y sólo cuando se cumple*:

[70-22] $$H < 0 \ , \quad H_{33} > 0 \ , \quad f_{xx} < 0.$$

Si la forma d^2f no es ni positiva, ni negativamente definida y además $H \neq 0$, entonces es indefinida, lo que para formas cuadráticas ternarias da:

TEOR. 3. *La forma* [70-20] *es indefinida no degenerada, cuando y sólo cuando se cumple*:

[70-23] $$H \neq 0 \ , \quad H_{33} \leqslant 0 \ ;$$

o bien
$$Hf_{xx} < 0 \ , \quad H_{33} > 0.$$

Estos tres casos y los correspondientes a forma cuadrática

degenerada ($H = 0$) se aclaran con la interpretación geométrica, estudiada en el apartado siguiente:

5. **Interpretación geométrica y discusión.** — Si en [70-20] las variables h, k, l son coordenadas homogéneas de punto, la ecuación obtenida igualando la forma a cero representa una cónica. Si h, k, l son coordenadas homogéneas de las rectas de la radiación de vértice (a, b, c), la forma [70-20] igualada a cero representará un cono cuádrico (§ 62-5).

a) Las condiciones [70-21] ó [70-22] implican que la forma [70-20] tiene signo constante en todo el plano e igualada a cero carece de soluciones reales; se dice que en el plano representa una elipse imaginaria y en la radiación un cono imaginario.

b) Si $H = 0$, pero $H_{33} > 0$, la forma tiene signo constante, excepto para una terna que en el plano representa un punto singular y en la radiación una recta singular donde se anula la forma.

c) Si $H = 0$ y sus menores principales de segundo orden son nulos, la forma es un cuadrado, y resulta una recta singular en la interpretación plana, o un plano singular en la radiación.

En estos tres casos no hay división del plano proyectivo en regiones y por esto tiene la forma signo constante, pues se pueden unir dos puntos cualesquiera por trazo continuo, sin anularse la forma en el trayecto. Análogamente en la radiación no hay cambio de signo.

d) En todos los demás casos (excepto el de anulación idéntica) la ecuación obtenida igualando a cero la forma representa una elipse, hipérbola, parábola o par de rectas; en todos ellos queda dividido el plano en dos regiones en las cuales toma la forma signos opuestos. Análoga conclusión vale si h, k, l son coordenadas de las rectas de una radiación de vértice (a, b, c).

Resulta de este análisis que en el primer caso el punto (a, b, c) determina un valor máximo o mínimo en sentido estricto. También en el segundo, pero en sentido amplio si la función es de segundo grado, puesto que la forma se anula en una recta que pasa por el punto (a, b, c). Si la función no es cuadrática, el mismo razonamiento de § 70-2 permite demostrar que excluído un entorno cónico de la recta singular subsiste la propiedad de máximo o mínimo según el signo de f_{xx}.

En el tercer caso resulta máximo o mínimo en sentido amplio si la función es cuadrática, o bien casi-máximo o casi-mínimo con plano singular en el caso general; es decir, ex-

cluyendo un entorno diédrico arbitrario, subsiste la propiedad de máximo o de mínimo.

Como resumen tenemos (cfr. § 63-9, *c*):

TEOR. *Si una función* $f(x, y, z)$ *tiene derivadas segundas continuas y no simultáneamente nulas en el punto* (a, b, c) *de un recinto* R *y en dicho punto es* $f_x = f_y = f_z = 0$, *el carácter de este punto* (a, b, c) *será, para:*

$H > 0,\ H_{33} > 0,\ f_{xx} > 0$ * *mínimo estricto.*

$H < 0,\ H_{33} > 0,\ f_{xx} < 0$ *máximo estricto.*

$H \gtreqless 0$, H_{33} ó H_{22} ó H_{11} es < 0: *No hay máximo ni mínimo estricto ni amplio.*

$H = 0$, H_{33} ó H_{22} ó H_{11} es > 0:
- f_{xx} ó f_{yy} ó $f_{zz} > 0$ ** *casi mínimo con recta singular.*
- < 0 *casi máximo con recta singular.*

$H = 0$, $H_{33} = H_{22} = H_{11} = 0$:
- f_{xx} ó f_{yy} ó $f_{zz} > 0$ *casi mínimo con plano singular.*
- < 0 *casi máximo con plano singular.*

Si la función es cuadrática los casi extremos se convierten en extremos propiamente dichos, pero en sentido amplio.

EJEMPLO. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2zx - xy$.

En $a = b = c = 0$ es
$$\begin{cases} f_x \equiv 2x - y + 2z = 0 , \\ f_y \equiv -x + 2y + z = 0 , \\ f_z \equiv 2x + y + 6z = 0 , \end{cases}$$
con
$$H = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad , \quad H_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad , \quad f_{xx} = 2 > 0.$$

De aquí $f(x, y, z) \geqslant f(0, 0, 0) = 0$, donde es mínimo estricto.

6. **Extremos libres en el caso general.** — *a*) Para una función de n variables $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, exactamente con la misma demostración de § 70-1, puede formularse.

TEOR. 1. *Para que la función derivable* $f(\mathbf{x})$ *tenga en el punto* **a** *de un recinto* R *un máximo o mínimo relativo, en sentido estricto o amplio, es necesario que las derivadas parciales de* $f(\mathbf{x})$ *cumplan*

[70-24] $$f_1(\mathbf{a}) = 0 \quad , \quad f_2(\mathbf{a}) = 0, \ldots, f_n(\mathbf{a}) = 0 .$$

* Puesto que $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, tiene f_{yy} el mismo signo de f_{xx}; lo mismo vale en todos los casos en que $H_{33} > 0$.

** Seguramente no son nulos y tienen igual signo los dos coeficientes f_{xx}, f_{yy}, f_{zz} que entran a formar el menor positivo. Se puede probar que sólo cabe: los tres menores positivos (o dos positivos y uno nulo), los tres coeficientes de igual signo; dos menores nulos y el otro positivo, siendo de igual signo los dos coeficientes correspondientes y el otro nulo.

Aquí subsiste lo dicho en las notas 3 y 4 del § 70-1. Las raíces en número finito o infinito de las n ecuaciones [70-24] (tomando $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ como incógnitas), dan los puntos *críticos* o *extremantes*.

b) Para obtener *condiciones suficientes* que aseguran la *existencia de extremo relativo* en un punto a, supongamos primero que la función f(x) *tenga derivadas segundas en un entorno de dicho punto y sean continuas y no simultáneamente nulas en* a.

La fórmula de TAYLOR (§ 69-6) con el resto de LAGRANGE, teniendo en cuenta las condiciones necesarias [70-24] y la continuidad de las derivadas segundas, permite establecer

$$[70\text{-}25] \qquad f(a+h) - f(a) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)} f(a) + o(\varrho^2) ,$$

donde es

$$\varrho^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 .$$

Si introducimos los cosenos directores u_i del versor u cuya dirección y sentido son los del vector de extremos a y a + h, es decir, consideramos

$$h_i = \varrho u_i \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1 \ ,$$

la [70-25] se convierte en

$$[70\text{-}26] \qquad f(a+h) - f(a) =$$

$$= \frac{1}{2}\varrho^2\left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)} f(a) + o(\varrho^2) \quad ,$$

donde $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ son las coordenadas de un punto de la hiperesfera unitaria $\Sigma u_i^2 = 1$ que representa el versor u.

Para ϱ suficientemente pequeño, el signo del $\Delta f(a)$ es el mismo que el de la forma cuadrática en las u_i:

$$[70\text{-}27] \qquad T_2(u) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} u_i u_j \ , \quad \Sigma u_i^2 = 1 \ ,$$

donde las $f_{ij} = f_{ji}$ son las derivadas segundas de la función f en el punto a, *siempre que para cada versor* u^0 *en que se anula* $T_2(u)$ *excluyamos un entorno cónico arbitrariamente pequeño, es decir, los versores* u *que cumplan*

$$[70\text{-}28] \qquad \sum_{i=1}^{n} (u_i - u_i^0)^2 < \delta^2 \ , \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1 \ ,$$

donde

$$T_2(u^0) = 0 \ , \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^0 = 1.$$

Dichos entornos cónicos se convierten en entornos de la hiperesfera unitaria $\Sigma u_i^2 = 1$, cuyos puntos representan los versores u. En efecto, $T_2(u)$ es función continua del versor u, no nula por haber excluído el valor o valores u^0 de u donde se anula con sendos entornos [70-28]; luego su valor absoluto tiene un mínimo $m > 0$ en cada dominio componente del conjunto cerrado de la hiperesfera $\Sigma u_i^2 = 1$ complementario a la unión de los [70-28], por razonamiento análogo al visto en § 65-3, b_3,

aplicado no al plano, sino a la hiperesfera unitaria. Si se toma ϱ suficientemente pequeño para que en [70-26] sea $|o(\varrho^2)| < \frac{1}{4} m \varrho^2$, en cada uno de dichos dominios el signo de $\Delta f(a)$ será seguramente el mismo que el de $T_2(u)$ como queríamos demostrar.

c) DEF. Una forma cuadrática *n*-aria [70-27] se llama *definida* si nunca se anula, *positiva* o *negativa* según el signo correspondiente. La forma [70-27] se llama *indefinida* si cambia de signo. La forma [70-27] se llama *semi-definida*, si anulándose para algún versor u, conserva signo constante para los demás (cfr. § 63-7).

El *discriminante* de la forma [70-27] es el *hessiano* (§ 70-2)

$$[70\text{-}29] \qquad H = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

donde las derivadas segundas de la función dada se toman en el punto a que se considera.

La forma [70-27] se llama *degenerada* si $H = 0$, y sólo en este caso puede ser semidefinida, como se deduce de la teoría de formas cuadráticas (§ 63-7).

Si llamamos $H_n = H$ al hessiano [70-29], H_{n-1} al obtenido suprimiendo en H la última fila y la última columna, H_{n-2} al obtenido suprimiendo en H las dos últimas filas y las dos últimas columnas, y así sucesivamente, hasta $H_1 = f_{11}$, en dicha teoría de formas cuadráticas en el campo real vimos (§ 63-7) que la *forma cuadrática n-aria* [70-27] *es definida positiva si y sólo si*

$$[70\text{-}30] \qquad H_1 = f_{11} > 0 \ , \quad H_2 > 0, \ldots, H_n > 0.$$

De aquí resulta, pasando de T_2 a $-T_2$, que *la forma cuadrática n-aria* [70-27] *es definida negativa si y sólo si*

$$[70\text{-}31] \qquad (-1)^k H_k > 0 \ , \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \ ,$$

o sea

$$[70\text{-}32] \qquad H_1 < 0, \ H_2 > 0, \ H_3 < 0, \ \ldots, \ (-1)^n H_n > 0.$$

Para una forma [70-27] no-degenerada ($H \neq 0$), otro caso fuera de los anteriores, implica que la forma será indefinida.

En cambio, si la forma cuadrática [70-27] es degenerada ($H = 0$), puede ser semi-definida o indefinida y su complicado estudio se efectúa mediante los menores de H en forma análoga a la vista para las formas ternarias.

d) Las consideraciones y definiciones anteriores nos permiten establecer el siguiente teorema:

TEOR. 2. *Si una función* f(x) *de n variables* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *tiene derivadas segundas en un entorno del punto* a, *que además son continuas y no simultáneamente nulas en* a, *entonces es suficiente que se cumplan las ecuaciones* [70-24] *y la forma* [70-27] *sea definida para que exista extremo estricto en el punto* a: *mínimo si* [70-27] *es definida positiva y máximo si* [70-27] *es definida negativa.*

Si la forma [70-27] *es indefinida no existe seguramente extremo. Si llamamos* H_k *a los menores en diagonal del hessiano* $H (= H_n)$ *obtenidos considerando las primeras k filas y k columnas de* H, *se puede afirmar que existe mínimo estricto si se cumple* [70-24] *y* [70-30], *y existe máximo estricto si* —f *tiene mínimo estricto, o bien se cumple* [70-24] *y* [70-32].

Para $H \neq 0$, *en otro caso no existe seguramente extremo. Si* $H = 0$ *el caso es dudoso. Lo continúa siendo si la forma* [70-27] *es semi-definida,*

pero entonces hay casi-extremo en el sentido de que excluidos los entornos cónicos [70-28] se conserva el signo de $\Delta f(a)$.

e) Si es m el orden mínimo en que alguna derivada no es nula y suponemos que $f(x)$ tenga derivadas de orden m existentes en un entorno del punto a y sean continuas y no simultáneamente nulas en a, la fórmula de TAYLOR (§ 69-6) permite escribir

[70-33] $$\Delta f(a) = \frac{1}{m!}\, d^m f(a) + o(\varrho^m) ,$$

donde $d^m f(a)$ es la forma n-aria de grado m dada por [69-9] para $x = a$.

La misma sustitución

[70-34] $$h_i = \varrho u_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y razonamiento empleado en (*b*), reduce el comportamiento del signo de $d^m f(a)$ al de la forma n-aria

[70-35] $$T_m(u) = \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(m)} f(a) \; ; \; \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1 \; ;$$

siempre que excluyamos entornos cónicos [70-28] de versores u^0 donde sea $T_m(u^0) = 0$.

En definitiva se establece:

TEOR. 3. *Si una función* $f(x)$ *de* n *variables* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$ *tiene nulas en el punto* a *las primeras, segundas y demás derivadas sucesivas y es* m *el orden mínimo en que alguna derivada no es nula, existiendo en el entorno de* a *y siendo continuas en* a *dichas derivadas de orden* m, *entonces resulta:*

1º) *Si* $T_m(u)$ *dada por* [70-35] *carece de raíces reales y por tanto tiene signo constante, según sea definida positiva o negativa, entonces la función* $f(x)$ *tiene en* a *mínimo o máximo estricto respectivamente;*

2º) *Si* $T_m(u)$ *dada por* [70-35] *tiene alguna raíz real de orden impar (tal si* m *es impar) y por tanto es indefinida, entonces la función* $f(x)$ *no tiene extremo en* a, *ni en sentido amplio;*

3º) *Si* $T_m(u)$ *dada por* [70-35] *tiene raíces reales, todas ellas de orden par, y por tanto la forma es semidefinida, entonces el caso es dudoso, pero al menos la función* $f(x)$ *tiene en* a *casi-extremo, en el sentido de que excluidos los entornos cónicos* [70-28] *se conserva el signo de* $\Delta f(a)$.

7. Extremos de funciones con variables ligadas. — *a*) Los problemas de máximo y mínimo se plantean con frecuencia en forma tal que las variables no son todas independientes. Si por ejemplo queremos hallar el punto de la curva $\varphi(x, y) = 0$ más próximo al origen, habrá que hacer mínima la función de dos variables $z = f(x, y) = + \sqrt{x^2 + y^2}$; pero donde las variables no son independientes sino *ligadas* por $\varphi(x, y) = 0$.

Sea en general $u = f(x, y)$ una función diferenciable de dos variables, estando ligadas éstas por una ecuación diferenciable $\varphi(x, y) = 0$. Si se cumple la condición $\partial\varphi/\partial y \neq 0$ se podrá considerar $y = y(x)$ (§ 67-4), resultando $u = f[x, y(x)] = \Phi(x)$. Se trata de determinar los extremos de $\Phi(x)$ mediante f y φ, sin necesidad de conocer su expresión explícita ni la de $y(x)$. Podemos interpretar geométricamente el problema en el plano si suponemos que en él buscamos extremar

una función $f(x, y)$ sobre una determinada curva $\varphi(x, y) = 0$. Supuestas satisfechas las condiciones de existencia y continuidad, condición necesaria de extremo relativo será la anulación de la *derivada total* de $f(x, y)$, siendo $y = y(x)$ y obteniendo $y'(x)$ mediante $\varphi(x, y) = 0$. Llegamos así al sistema

[70-36] $$f_x + f_y y' = 0 \quad ; \quad \varphi_x + \varphi_y y' = 0 \; ,$$

o mejor al

[70-37] $$f_x dx + f_y dy = 0 \quad ; \quad \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \, .$$

En la primera de estas relaciones dx es incremento independiente, mientras que dy es diferencial funcional, determinada por la segunda, pudiéndose intercambiar los papeles si así conviene para las condiciones de existencia o de contorno. Esta última observación es importante, porque las condiciones [70-36] pueden no dar el extremo buscado (§ 70-1) si éste se alcanza en un punto de contorno (cfr. ejemplo 1).

Eliminando y' en [70-36] ó dx, dy en [70-37], se obtiene una ecuación que junto con la ecuación de enlace forman el sistema de dos ecuaciones

[70-38] $$f_x \varphi_y - f_y \varphi_x = 0 \quad , \quad \varphi(x, y) = 0 \; ,$$

con dos incógnitas x, y, cuyas soluciones son los puntos críticos o extremantes que puedan ser los extremos buscados en dichas condiciones de continuidad y diferenciabilidad.

NOTAS: 1. Sin estas restricciones, acaso existen (§ 70-1) otros extremos singulares, sin olvidar que deben considerarse los puntos de contorno.

2. La discusión de suficiencia se hace entonces mediante el estudio del signo de $d^2 f$ (§ 70-4, *a*), estando ligadas dx, dy, $d^2 y$ por las condiciones $d\varphi = 0$, $d^2\varphi = 0$ si consideramos dy diferencial funcional y dx incremento independiente.

3. Las ecuaciones [70-38], escritas en la forma

[70-39] $$\varphi_x : \varphi_y = f_x : f_y \quad , \quad \varphi(x, y) = 0 \quad ,$$

muestran que los puntos extremantes que no son singulares en $\varphi = 0$ (§ 71-4), son aquellos donde la curva $\varphi(x, y) = 0$ es tangente a una curva de nivel $f(x, y) =$ = constante de la función a extremar. La figura 234 muestra dos puntos críticos en tales condiciones A y B; si la variación de $u = f(x, y)$ es monótona, al atravesar en el mismo sentido las curvas de nivel, hay extremo en A pero no en B. Por el contrario, en un punto cuspidal o de retroceso (§ 71-4) para la curva $\varphi(x, y) = 0$, donde $\varphi_x = \varphi_y = 0$, pierde sentido la primera [70-39] pero se cumple [70-38], y en general hay extremo (punto C, fig. 234; ver § 70-8, *a*, nota 1 y ejemplo 2).

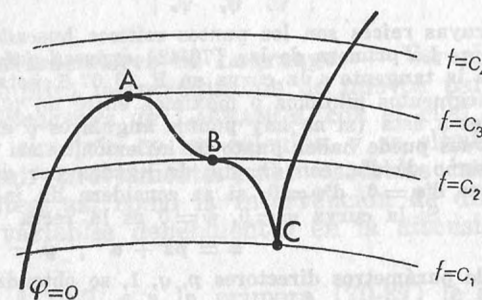


Fig. 234

b) Si se tratase de extremar una función de tres variables $u = \mathrm{f}(x, y, z)$ con dos ecuaciones de enlace $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$, representantes de una curva en el espacio, los puntos críticos o extremantes vendrían dados por el sistema:

[70-40] $$\frac{\partial(\mathrm{f}, \varphi, \psi)}{\partial(x, y, z)} = 0 \quad , \quad \varphi = 0 \quad , \quad \psi = 0 .$$

EJEMPLOS: 1. Mínima distancia del punto (1; 0) a la parábola $y^2 = 4x$.

Debe hacerse mínima $u = (x-1)^2 + y^2$ con la condición $y^2 = 4x$. Si consideramos $\Phi(x) = (x-1)^2 + 4x$ y anulamos $\Phi'(x) = 0$, encontramos el punto $x = -1$, donde no existe curva (!). La paradoja se explica por ocurrir el extremo buscado en $x = 0$, punto de contorno del campo $x \geqslant 0$ donde está definida la parábola. Como ésta existe para todo valor de y, es mejor no distinguir la variable independiente, y así [70-37] lleva a

[70-41] $$(x-1)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 \quad ; \quad -2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 .$$

La condición de compatibilidad de este sistema que es (§ 15-6, *b*) la anulación de su determinante, da $y(x+1) = 0$, que junto a la condición $y^2 = 4x$ determina el extremo buscado $y = 0$, $x = 0$.

Escribiendo la proporcionalidad entre los coeficientes de $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}y$ en las ecuaciones [70-41] se obtiene $(x-1)/(-2) = y/y = 1$ que da el resultado absurdo de antes: $x = -1$, pues al poner $y/y = 1$ se pierde la raíz $y = 0$ de $y(x+1) = 0$ quedando $x + 1 = 0$, o sea $x = -1$.

2. Distancia del origen O a la curva del espacio

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad , \quad \psi(x, y, z) = 0 .$$

La función a extremar en este caso es $u = x^2 + y^2 + z^2$.

De

$$\begin{cases} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0 , \\ \varphi_x\mathrm{d}x + \varphi_y\mathrm{d}y + \varphi_z\mathrm{d}z = 0 , \\ \psi_x\mathrm{d}x + \psi_y\mathrm{d}y + \psi_z\mathrm{d}z = 0 , \end{cases}$$

y las dos ecuaciones de enlace se obtiene el sistema

[70-42] $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \varphi = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad ,$$

cuyas raíces son los puntos críticos buscados P.

La primera de las [70-42] expresa que la recta OP es perpendicular a la tangente a la curva en P (§ 67-6, nota 3, y § 60-5, *c*), es decir, los segmentos mínimos o máximos entre un punto y una curva son normales a ésta (si no hay puntos angulares o extremos). Pero esto no basta, pues puede haber punto de inflexión, y así debe hacerse la discusión del signo de d^2u, con $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ ligadas por $\mathrm{d}\varphi = 0$, $\mathrm{d}\psi = 0$, dando d^2y, d^2z las $\mathrm{d}^2\varphi = 0$, $\mathrm{d}^2\psi = 0$, si se considera $\mathrm{d}x$ incremento independiente.

Si la curva $\varphi = 0$, $\psi = 0$ es la recta

$$x = pz + a \quad , \quad y = qz + b \quad ,$$

de parámetros directores p, q, 1, se obtendrá:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & p \\ 0 & -1 & q \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \text{es decir} \quad z + px + qy = 0 \quad ,$$

plano normal por el origen O a la recta dada y cuya intersección con ella da el punto buscado.

c) CASO GENERAL. Si se buscan los extremos de

$$u = \mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m) \quad ,$$

función diferenciable de $m + n$ variables, estando ligadas por m ecuaciones diferenciables:

[70-43] $$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m) = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad ,$$

supuestas independientes en las $y_1, \ldots, y_m$ (§ 68-3), esto es, cumpliendo

[70-44] $$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0 \quad ,$$

de modo que f depende realmente sólo de n variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, será condición necesaria de extremo (§ 70-6) fuera de los casos de discontinuidad o contorno, que se anule su diferencial total para valores cualesquiera de los *incrementos independientes* $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$, mientras que las *diferenciales funcionales* $\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2, \ldots, \mathrm{d}y_m$ vendrán dadas por $\mathrm{d}\varphi_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Así se obtiene el sistema lineal de $m + 1$ ecuaciones en las diferenciales $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n;\ \mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_m$:

[70-45] $$\begin{cases} \mathrm{df} \equiv \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n + \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 + \ldots + \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial y_m}\mathrm{d}y_m = 0, \\ \mathrm{d}\varphi_1 \equiv \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}\mathrm{d}y_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{d}\varphi_m \equiv \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n + \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_m}\mathrm{d}y_m = 0, \end{cases}$$

de las que por [70-44] se puede eliminar $\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2, \ldots, \mathrm{d}y_m$, dando como ecuación resultante

$$\mathrm{M}_1\mathrm{d}x_1 + \mathrm{M}_2\mathrm{d}x_2 + \ldots + \mathrm{M}_n\mathrm{d}x_n = 0 .$$

Ésta no encierra sino incrementos independientes $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$, y por el teorema de identidad de polinomios (§ 16-2), tomando aquí como variables $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$, es equivalente a las n condiciones

[70-46] $$\mathrm{M}_j(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m) = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

que junto a la m ecuaciones [70-43] determinan las $n + m$ coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m$ de los puntos críticos o extremantes. Aun habría que discutir el signo de $\mathrm{d}^2\mathrm{f}$ (§ 70-6), estando en ésta las $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}y_j$ y d^2y_k ligadas por $\mathrm{d}\varphi_i = 0$, $\mathrm{d}^2\varphi_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, lo que suele ser muy complicado.

8. Método de los multiplicadores de Lagrange. — Veremos ahora un método, que implica la introducción de nuevos parámetros llamados *multiplicadores* de LAGRANGE, con el cual se logra mayor sencillez y simetría en los cálculos, y se elimina la necesidad de distinguir previamente entre variables independientes y dependientes, así como la intervención de diferenciales segundas de variables dependientes en la discusión de suficiencia.

a) Si en el caso de § 70-7, *a* a la primera [70-37] le sumamos la segunda multiplicada por un parámetro λ se obtiene:

[70-47] $$(\mathrm{f}_x + \lambda\varphi_x)\mathrm{d}x + (\mathrm{f}_y + \lambda\varphi_y)\mathrm{d}y = 0 .$$

De aquí no resulta sin más la anulación de cada paréntesis,

pues las diferenciales dx, dy *no son independientes*. Pero si se elige λ de modo que se anule el coeficiente de dy, resultan:

[70-48] $$f_x + \lambda\varphi_x = 0 \quad , \quad f_y + \lambda\varphi_y = 0 \ ,$$

que conjuntamente con $\varphi(x, y) = 0$ dan tres ecuaciones para determinar los puntos críticos y el parámetro λ para cada uno.

LAGRANGE observó que las ecuaciones [70-48] corresponden a buscar los extremos *libres* (§ 70-1) de la función

[70-49] $$F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \ ,$$

considerando x, y, como variables *independientes*, y λ como constante. Por otra parte, para discutir el signo de d^2f basta considerar el de d^2F, pues sobre $\varphi = 0$ es $f = F$, y con esa condición $\varphi = 0$, será también $d^2f = d^2F$. Al calcular d^2F (§ 69-3, *b*), tendremos:

$$d^2F = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} F + \frac{\partial F}{\partial y} d^2y \ ,$$

y como por la segunda [70-48] es $F_y = 0$, por lo anterior quedará sobre $\varphi = 0$:

[70-50] $$d^2f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} F \ ,$$

es decir, el cálculo formal de $d^2F = d^2f$ se efectúa considerando también en F, a x é y como variables independientes.

EJEMPLO 1. Mínima distancia del punto (1; 0) a la parábola $y^2 = 4x$. Debe hacerse mínima $u = (x-1)^2 + y^2$ con la condición $y^2 - 4x = 0$, como en el § 70-7, ejemplo 1.

Si introducimos la función

$$F = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(y^2 - 4x) \ ,$$

definida, continua y derivable en *todo* el plano xy, el sistema [70-48] y [70-43] es aquí:

$$\begin{cases} F_x \equiv 2(x-1) - 4\lambda = 0 \ , \\ F_y \equiv 2y + 2\lambda y = 0 \ , \\ \varphi \equiv y^2 - 4x = 0 . \end{cases}$$

De la segunda se obtiene $y = 0$ ó $\lambda = -1$, pero sólo el primer valor da solución real $x = 0$, $y = 0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$. En dicho punto es $F_{xx} = 2$, $F_{yy} = 2 + 2\lambda = 1$, $F_{xy} = 0$, y por tanto $d^2u = d^2F = 2dx^2 + dy^2$, estando ligadas dx, dy por $d\varphi \equiv 2ydy - 4dx = 0$ que en $(0, 0)$ se reduce a $dx = 0$ y por tanto, queda en definitiva $d^2u = d^2F = dy^2$, que al ser definida positiva nos asegura el mínimo buscado. No era necesario (cfr. ejemplo 3) que $2dx^2 + dy^2$ fuere definida positiva, pero siéndolo aquí, esto ya era suficiente para asegurar mínimo, lo que por otra parte se ve directamente por la naturaleza geométrica del problema.

NOTA 1. Si $\varphi_y = 0$ no podrá hallarse un λ que anule el coeficiente de dy en [70-47]. Para los puntos singulares (§ 71-4) de la curva $\varphi(x, y) = 0$ donde $\varphi_x = \varphi_y = 0$, no podrán obtenerse las [70-48] ni aun permutando los papeles de x é y, y el método de LAGRANGE no es aplicable.

EJEMPLO 2. Para hallar el punto de la curva $\varphi(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$ (fig. 235) a mínima distancia del origen, hay que hacer mínima la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, con la condición $\varphi = 0$.

La curva $\varphi = 0$ tiene el punto cuspidal (1; 0) y ningún otro punto en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$ (como se ve buscando sus intersecciones con la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$), luego el punto cuspidal (1; 0) da la solución. Ahora bien, sus coordenadas verifican las ecuaciones $\varphi(x, y) = 0$ y $f_y + \lambda\varphi_y = 0$ para cualquier valor de λ, pero en cambio es

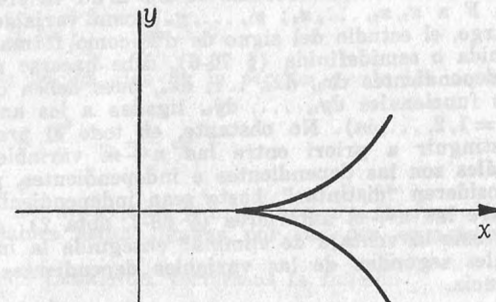


Fig. 235

$$f_x + \lambda\varphi_x = 2x + 3\lambda(x-1)^2 = 2 \neq 0 .$$

b) Para tratar análogamente el caso general (§ 70-7, *c*), dispongamos de m parámetros constantes arbitrarios λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, tales que al multiplicar en [70-45] las $d\varphi_i$ por ellos y sumar por columnas, se elijan de manera que se anulen los coeficientes de $dy_1, \ldots, dy_m$:

[70-51] $$\frac{\partial f}{\partial y_i} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} = 0 \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Quedará entonces

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\right) dx_1 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\right) dx_n = 0 \ ,$$

que por depender sólo de los incrementos independientes $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, es equivalente a las n ecuaciones

[70-52] $$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = 0 \ , \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Las [70-51], [70-52], junto con las [70-43], dan $2m + n$ ecuaciones en $2m + n$ incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ para determinar los puntos críticos buscados.

Obsérvese que las ecuaciones [70-51] y [70-52] corresponden a buscar los extremos *libres* (§ 70-6) de la función

[70-53] $$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m \ ,$$

considerando $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ como variables *independientes* y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ como constantes. Por otra parte, para discutir el signo de d^2f, basta considerar el de d^2F, pues sobre [70-43] es $f = F$, y con esas condiciones será también $d^2f = d^2F$. Al calcular d^2F (§ 69-3, *b*), tendremos:

$$d^2F = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + dy_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^{(2)} F +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial y_1} d^2y_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_m} d^2y_m \ ,$$

por las [70-51], sobre [70-43], quedará

[70-54] $$d^2f = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1 \frac{\partial}{dy_1} + \ldots + dy_m \frac{\partial}{\partial y_m} \right)^{(2)} F \quad ,$$

es decir, el cálculo formal de $d^2F = d^2f$ se efectúa considerando también en F a $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_m$ como variables independientes. Sin embargo, el estudio del signo de d^2F como forma cuadrática definida, indefinida o semidefinida (§ 70-6), debe hacerse respecto de los incrementos independientes $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, pues deben considerarse las diferenciales funcionales $dy_1, \ldots, dy_m$ ligadas a los anteriores mediante $d\varphi_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. No obstante, en todo el proceso no hay necesidad de distinguir a priori entre las $n + m$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_m$, cuáles son las dependientes e independientes, y para que las [70-43] se consideren "distintas", basta sean independientes respecto de m variables entre las $n + m$ anteriores (§ 68-3, nota 2). Además la introducción de F tiene la ventaja de eliminar enseguida la intervención de las diferenciales segundas de las variables dependientes en la discusión de suficiencia.

NOTA 2. Para extremar la función $u = f(x, y, z)$ sobre la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$, se forma $F = f + \lambda\varphi$, y los puntos críticos vienen dados por el sistema:

$$f_x + \lambda\varphi_x = 0 \quad , \quad f_y + \lambda\varphi_y = 0 \quad , \quad f_z + \lambda\varphi_z = 0 \quad , \quad \varphi = 0 .$$

La discusión de suficiencia se hace estudiando el signo de

$$d^2F = (F_x dx + F_y dy + F_z dz)^{(2)}$$

con dx, dy, dz ligadas por $\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = 0$.

En el caso particular de ser $u = z$, obtendríamos así los *extremos de una función z dada implícitamente por la ecuación* $\varphi(x, y, z) = 0$. Quedará $F = z + \lambda\varphi$, y los puntos críticos se determinan por

$$\varphi_x = 0 \quad , \quad \varphi_y = 0 \quad , \quad 1 + \lambda\varphi_z = 0 \quad , \quad \varphi = 0 .$$

La discusión de suficiencia se efectúa mediante $d^2F = \lambda d^2\varphi$, donde $d^2\varphi$ se calcula como si x, y, z fuesen independientes, pero ligando dx, dy, dz mediante $d\varphi = 0$.

EJEMPLOS: 3. Paralelepípedo de área mínima entre todos los de volumen dado C.

Basta extremar la mitad de su área $u = xy + yz + zx$, con la ecuación de condición $xyz = C$. Para esto se forma

$$F = xy + yz + zx + \lambda(xyz - C) \quad ,$$

y las [70-51] y [70-52] son aquí:

$$\left.\begin{aligned} y + z + \lambda yz &= 0 \\ x + z + \lambda xz &= 0 \\ y + x + \lambda xy &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{y+z}{yz} = \frac{z+x}{zx} = \frac{x+y}{xy} = -\lambda .$$

De $(y + z)x = (z + x)y$ se deduce $x = y$; análogamente $y = z$. Tendremos como punto crítico $x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt[3]{C}$, con $\lambda = -2/\sqrt[3]{C}$.

Por la naturaleza geométrica del problema podríamos ya concluir que ésta es la solución buscada, es decir, que el paralelepípedo de volumen dado y área mínima es el cubo, pero es instructivo completar la discusión analítica de suficiencia. El estudio del signo de d^2F en (x_0, y_0, z_0) se efectúa buscando en dicho punto el valor de las derivadas parciales

$$F_{xx} = F_{yy} = F_{zz} = 0 \quad ;$$
$$F_{xy} = 1 + \lambda z_0 = -1 = F_{yz}(x_0, y_0, z_0) = F_{zx}(x_0, y_0, z_0) .$$

A primera vista parece que

$$d^2F = -2(dxdy + dydz + dzdx)$$

es indefinida, sin que por tanto exista extremo, pero no es así, porque

dx, dy, dz *no son independientes*, sino que están ligadas mediante $d\varphi = 0$, es decir, en $x_0 = y_0 = z_0 \neq 0$ es $dx + dy + dz = 0$. Entonces resulta $d^2F = 2(dx^2 + dy^2 + dxdy) > 0$ *definida positiva*, pues el hessiano es

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0.$$

4. Hallar las longitudes de los ejes de la sección producida en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

por el plano $lx + my + nz = 0$.

Hay, pues, que buscar los máximos y mínimos de la función $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, cuyas variables están ligadas por las dos ecuaciones anteriores.

Para aplicar el método de LAGRANGE, formemos la función

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + 2\mu(lx + my + nz)$$

y resolvamos el sistema:

[70-55] $$\left\{\begin{aligned} x + \frac{x}{a^2}\lambda + l\mu &= 0 \\ y + \frac{y}{b^2}\lambda + m\mu &= 0 \\ z + \frac{z}{c^2}\lambda + n\mu &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \\ lx + my + nz &= 0 \end{aligned}\right.$$

Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y, la tercera por z y sumando, resulta $x^2 + y^2 + z^2 + \lambda = 0$, es decir, $\lambda = -r^2$.

Puestas las tres primeras ecuaciones en la forma

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= -\frac{al}{a^2 - r^2}\mu \\ \frac{y}{b} &= -\frac{bm}{b^2 - r^2}\mu \\ \frac{z}{c} &= -\frac{cn}{c^2 - r^2}\mu \end{aligned}\right.$$

elevándolas al cuadrado y sumando, se obtiene:

$$\frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{al}{a^2 - r^2}\right)^2 + \left(\frac{bm}{b^2 - r^2}\right)^2 + \left(\frac{cn}{c^2 - r^2}\right)^2$$

Sustituídos los valores de λ y μ en el sistema [70-55] se resuelve éste respecto de x, y y z, y resultan los valores que pueden hacer máximo o mínimo a r^2; pero es más ventajoso eliminar x, y y z en dicho sistema por venir expresada la resultante en función de $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Esto se logra a partir de las tres primeras ecuaciones de [70-55]:

$$\left\{\begin{aligned} x + \frac{a^2 l}{a^2 - r^2}\mu &= 0 \\ y + \frac{b^2 m}{b^2 - r^2}\mu &= 0 \\ z + \frac{c^2 n}{c^2 - r^2}\mu &= 0 \end{aligned}\right.$$

sumándolas una vez multiplicadas por l, m, n, respectivamente, y resulta:

$$\frac{a^2l^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2m^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2n^2}{c^2-r^2}=0\ ,$$

ecuación de segundo grado en r^2 que determina los cuadrados de los semiejes de la sección plana del elipsoide.

NOTA 3. La condición [70-44]

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_m)}\neq 0\ ,$$

debe reemplazarse por la de que sea no nulo por lo menos uno de los determinantes funcionales de las $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m$ respecto de m de las variables $x_1,\ldots,x_n;\ y_1,\ldots,y_m$, dando así una condición de independencia de los vínculos que no hace distingo entre las x y las y. Esta condición es esencial en la aplicación del método para poder determinar los multiplicadores λ, como se ha aclarado en el caso más sencillo en la nota 1 y ejemplo 2.

EJERCICIOS

1. Extremos de la función $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2+1$.
2. Extremos de la función $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$.
3. En el plano del cuadrilátero convexo $V_k(k=1,2,3,4)$ hallar el punto P cuya suma de distancias r_k a los vértices sea mínima.
4. Extremos de $z=x^2+xy+y^2+x+5y$; ecuación canónica de esta cuádrica.
5. Extremos de $z=(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)$.
6. Extremos de $z=e^{-x-2y}-e^{-2x-y}$ en el cuadrante $x\geqq 0,\ y\geqq 0$.
7. Extremos de $z=x^4+y^4-2(x-y)^2$.
8. Mínima distancia d entre las rectas $(x-5)/3=(y-5)/2=(z-7)/6=t_1$; $(x+11)/2=(y-12)/2=z+12=t_2$.
9. Hallar los triángulos en que es máximo el producto
$$u=\text{sen A . sen B . sen C}.$$
10. Siendo A, B, C tres ángulos positivos tales que $A+B+C=\frac{1}{2}\pi$, demostrar que se cumple siempre sen A . sen B . sen C $\leqq 1/8$.
11. En el plano de un triángulo hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de las distancias de los vértices a dicho punto sea mínima.
12. Extremos de: *a*) $z=y^2/(x^2+75)$ con la condición $x^2-xy+15=0$; *b*) $z=x^3+xy^2$ con la condición $xy-a^2=0$.
13. Mínima distancia del origen al plano $Ax+By+Cz+D=0$.
14. Extremar el producto $x^ay^bz^c$ de exponentes positivos constantes, con la condición $x+y+z=s$.
15. Entre todos los triángulos de perímetro $2p$ hallar el de área máxima. Entre todos los de área S hallar el de perímetro mínimo.
16. Entre los cuadriláteros cuyos lados tengan longitud dada, hallar el de área máxima.
17. Situar tres puntos A, B, C en el círculo $x^2+y^2\leqq 1$ de modo que en el triángulo ABC sea máximo: *a*) el producto de los lados; *b*) el área.
18. Hallar el parelelepípedo rectángulo de mayor volumen inscrito en el elipsoide $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)=1$.
19. Paralelepípedo rectángulo de máximo volumen entre todos los de área dada.
20. Por un punto $P(a,b,c)$ trazar el plano que forme con los planos coordenados el tetraedro de volumen mínimo V y hallar éste.
21. Resolver el problema del ejemplo 4 de § 70-8 para la *superficie de elasticidad* $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$.

22. Extremos de $u=x^2+y^2+z^2$ bajo la condición $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=1$. Interpretación geométrica.
23. Referida a ejes oblicuos de ángulo θ, hallar la longitud de los ejes de la cónica $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{33}=0$.
24. Demostrar que el valor máximo de $(ax^2+2bxy+cy^2)/(ex^2+2fxy+gy^2)$, (con $eg-f^2>0$), es igual a la mayor de las raíces de la ecuación en u: $(ac-b^2)-u(ag-2bf+ec)+u^2(eg-f^2)=0$ y aplicarlo a calcular el máximo de $(x^2+6xy+3y^2)/(x^2-xy+y^2)$.
25. Hallar el máximo del determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

para el cual $a_{r1}^2+\ldots+a_{rn}^2=H_r$, $(r=1,2,\ldots,n)$, donde H_r son constantes positivas dadas. Demostrar que si M es una cota superior de todos los módulos de los elementos de Δ, se tiene $|\Delta|\leqslant\sqrt{n^n}M^n$ (HADAMARD).

§ 71. APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

1. Cambio de coordenadas. — La fórmula de TAYLOR tiene multitud de aplicaciones en Geometría analítica. Tal es, por ejemplo, el cambio de coordenadas. Dada la ecuación $f(x,y)=0$, si se cambian los ejes por otros paralelos, las coordenadas antiguas y nuevas están ligadas por la relación:

$$x=a+x'\quad ;\quad y=b+y'\ ,$$

y la ecuación se transforma en esta otra:

$$f(a,b)+x'\,.\,f_x(a,b)+y'\,.\,f_y(a,b)+\ldots=0.$$

Análogamente, la ecuación $f(x,y,z)=0$ referida a los nuevos ejes x', y', z' relacionados por las fórmulas: $x=a+x'$, $y=b+y'$, $z=c+z'$ es:

$$f(a,b,c)+x'\,.\,f_x(a,b,c)+y'\,.\,f_y(a,b,c)+z'\,.\,f_z(a,b,c)+\ldots=0.$$

2. Centro de las cuádricas. — En particular, si se trata de una cuádrica y elegimos el punto (a,b,c) de modo que cumpla las condiciones:

$$f_x(a,b,c)=0\quad ;\quad f_y(a,b,c)=0\quad ;\quad f_z(a,b,c)=0\ ,$$

la ecuación referida a este nuevo origen carece de términos de primer grado. Por tanto, si un punto (x',y',z') está en la superficie, también el simétrico $(-x',-y',-z')$; es decir: el punto (a,b,c) es centro de simetría de la superficie.

Regla práctica. Para determinar el centro de una cuádrica, se resuelve el sistema que resulta de anular las tres derivadas primeras. (Cfr. § 62-1, nota).

Obsérvese que los términos de segundo grado no alteran

con la sustitución; luego, para referir la cuádrica a su centro (a, b, c), basta suprimir los términos de primer grado y poner como término constante $f(a, b, c)$.

Cuando el sistema de ecuaciones lineales sea incompatible, es decir, tenga soluciones infinitas, la cuádrica es de tipo paraboloide (§ 62-5); y es de tipo cilíndrico o se reduce a dos planos si el sistema es indeterminado (§ 62-5).

EJEMPLO. Sea la superficie

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + y^2 - xz + z^2 - 2y - 6 = 0.$$

Para determinar el centro pondremos:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(a, b, c) = 4a - 3b - c = 0 \\ f_y(a, b, c) = -3a + 2b - 2 = 0 \\ f_z(a, b, c) = -a + 2c = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = -7/2 \\ c = -3/2 \end{array}\right.$$

La ecuación referida a este centro es:

$$2x^2 - 3xy + y^2 - xz + z^2 - (5/2) = 0.$$

3. **Puntos simples u ordinarios de las curvas.** — Se llaman así los puntos en que no se anulan simultáneamente las dos derivadas parciales $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ del primer miembro de la ecuación $f(x, y) = 0$. Si es $f_y(a, b) \neq 0$ resulta y función continua y derivable de x en el entorno del valor a; y la derivada y' se calcula según se demostró en § 67-4. La ecuación de la tangente en el punto (a, b) es, por tanto (§§ 30-4 y 67-4, b),

[71-1] $$(x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b) = 0.$$

Si se anula $f_y(a, b)$, pero es $f_x(a, b) \neq 0$, resulta x función de y; la tangente, que entonces es paralela al eje y, viene también dada por la ecuación [71-1], cuya validez es, por tanto, general.

De otro modo: desarrollada la función por la fórmula de TAYLOR la ecuación de la curva adopta la forma:

[71-2] $$(x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b) + \ldots = 0 \ ,$$

donde los términos siguientes son de grado superior a uno respecto de $x - a$, $y - b$. La intersección con una recta cualquiera: $y - b = k(x - a)$ resulta sustituyendo $y - b$ por $k(x - a)$, y la ecuación obtenida tiene la raíz simple $x = a$; pero si la recta es precisamente la [71-1], resulta que la raíz $x = a$ es por lo menos doble; es decir, la recta es tangente a la curva, según el concepto *cartesiano*, y su ecuación se obtiene igualando a cero el binomio de primer grado en el desarrollo de TAYLOR. Ahora bien, hemos demostrado que esta ecuación [71-1] representa la tangente según la definición de § 30-4 y 5, que llamaremos *newtoniana*; luego queda demostrada la identidad de ambos conceptos en los puntos *ordinarios* o *simples*.

EJEMPLO. La tangente en el origen a la curva

$$2x - 3y + 4x^2 - y^3 = 0,$$

es la recta $2x = 3y$.

4. **Puntos múltiples de las curvas planas.** — a) Si en un punto (a, b) de la curva $f(x, y) = 0$, son nulas las derivadas

$$f_x(a, b) = 0 \ , \quad f_y(a, b) = 0 \ ,$$

el desarrollo de TAYLOR de $f(x, y)$ para el punto (a, b) multiplicado por 2 da, llamando ϱ a la distancia de (a, b) a (x, y):

[71-3] $$f_{xx}(x - a)^2 + 2f_{xy}(x - a)(y - b) + f_{yy}(y - b)^2 + o(\varrho^2) = 0.$$

Si la curva es algebraica, la intersección con cualquier recta $y - b = \lambda(x - a)$ trazada por (a, b) resulta sustituyendo $y - b$ por $\lambda(x - a)$, y en la ecuación obtenida aparece el factor $(x - a)^2$, luego el punto (a, b) es por lo menos doble en todas las secciones, y por esto se llama *punto múltiple* de la curva.

En el caso general, supuesto que el primer miembro de la ecuación implícita de la curva $f(x, y) = 0$ sea una *función uniforme con derivadas segundas continuas*, llamaremos *singulares* a los puntos no ordinarios (§ 71-3) y vendrán determinados por las coordenadas a y b que satisfacen simultáneamente a las tres ecuaciones:

[71-4] $$f(a, b) = 0 \ , \quad f_x(a, b) = 0 \ , \quad f_y(a, b) = 0.$$

Supongamos además que la función $f(x, y)$ admite el desarrollo de TAYLOR (§ 69-5)

[71-5] $$f(x, y) = \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{\nu!} d^\nu f(a, b) + o(\varrho^n).$$

Si los polinomios homogéneos de grado 1, 2, ..., $n - 1$ en $h = x - a$ y $k = y - b$: $df(a, b)$, $d^2f(a, b)$, ..., $d^{n-1}f(a, b)$ son idénticamente nulos en h y k y no lo es el $d^nf(a, b)$, se dice que el punto (a, b) es un *punto singular de orden n*, o en las curvas algebraicas *punto múltiple de orden n*. Para $n = 2$ tendremos un *punto doble* de la curva.

b) En el caso de punto doble (a, b), la forma de la curva en su entorno depende de las propiedades de la ecuación homogénea de 2º grado:

[71-6] $$d^2f(a, b) \equiv f_{xx} \cdot (x - a)^2 + 2f_{xy} \cdot (x - a)(y - b) + f_{yy} \cdot (y - b)^2 = 0 \ ,$$

que representa un par de rectas, reales y distintas, reales y coincidentes, o imaginarias, según que sea el hessiano H =

$= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0, = 0$, ó > 0, y entonces el punto doble se llama respectivamente *hiperbólico, parabólico* o *elíptico* (y también *crunodal, cuspidal* o *acnodal*).

Supuestas *continuas las derivadas terceras de* $f(x, y)$ *en* (a, b) tendremos:

TEOR. b_1) *En el caso de punto doble hiperbólico* ($H < 0$), *la curva en su entorno posee dos ramas reales respectivamente tangentes a las dos rectas reales distintas* [71-6].

b_2) *En el caso de punto doble elíptico* ($H > 0$), *existe un entorno reducido del mismo sin puntos de la curva y el punto* (a, b) *es aislado.*

b_3) *El caso de punto doble parabólico* ($H = 0$) *es dudoso en el sentido de que puede o no haber curva en su entorno, con ninguna, una o dos ramas, con o sin retroceso, pero siempre con una sola tangente dada por el par de rectas coincidentes* [71-6].

DEM. b_1) Si $H < 0$, sean $\lambda_1 \neq \lambda_2$ los coeficientes angulares del par de rectas reales distintas [71-6]. La intersección de [71-3] con las rectas del haz $y - b = \lambda(x - a)$, tendrá orden de multiplicidad superior a 2 si se anula el trinomio de segundo grado, es decir, si se elige una de las dos rectas [71-6] y éstas son, por tanto, tangentes según el concepto cartesiano para curvas algebraicas.

En el caso de funciones diferenciables cualesquiera, la existencia de intersección con las rectas $y - b = \lambda(x - a)$ resulta del teorema de la función implícita (§ 67-4); pues dividiendo por $(x - a)^2$, la ecuación

[71-7] $$2F(x, \lambda) = f_{xx} + 2f_{xy}\lambda + f_{yy}\lambda^2 + (x - a)[P(\lambda) + \delta] = 0$$

se satisface para $\lambda = \lambda_1$, $x = a$, y siendo

$$F_\lambda(a, \lambda_1) = f_{xy} + f_{yy}\lambda_1 \neq 0 \quad , \quad (\text{pues } H < 0) \quad ,$$

existe un punto que tiende al (a, b) cuando $\lambda \to \lambda_1$, es decir, una y sólo una rama de curva tangente a la recta de pendiente λ_1; y análogamente a la otra λ_2. Por tanto, las tangentes según el concepto cartesiano lo son también según la definición del § 30-5.

EJEMPLO 1. La lemniscata $y^2 - x^2 + x^4 = 0$ tiene punto doble hiperbólico en el origen.

b_2) Veamos ahora que todo punto *elíptico* de una curva es *aislado*. En efecto, si el hessiano en el punto doble (a, b) es $H > 0$, no se anula el trinomio [71-6] que figura en [71-3], y en un entorno suficientemente pequeño el término complementario, es menor que el mínimo de dicho trinomio, luego no hay puntos de la curva en ese entorno reducido.

EJEMPLO 2. La parábola cúbica punteada de NEWTON $y^2 = x^3 - x^2$ tiene un punto aislado en el origen.

b_3) Si $H = 0$ y el punto singular es doble, una de las dos derivadas segundas $f_{xx}(a, b)$, $f_{yy}(a, b)$ no es nula. Supongamos $f_{yy} \neq 0$, con lo que [71-7] puede ponerse en la forma

[71-8] $$2F(x, \lambda) = \frac{1}{f_{yy}}(f_{xy} + f_{yy} \cdot \lambda)^2 + (x - a)[P(\lambda) + \delta] = 0.$$

En general,

$$P(\lambda) = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(a, b)$$

no se anulará para $\lambda_1 = -f_{xy}/f_{yy}$, con lo que la curva [71-8] tiene un punto ordinario en $x = a$, $\lambda = \lambda_1$. En el entorno de este punto, la parte principal h^* del infinitésimo $h = x - a$ verifica

$$(f_{xy} + f_{yy} \cdot \lambda)^2 = -f_{yy} \cdot P(\lambda_1) h^* \quad ,$$

con lo que λ y, por tanto, $y - b = \lambda h$ es real cuando y sólo cuando h es de distinto signo que $f_{yy}P(\lambda_1)$. Además los dos valores de $k = \lambda h$ quedarán a uno y otro lado del $\lambda_1 = -f_{xy}/f_{yy}$. Es decir, la curva sólo existe a un lado de la recta $x = a$ y se compone de dos ramas situadas a uno y otro lado de su tangente común dada por el par de rectas coincidentes [71-6]: entonces, se dice que el punto doble (a, b) es una *cúspide o punto de retroceso de primera especie.*

En el caso excepcional de que sea $P(\lambda_1) = 0$, el punto $x = a$, $\lambda = \lambda_1$ es también singular para la curva [71-8] y hay que reiterar la discusión para ésta, pudiendo ocurrir que el punto (a, b) para la curva [71-3] resulte *aislado*, o con dos ramas coincidentes o distintas a un mismo o distinto lado de su tangente común (*punto doble con tangentes coincidentes* o *tacnodo*), o de retroceso de primera especie o, aunque deteniéndose ambas ramas en el punto singular (a, b), queden ambas a un mismo lado de su tangente común (*punto de retroceso de segunda especie*). En las curvas algebraicas este método de reducción lleva siempre a poder decidir cuando se está en uno de los casos anteriores, mientras que esto no se puede asegurar para curvas trascendentes en general.

EJEMPLOS: 3. La curva $y^2 + x^4 + y^4 = 0$ tiene un punto parabólico aislado en el origen.

4. La parábola cúbica cuspidal de NEWTON $y^2 - x^3 = 0$ tiene un punto de retroceso de primera especie en el origen.

5. La curva $(y - x^2)^2 = 0$ tiene todos sus puntos parabólicos (tacnodos) y consta de dos ramas coincidentes cada una de las cuales tiene todos sus puntos ordinarios.

6. La curva $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$ tiene en el origen punto doble con tangentes coincidentes o tacnodo quedando a un mismo lado de ésta ambas ramas ordinarias.

7. La curva $y^2 + yx^2 - x^4 = 0$ tiene en el origen punto doble con tangentes coincidentes o tacnodo quedando a distinto lado de ésta ambas ramas ordinarias.

8. La curva $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$ tiene en el origen un punto de retroceso de 2ª especie.

c) En el caso de punto múltiple (a, b) de orden n, supongamos *sean continuas en* (a, b) *las derivadas de orden* $n+1$ *de* $f(x, y)$. El desarrollo de TAYLOR (§ 69-5) para $f(x, y)$ toma la forma

[71-9] $$f(x,y) \equiv \frac{1}{n!} d^n f(a,b) + O(\varrho^{n+1}) = 0.$$

Ahora el comportamiento de la curva en el entorno de (a, b) depende de las propiedades de la ecuación homogénea de grado n en $h = x - a$. $k = y - b$:

[71-10] $$d^n f(a,b) \equiv \left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right]^{(n)} f(a,b) = 0 \quad ,$$

que representa un haz de n rectas, reales o imaginarias, que pasan por (a, b). Sean λ_i sus coeficientes angulares.

Si la curva [71-9] se corta por la recta genérica del haz $y - b = \lambda(x - a)$, la intersección tendrá orden de multiplicidad superior a n si se anula el polinomio [71-10], es decir si se elige una de las rectas [71-10] y éstas son, por tanto, tangentes según el concepto cartesiano. También lo son según el concepto newtoniano (§ 30-5), pues dividiendo por $(x - a)^n$, la ecuación

[71-11] $$n!F(x,\lambda) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(a,b) + (x-a)[P(\lambda)+\delta] = 0 \quad ,$$

se satisface para $\lambda = \lambda_i$, $x = a$. Cuando $x \to a$, para que siga verificándose [71-11]ha de ser $\lambda \to \lambda_i$, es decir, *toda rama real de la curva es necesariamente tangente a una recta real del haz* [71-10]; *en particular, si todo el haz* [71-10] *es imaginario (aunque tenga vértice real) el punto* (a,b) *es aislado.*

Examinemos separadamente cada recta del haz [71-10] para reconocer la naturaleza de la rama tangente correspondiente.

Sea λ_1 el coeficiente angular de una recta múltiple de orden p del haz [71-10].

Entonces [71-11] toma la forma

[71-12] $$n!F(x,\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)^p \psi(\lambda) + (x-a)[P(\lambda)+\delta] = 0 \quad ,$$

con $\psi(\lambda_1) \neq 0$.

Si $p = 1$, es $F'_\lambda(a, \lambda_1) \neq 0$, y la curva [71-12] tiene un punto ordinario en $x = a$, $\lambda = \lambda_1$, y de ahí deducimos que *a toda recta real simple del haz* [71-10] *le corresponde una rama ordinaria tangente a ella en* (a, b).

Si $p > 1$ y es

$$P(\lambda_1) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a,b) \neq 0 \quad ,$$

en este caso también la curva [71-12] tiene un punto ordinario en $x = a$, $\lambda = \lambda_1$. En el entorno de este punto, la parte principal h^* del infinitésimo $h = x - a$ viene dada por

[71-13] $$(\lambda - \lambda_1)^p \psi(\lambda_1) + P(\lambda_1) h^* = 0.$$

Si p es impar, en [71-13] $\lambda - \lambda_1$ cambia de signo con h, es decir, *si* $P(\lambda_1) \neq 0$, *a toda recta múltiple de orden impar del haz* [71-10] *de coeficiente angular finito le corresponde una rama real ordinaria sin inflexión. Si la recta* $x = a$ *forma parte del haz* [71-10] *se cambia* x *por* y.

Si p es par, en [71-13] es $\lambda - \lambda_1$ real y biforme de signos contrarios sólo para h, conservando signo contrario a $P(\lambda_1)/\psi(\lambda_1)$. Por lo tanto, *si* $P(\lambda_1) \neq 0$, *a toda recta real múltiple de orden par del haz* [71-10] *de coeficiente angular finito le corresponde un punto de retroceso de primera especie. Si la recta* $x = a$ *forma parte del haz* [71-10] *se cambia* x *por* y.

Si excepcionalmente $P(\lambda_1) = 0$, el punto $x = a$, $\lambda = \lambda_1$ es también singular para la curva [71-12] y hay que reiterar la discusión para ésta, apareciendo entonces otros tipos de singularidades. Sin embargo, en las curvas algebraicas, este método de reducción lleva siempre a decidir de qué tipo de singularidad se trata, lo que puede no ocurrir para curvas trascendentes en general.

EJEMPLOS: 9. La curva $y^5 + 2x^4 - xy^2 = 0$ tiene en el origen un punto triple de tangentes $x = 0$ (rama ordinaria con inflexión) é $y^2 = 0$ (retroceso de primera especie).

10. La curva $x^6 + y^6 - x^2y^3 = 0$ tiene en el origen un punto quíntuple de tangentes $y^3 = 0$ (rama ordinaria sin inflexión) y $x^2 = 0$ (retroceso de primera especie).

d) Si la curva es trascendente, la función $f(x, y)$ o sus derivadas pueden presentar discontinuidades, dando lugar a otros tipos de singularidades.

Son importantes los dos siguientes:

d_1) *Punto de detención.* La función cesa en él de existir bruscamente o se hace imaginaria. Por ejemplo, el origen es un punto de detención de la curva $y = x \ln x$.

d_2) *Punto anguloso.* Dos ramas de la curva se detienen en él bajo inclinación distinta; es debido a una discontinuidad de la pendiente de la curva. Por ejemplo, el origen es punto anguloso de la curva $y = x/(1 + e^{1/x})$ (§ 30-5, ejemplo 1).

5. Posición de una superficie respecto del plano tangente. — Para estudiar la forma de una superficie $z = f(x, y)$ en el entorno de un punto (a, b, c), conviene desarrollar la función por la fórmula de TAYLOR, deteniendo el desarrollo en un término más o menos avanzado, según el grado de aproximación que se desee en dicho estudio.

Limitándola en los términos de segundo grado, se tiene:

$$z = f(x,y) = f(a+h, b+k) = f(a,b) + hf_x(a,b) + \\ + kf_y(a,b) + \tfrac{1}{2}(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2) + o(\varrho^2).$$

La ecuación del plano tangente en el punto (a, b, c) es, llamando z_t a la cota, para distinguirla de la cota z sobre la superficie:

$$z_t - c = (x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b) \quad ,$$

o sea:

$$z_t = f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b).$$

Restando ambas ecuaciones tenemos para el incremento de la ordenada de la superficie respecto de la ordenada del plano tangente:

$$2(z - z_t) = f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 + o(\varrho^2) \quad ,$$

y según la variación de signo de este trinomio, así será la po-

sición de la superficie en el entorno del punto (a, b, c) respecto de su plano tangente en él.

La discusión, ya realizada en § 70-2, conduce a este resultado:

$H > 0$. La superficie está situada, en un cierto entorno, a un solo lado del plano tangente. El punto se llama *elíptico*.

$H < 0$. La superficie tiene puntos en ambos lados en todo entorno del punto, el cual se llama *hiperbólico*.

$H = 0$. Excluído un entorno angular de la recta singular definida por el trinomio, la superficie está de un solo lado del plano tangente. El punto se llama *parabólico*.

La intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el cilindro $H(x, y) = 0$, si existe, consta en general de una o varias curvas, llamadas *líneas parabólicas* de $z = f(x, y)$, y es el lugar de los puntos parabólicos que separa las regiones de puntos elípticos de la de puntos hiperbólicos.

El caso especial $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$ exige el estudio de la forma cúbica, cuártica, etc., y se llama *dudoso* (§ 70-3).

EJEMPLO. En el toro, superficie engendrada por una circunferencia que gira en torno de un eje de su plano que no la corta, son elípticos los puntos de la semicircunferencia cóncava respecto del eje, son hiperbólicos los de la semicircunferencia convexa y son parabólicos los puntos de los paralelos más alto y más bajo.

6. Intersección de la superficie con su plano tangente. — *a*) En los puntos de intersección debe ser $z = z_t$ y recíprocamente; luego la ecuación de dicha intersección proyectada sobre el plano xy es [71-3]. La curva tiene, pues, doble el punto (a, b) de contacto y sus tangentes vienen dadas, según § 71-4, *b*, por los términos cuadráticos del desarrollo, o sea, [71-6]; y son reales y distintas, o confundidas, o imaginarias, según que sea $H < 0$, $= 0$ ó > 0, es decir, según que el punto sea *hiperbólico, parabólico* o *elíptico*.

En el caso del punto hiperbólico la intersección se compone, por tanto, de dos ramas que se atraviesan en el punto (a, b); en el caso del punto elíptico el punto de contacto es aislado, puesto que en un entorno de él la superficie no corta al plano; en el caso parabólico la curva tiene un punto aislado, con tangente real única o bien dos ramas distintas o coincidentes con tangente única, como se ve en los ejemplos 3 a 8 del § 71-4.

Las bisectrices de las dos tangentes en la curva de intersección se llaman *tangentes principales* de la superficie en el punto (a, b). Si el punto es elíptico las tangentes a la curva son imaginarias, pero las bisectrices son reales. En efecto, en ambos casos se determinan las tangentes principales haciendo girar los ejes un ángulo tal que se anule el término rectangular en hk; entonces las dos tangentes, sean reales o imagina-

rias, quedan simétricas respecto de los ejes, puesto que sus coeficientes angulares son opuestos.

Si el punto es parabólico la tangente única es principal y la otra es su perpendicular.

Cuando la superficie es simétrica respecto de un plano normal la intersección de éste con un plano tangente, es eje de simetría de la curva, y por tanto es una tangente principal.

NOTA. El problema de la discusión de los puntos dobles de las curvas y el problema de la posición de una superficie $z = f(x, y)$ respecto de su plano tangente son idénticos. La curva de ecuación $f(x, y) = 0$ puede interpretarse como intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $z = 0$, que es tangente en el punto (a, b) si son nulas las derivadas $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$.

Recíprocamente, la naturaleza de los puntos de una superficie depende de la del punto doble en la sección producida por cada plano tangente. En los párrafos anteriores se ha visto la correlación entre ambos problemas.

b) En particular, si la superficie es una cuádrica (§ 62-4, *c*), la intersección se compone de dos rectas reales si la superficie es un hiperboloide de una hoja o un paraboloide hiperbólico. Para este último caso se ve inmediatamente, pues siendo (§ 62-3, *b*) la ecuación del paraboloide $z = (x^2/2p) - (y^2/2q)$, el desarrollo de TAYLOR termina en los términos de segundo grado, y no habiendo término complementario, la intersección del plano tangente en (a, b) con la superficie, viene dada por la ecuación $(h^2/p) - (k^2/q) = 0$, que representa dos rectas.

En las cuádricas con centro (§ 62-2) de ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_1 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_2 \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad (\varepsilon_i = \pm 1) \; ,$$

resulta ser

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a^2} + \varepsilon_2 \frac{z}{c^2}\, z_x = 0, \\ \varepsilon_1 \frac{y}{b^2} + \varepsilon_2 \frac{z}{c^2}\, z_y = 0, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \varepsilon_2 \frac{1}{c^2} {z_x}^2 + \varepsilon_2 \frac{z}{c^2} z_{xx} = 0, \\ \varepsilon_1 \frac{1}{b^2} + \varepsilon_2 \frac{1}{c^2} {z_y}^2 + \varepsilon_2 \frac{z}{c^2} z_{yy} = 0, \\ z_x z_y + z z_{xy} = 0, \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$\begin{aligned} H &= z_{xx} z_{yy} - {z_{xy}}^2 = \\ &= \frac{1}{z^2}\left(-\varepsilon_2 \frac{c^2}{a^2} - {z_x}^2 \right)\left(-\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{c^2}{b^2} - {z_y}^2 \right) - \frac{{z_x}^2 {z_y}^2}{z^2} = \\ &= \frac{c^4}{a^2 b^2 z^2}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{c^2 x^2}{a^2 z^2} + \varepsilon_2 \frac{c^2 y^2}{b^2 z^2} \right) = \\ &= \frac{c^4}{a^2 b^2 z^2}\left[\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{c^2}{z^2}\left(1 - \varepsilon_2 \frac{z^2}{c^2} \right) \right] = \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{c^6}{a^2 b^2 z^4} \; , \end{aligned}$$

por lo que para el elipsoide ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$) y el hiperboloide elíptico ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$) es siempre $H > 0$ y para el hiperboloide de una hoja ($\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$) es siempre $H < 0$. En resumen, aplicando la discusión, resulta: El *elipsoide*, el *hiperboloide de dos hojas* y el *paraboloide elíptico tienen todos sus puntos elípticos*; el *hiperboloide de una hoja* y el *paraboloide hiperbólico tienen sus puntos hiperbólicos.*

Finalmente, si se considera un cilindro y colocamos, por ejemplo, sus generatrices paralelamente al eje x, su ecuación es: $z = f(y)$, por tanto: $f_x = 0$, $f_{x^2} = 0$, $f_{xy} = 0$, y así es $H = 0$, es decir: Todos los puntos de un *cilindro* cualquiera son *parabólicos.*

La intersección con el plano tangente se reduce a la generatriz, considerada como doble.

Lo mismo acontece con los conos y con todas las superficies desarrollables (§ 75-3).

En los puntos parabólicos, las dos rectas tangentes se reducen a una sola doble; la dirección de esta tangente única y la perpendicular a ella son las dos direcciones principales de la superficie.

En el caso del cilindro, o en general en las superficies desarrollables, como la intersección se reduce a una recta, la tangente es ella misma.

Ejercicios

1. Dada la cuádrica $xy + yz + zx - 2x - y - 3z + 1 = 0$, referirla a los ejes trazados paralelamente por el nuevo origen $(-2; 0; 3)$; hallar el centro y referirla a él.

2. En la cuádrica del ejercicio anterior, hallar el plano diametral conjugado de la dirección $(2; -3; 6)$ y el diámetro conjugado del plano $x - 2y + 2z = 0$. Hallar las direcciones principales y reducir la cuádrica a la forma canónica. (Cfr. § 62, ejercicio 6).

3. En la cuádrica del ejercicio 1, dar la ecuación del cono asintótico desde el origen de coordenadas y desde su centro.

4. Hallar el plano polar del punto P(3; 2; 1) respecto de la cuádrica $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \frac{1}{2}$, así como el cono tangente cuyo vértice es el mismo punto. Hallar el polo del plano $2x - 3y + z = 1$. Ecuación canónica de la cuádrica. (Cfr. § 62, ejercicio 5).

5. Si en un punto ordinario (a, b) de la curva $f(x, y) = 0$, la recta [71-1] tiene con ésta un contacto de segundo orden (§ 38-8), el punto es de inflexión (§§ 33-9 y 40-2). Hallarlos para una curva que tenga derivadas terceras continuas.

6. Hallar los puntos ordinarios de inflexión de las curvas:

$$1^{\circ})\quad x^3 + px^2 + q^2y = 0; \qquad 2^{\circ})\quad y = x^4 - 6x^2.$$

7. Hallar los puntos múltiples de la estrofoide recta $x^2(x + c) - y^2(c - x) = 0$. (Cfr. § 23-9, ejemplo 3).

8. Hallar los puntos múltiples de la curva

$$(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 - (a^4 + b^4) = 0.$$

9. Para el caso excepcional que en [71-8] sea $P(\lambda_1) = 0$, es decir, $P(\lambda) = 2(\lambda - \lambda_1)P_1(\lambda)$, llamando

$$Q(\lambda) = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)} f(a, b), \quad \Delta = f_{yy}(a, b) \cdot Q(\lambda_1) - [P_1(\lambda)]^2,$$

demostrar: 1º) Si $\Delta > 0$, el punto (a, b) es parabólico aislado; 2º) Si $\Delta < 0$, el punto (a, b) es parabólico doble a tangentes coincidentes (tacnodo) y entonces averiguar cuándo ambas ramas estarán o no a un mismo lado de la tangente común; 3º) Si $\Delta = 0$ y el caso no vuelve a ser excepcional, entonces cuando en general $Q(\lambda_1) \neq 0$, el punto (a, b) es de retroceso de 2ª especie y sólo es de 1ª especie si además es $Q(\lambda_1) = 0$. Aplicar este método a los ejemplos 3 a 8 de § 71-4.

10. Estudiar los puntos múltiples de las curvas:

$$1^{\circ})\quad 4x^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 + cy)^2 = 0 \quad ;$$
$$2^{\circ})\quad y^2 + x^5 - 2xy^4 = 0.$$

11. Estudiar en el origen las curvas: 1º) $x^4 + y^4 - x^2y = 0$; 2º) $x^5 - y^5 - 2x^3y + xy^2 = 0$.

12. Puntos de detención de las curvas $y = (1 + e^{1/x})/(1 - e^{1/x})$ (cfr. § 25-4, ejemplo 2), $y = \operatorname{Arc\,tg}(1/x)$.

13. Estudiar en el origen la curva $y = x \operatorname{Arc\,tg}(1/x)$.

14. Carácter del punto $(0, 0)$ y posición respecto del plano tangente, de las superficies $z = f(x, y)$, donde el segundo miembro corresponde a las siguientes funciones: 1º) § 70, ejercicio 1; 2º) § 70, ejercicio 2; 3º) § 70, ejercicio 4; 4º) § 70, ejercicio 5; 5º) § 70, ejercicio 7; 6º) § 71, ejercicio 7; 7º) § 71, ejercicio 8; 8º) ejemplos 3 a 8 de § 71-4; 9º) § 71, ejercicio 10.

NOTAS AL CAPÍTULO XIX

I. El método de cuadrados mínimos. — No siempre son susceptibles de medición directa las magnitudes físicas y, con frecuencia, se pueden medir solamente ciertas funciones de ellas, procurando que el número de ecuaciones así obtenidas para determinar las n incógnitas, sea muy superior a n. Desde el punto de vista puramente matemático, tales ecuaciones forman sistema incompatible, y se trata de encontrar los valores de $x, y, \ldots, t$, que las satisfagan con la mejor aproximación posible. Como medida del error con que el sistema de valores x, y, z (y análogamente para n variables) satisface al sistema de ecuaciones

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad \ldots, \quad f_m(x, y, z) = 0,$$

se adopta, siguiendo a Gauss (cfr. Apéndice IV, vol. III), la suma de cuadrados de los errores, es decir, el número $\Sigma f_r(x, y, z)^2$. Si este error total cuadrático es nulo, lo son todos sus sumandos y la terna x, y, z satisface exactamente al sistema, caso que no se presenta por los inevitables errores de medida, debiendo limitarse a obtener la terna que haga mínimo dicho error cuadrático. Éste es el método de Gauss, llamado por tal causa de *cuadrados mínimos.*

El caso más sencillo, al cual se procura reducir cualquier otro sustituyendo las funciones f_r por aproximaciones lineales, es aquél en que las ecuaciones son de primer grado. Sean, pues, las ecuaciones propuestas (llamadas *ecuaciones de condición*):

$$a_rx + b_ry + c_rz = l_r \;, \quad (r = 1, 2, \ldots, m) \;,$$

donde los números l_r son los valores medidos para diversos sistemas de coeficientes, y se trata de encontrar los valores de x, y, z, que hacen mínima a la suma:

$$\text{[XIX-1]} \qquad \Sigma(a_rx + b_ry + c_rz - l_r)^2.$$

Condición necesaria para ello es la anulación de las tres derivadas:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum a_r(a_r x + b_r y + c_r z - l_r) = 0 \\ \sum b_r(a_r x + b_r y + c_r z - l_r) = 0 \\ \sum c_r(a_r x + b_r y + c_r z - l_r) = 0 \end{array}\right. ,$$

o sea:

$$\left\{\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z = [al] \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z = [bl] \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z = [cl] \end{array}\right.$$

designando brevemente $\sum a_r b_r = [ab]$ y análogamente las otras sumas. Este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas suele llamarse sistema de *ecuaciones normales* o *sistema normal*, y la matriz de su determinante es el producto de la traspuesta (§ 61-4) de la matriz de coeficientes del sistema propuesto por ésta (§ 61-3); luego, el determinante es suma (§ 13-4, c_1) de todos los cuadrados de los menores de tercer orden de la matriz de dicho sistema propuesto (§§ 15-7 y 13-6) y solamente es nulo si en éste no hay tres ecuaciones linealmente independientes (§ 14-3). Para ver que la solución única del sistema normal hace mínimo el error cuadrático, mejor que el método general es sustituir $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$; y resulta la anterior suma de cuadrados más otra análoga (por anularse los dobles productos), luego la terna obtenida es la solución buscada, ya que al incrementar arbitrariamente x, y, z, aumenta la suma [XIX-1].

Obsérvese que para el cálculo de los coeficientes de las ecuaciones normales a partir de las ecuaciones de condición, pueden emplearse tablas de cuadrados (Cap. VII, nota II), pues no sólo es $[aa] = \sum a_r^2$, sino también $[ab] = \frac{1}{2}\{[(a+b)(a+b)] - [aa] - [bb]\}$.

Es circunstancia importante para la resolución numérica del sistema de ecuaciones normales (Cap. XVII, nota IV), que éste sea simétrico.

EJEMPLO. Calcular la velocidad inicial y la aceleración de un movimiento uniformemente acelerado, conocidos los espacios recorridos en los tiempos siguientes:

$t=0$	1	3	5	7	10	
$e=0$	5	20	38	58,5	101	

La ecuación es:

$$e = vt + \tfrac{1}{2}\gamma t^2, \quad \text{o sea:} \quad vt + \tfrac{1}{2}\gamma t^2 - e = 0$$

de incógnitas v, γ y coeficientes t, $\frac{1}{2}t^2$, e.

El sistema de ecuaciones normales es

$$184v + 748\gamma = 1674{,}5 \quad ; \quad 748v + 3277\gamma = 7050{,}75 \quad ;$$

de donde se despeja la solución probable $v = 4{,}9$; $\gamma = 1{,}03$.

II. **Bibliografía.** — 1. Sobre el contenido de este capítulo tratan las obras citadas en Cap. XVIII, nota III.

Un estudio monográfico de métodos para determinar extremos de las funciones de varias variables, conteniendo los de SCHEEFFER, STOLZ y V. VON DANTSCHER, así como uno original fundado en la aplicación de los teoremas de STURM y de BUDAN-FOURIER (§ 41) para conocer las raíces reales de $f(x_1, y) = 0$ para x_1 pequeño y así determinar las ramas reales de la función algebraica definida por $f(x, y) = 0$ cuando x es pequeño, está en:

D. R. CURTISS: *Maxima and minima of functions of two or more variables.* (Math. Monographs, vol. 1, págs. 1-43, Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1941).

2. Sobre puntos singulares de las curvas planas tratan los textos de Geometría analítica (cfr. Cap. XVII, nota V, 4) y también los tratados

de Análisis matemático (citados en Cap. XVIII, nota III), por ejemplo los de VALLÉE POUSSIN o VALIRON.

También los estudian los tratados monográficos sobre curvas, tales por ejemplo los ya antiguos de:

F. G. TEIXEIRA: *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches.* (Vol. I, Gauthier-Villars, París-Coimbra, 1908; vol. II, Coimbra, 1909),

o el catálogo completo con estudio de propiedades geométricas y aplicaciones de:

G. LORIA: *Curve piane speciali algebraiche e trascendenti. Teoria e storia* (2 vols., Milán, 1930); *Curva sghembe speciali algebriche e trascendenti* (2 vols., Zanichelli, Bolonia).

Breve obra de tipo clásico geométrico es

H. WIELEITNER y E. BEUTEL: *Algebraische Kurven.* (2 vols.; Sammlung Göschen, Leipzig, 1914).

Una introducción a la Geometría algebraica moderna destinada a debutantes, con numerosos ejemplos y ejercicios, de texto riguroso que facilita el acceso a las memorias clásicas e inicia en las diversas técnicas algebraicas modernas es:

R. J. WALKER: *Algebraic curves.* (Univ. Princeton, 1950).

El estudio de los puntos singulares y de las inflexiones de las curvas planas algebraicas forma la base del desarrollo inmenso que ha ido tomando la Geometría algebraica a partir de la famosa memoria de V. A. PUISEUX: *Recherches sur les fonctions algébriques,* (Journal de Math. pures et appliquées, ts. *15* y *16*, 1850-1), de los trabajos de G. F. B. RIEMANN (cfr. § 116-2), del concepto fundamental de transformación birracional sistemáticamente estudiado por L. CREMONA, su descomposición en transformaciones cuadráticas hecha por M. NOETHER para aplicarlo a los puntos singulares, con resultados que, como ha mostrado F. ENRIQUES, también pueden conseguirse mediante los desarrollos de PUISEUX, ligados a las investigaciones de I. HALPHEN sobre las ramas de las curvas algebraicas. Una bibliografía muy completa sobre la cuestión se encuentra en

F. AMODEO: *Sintesi storico-critica della geometria delle curve algebriche.* (Conte, Nápoles, 1945).

Siempre vigente y fundamental en muchos aspectos, de riquísimo contenido y que da una orientación clásica general sobre Geometría algebraica es:

F. ENRIQUES y O. CHISINI: *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* (4 vols., Zanichelli, Bolonia, 1915-34).

Introducción didáctica y elemental es la de

J. REY PASTOR: *Geometría algebraica* (curso autografiado, Bs. As., 2ª ed., 1940).

Teoría sintética de las curvas planas, con investigaciones y resultados originales, contiene

J. REY PASTOR: *Teoría geométrica de la polaridad.* (Acad. Madrid, 1929).

En forma muy asequible y didáctica, la teoría clásica está tratada en

L. GODEAUX: *Géométrie algébrique* (Vol. 1, 1948; vol. 2, 1949; Sciences et Lettres, Lieja);

y mucho más elementalmente en la breve obra:

L. GODEAUX: *Introduction à la géométrie supérieure* (2ª ed., Masson, París, 1946).

Con el mismo objetivo y rico contenido que incluye valiosos e importantes ejemplos bien desarrollados, está:

J. G. SEMPLE y L. ROTH: *Introduction to algebraic geometry.* (Clarendon Press, Oxford, 1949).

Desde el punto de vista funcional citaremos sólo dos obras valiosísimas. El gran tratado clásico, completo y de lúcida exposición:

P. APPELL y E. GOURSAT: *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (Vol. 1: *Étude des fonctions analytiques sur une surface*

de RIEMANN, 2ª ed., 1929; vol. 2: P. FATOU: *Fonctions automorphes*, 1930; Gauthier-Villars, París);
y el más breve de

G. A. BLISS: *Algebraic Functions* (Colloquium Publ. nº 16; American Math. Soc., Nueva York, 1933).

Geometría algebraica sobre cuerpos (§ 17-1, *a*), con fundamentación moderna plenamente rigurosa, se encuentra en los libros, que prescinden de toda intuición geométrica:

B. L. VAN DER WAERDEN: *Einführung in die algebraische Geometrie* (Springer, Berlín, 1939; Dover, Nueva York, 1945),

A. WEIL: *Foundations of algebraic geometry* (Colloquium Publ., nº 29; American Math. Soc., Nueva York, 1946).

Combinando métodos estrictamente algebraicos con objetivos puramente geométricos y representando así un excelente puente entre la antigua y la nueva Geometría algebraica está:

W. V. D. HODGE y D. PEDOE: *Methods of algebraic geometry* (Vol 1, 1947; vol. 2, 1952; Cambridge Univ. Press).

Una didáctica exposición de métodos modernos se encuentra en:

B. SEGRE: *Lezioni di geometria moderna.* Vol. 1: *Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi* (Zanichelli, Bolonia, 1948).

En la 2ª ed. y siguientes del vol. I (Cap. IV, nota III, 1) se cita:

C. CHEVALLEY: *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable* (Math. Surv. VI; American Math. Soc., Nueva York, 1951).

CAPÍTULO XX

GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

§ 72. VECTOR DEPENDIENTE DE UNO O MÁS PARÁMETROS: CURVAS Y SUPERFICIES

1. Función vectorial. — *a*) Dado como *campo de variación de un parámetro* un conjunto de *números reales u*, constituído generalmente por un intervalo abierto $(a, b) : a < u < b$, o por un intervalo cerrado $[a, b] : a \leqslant u \leqslant b$, hagamos corresponder a cada uno de sus *escalares u* un valor bien determinado del vector **r**, definiendo así la *función vectorial uniforme de escalar* (cfr. § 60-1):

[72-1] $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u).$$

Si todos los vectores $\mathbf{r}(u)$ tienen un mismo origen fijo O, sus extremos P describen un cierto lugar de puntos dependientes de *u*, escribiéndose también:

[72-2] $$\mathrm{P} = \mathrm{P}(u).$$

Así en un espacio puntual afín queda determinado un conjunto mediante el vector de posición OP, dado por la función vectorial [72-1] que toma sus valores en el espacio vectorial asociado (Cap. XVII, nota III). Generalmente supondremos que estamos en un espacio euclídeo de tres dimensiones.

La expresión lineal del vector **r** (§ 60-3):

[72-3] $$\mathbf{r}(u) = \mathrm{P}(u) = \mathrm{x}(u)\,.\,\mathbf{i} + \mathrm{y}(u)\,.\,\mathbf{j} + \mathrm{z}(u)\,.\,\mathbf{k}$$

pone en correspondencia biunívoca la función vectorial [72-1] con la terna de funciones escalares $x = \mathrm{x}(u)$, $y = \mathrm{y}(u)$, $z = \mathrm{z}(u)$ que en el espacio tridimensional afín da la terna de coordenadas cartesianas del punto variable P. La forma vectorial [72-1] constituye una expresión más sintética de dicha terna de funciones escalares.

En el espacio de *n* dimensiones, la expresión lineal [72-3] se convierte en

[72-4] $$\mathbf{r}(u) = \mathrm{P}(u) = \mathrm{x}_1(u)\,.\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{x}_2(u)\,.\,\mathbf{e}_2 + \ldots + \mathrm{x}_n(u)\,.\,\mathbf{e}_n.$$

Las definiciones de *límite* y *continuidad* son análogas a las conocidas para funciones escalares (§§ 24-1 y 25-1).

Diremos que es

$$\lim \mathbf{r}(u) = \mathbf{l} \quad \text{para} \quad u \to u_0 \ ,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

[72-5] $$|\mathbf{r}(u) - \mathbf{l}| < \varepsilon \quad \text{para} \quad 0 < |u - u_0| < \delta.$$

Es $\mathbf{r}(u)$ *continua* en u_0 si está definida en un entorno de u_0 y existe y es $\lim \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u_0)$ para $u \to u_0$, es decir, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

[72-6] $$|\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad |u - u_0| < \delta.$$

Es $\mathbf{r}(u)$ *continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$, si además de serlo en cada punto interior del intervalo, lo es a la derecha en a y a la izquierda en b (§ 25-5).

b) Dado en el plano paramétrico (u, v) un recinto o un dominio (§ 64-5), hagamos corresponder a cada uno de sus puntos un valor bien determinado del vector $\mathbf{r}$, definiendo así la *función vectorial uniforme de varios escalares* (cfr. § 64-1):

[72-7] $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

Como antes, aplicados los vectores $\mathbf{r}(u, v)$ a un mismo origen fijo O, sus extremos P definen un cierto lugar de puntos dependientes de los parámetros u, v, y la expresión lineal del vector $\mathbf{r}$:

[72-8] $$\mathbf{r}(u, v) = \mathrm{P}(u, v) = \mathrm{x}(u, v) . \mathbf{i} + \mathrm{y}(u, v) . \mathbf{j} + \mathrm{z}(u, v) . \mathbf{k},$$

pone en correspondencia biunívoca la función vectorial [72-7] con la terna de funciones escalares $x = \mathrm{x}(u, v)$, $y = \mathrm{y}(u, v)$, $z = \mathrm{z}(u, v)$ que en el espacio tridimensional afín da la terna de coordenadas cartesianas del punto variable P.

Las definiciones de límites, continuidad y sus variantes, son análogas a las conocidas para las funciones escalares (§ 65).

c) Las desigualdades $|x| \leqslant |\mathbf{r}| \leqslant |x| + |y| + |z|$ prueban que para la continuidad del vector $\mathbf{r}$ es necesario y suficiente la continuidad simultánea de sus componentes x, y, z. Análogamente $\mathbf{r}$ tiende a un límite cuando y sólo cuando lo mismo ocurre simultáneamente con sus componentes.

2. Derivación de una función vectorial. — *a*) Para u fijo pero $\Delta u = h \neq 0$ variable, es función de h el vector cociente incremental $[\mathbf{r}(u + h) - \mathbf{r}(u)]/h$. Si existe su vector límite:

[72-9] $$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(u + h) - \mathbf{r}(u)}{h} = \mathbf{r}'(u) \ ,$$

la llamaremos *derivada de* $\mathbf{r}(u)$ *respecto de* u, que se escribe también $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}u$.

Referida la función vectorial [72-1] al vector de posición [72-2], su derivada se expresa también por $\mathrm{P}'(u)$, si el origen

O es fijo, independiente de u. Si O fuese también función de u, sería

[72-10] $$\mathbf{r}'(u) = \mathrm{P}'(u) - \mathrm{O}'(u).$$

De la expresión lineal [72-3], bajo la hipótesis de ser *constante* (independiente de u) *el sistema de referencia* **i**, **j**, **k**, se deduce:

[72-11] $$\mathbf{r}'(u) = \mathrm{x}'(u) . \mathbf{i} + \mathrm{y}'(u) . \mathbf{j} + \mathrm{z}'(u) . \mathbf{k} \ ,$$

siendo necesario y suficiente la existencia simultánea de las respectivas derivadas de las funciones componentes x, y, z para la existencia de $\mathbf{r}'(u)$ (§ 72-1, *c*). Entonces, *las componentes del vector derivado son las derivadas de las componentes del vector dado.*

En forma análoga (cfr. § 38-1) se definen las *derivadas sucesivas*:

[72-12] $$\mathbf{r}''(u) = \mathrm{d}\mathbf{r}'/\mathrm{d}u \ , \quad \mathbf{r}'''(u) = \mathrm{d}\mathbf{r}''/\mathrm{d}u \ , \ \ldots,$$

para cuya existencia es necesario y suficiente que lo mismo ocurra simultáneamente en sus componentes, pudiéndose derivar término a término (**i**, **j**, **k** constantes) la expresión lineal [72-11].

El *vector diferencial* $\mathrm{d}\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}'(u) . h$, será múltiplo del vector derivado $\mathbf{r}'$ (cfr. § 34-1) y diferirá del vector $\Delta\mathbf{r}$ en un vector infinitésimo $\mathbf{o}(h)$ de orden superior a h (§ 24-3), siendo

[72-13] $$\Delta\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}'(u) . h + \mathbf{o}(h).$$

b) Respecto de un vector [72-7], función de varias variables escalares, se pueden definir (§ 66-1) las *derivadas parciales*, en caso de existir:

[72-14] $$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(u + h, v) - \mathbf{r}(u, v)}{h} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u(u, v),$$
$$\lim_{k \to 0} \frac{\mathbf{r}(u, v + k) - \mathbf{r}(u, v)}{k} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v(u, v).$$

De la expresión lineal [72-8] resulta

[72-15] $$\mathbf{r}_u = \mathrm{P}_u = x_u . \mathbf{i} + y_u . \mathbf{j} + z_u . \mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_v = \mathrm{P}_v = x_v . \mathbf{i} + y_v . \mathbf{j} + z_v . \mathbf{k}.$$

Una función vectorial [72-7] es *diferenciable* en (u, v) si su incremento es función vectorial lineal homogénea de los incrementos independientes $\mathrm{d}u$ y $\mathrm{d}v$, a menos de un infinitésimo vectorial $\mathbf{o}(\varrho)$ de orden superior al principal $\varrho = +\sqrt{(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2}$, y en este caso (§ 66-4) la parte principal (§ 24-3) del incremento es el *vector diferencial total*:

[72-16] $$\mathrm{d}\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v)\,\mathrm{d}u + \mathbf{r}_v(u, v)\,\mathrm{d}v.$$

3. **Reglas de derivación.** — *a*) Mediante la expresión lineal de la derivada [72-11] es inmediata la demostración (§ 32) de las fórmulas:

[72-17] $$\frac{d}{du}(\lambda \mathbf{r}) = \frac{d\lambda}{du}\mathbf{r} + \lambda\frac{d\mathbf{r}}{du},$$

[72-18] $$\frac{d}{du}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} + \frac{d\mathbf{b}}{du},$$

supuestas dadas la función escalar $\lambda(u)$ y vectoriales $\mathbf{r}(u)$, $\mathbf{a}(u)$, $\mathbf{b}(u)$, todas ellas derivables en el punto u.

b) La derivación del producto escalar [60-20] efectuada en su segundo miembro, demuestra que

[72-19] $$\frac{d}{du}(\mathbf{a}.\mathbf{b}) = \frac{d}{du}(\sum_1^3 a_i b_i) = \sum_1^3 (a_i' b_i + a_i b_i') = \mathbf{a}'.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{b}',$$

es decir, *un producto escalar se deriva en forma análoga a la de un producto ordinario.*

De aquí deducimos que si un vector variable y derivable tiene módulo constante, su cuadrado escalar es constante y entonces $d(\mathbf{r}.\mathbf{r})/du = 2\mathbf{r}.\mathbf{r}' = 0$, de donde (§ 60-5, *c*):

[72-20] $$|\mathbf{r}(u)| = \text{Const.} \quad \text{implica} \quad \mathbf{r}'(u) \perp \mathbf{r}(u),$$

es decir, *un vector variable y derivable de módulo constante es perpendicular a su vector derivado.*

NOTA. Si $r = |\mathbf{r}|$ representa (§ 60-1, *a*) el módulo del vector $\mathbf{r} \neq 0$ y éste es derivable, también existirá

(*) $$r' \equiv \frac{d}{du}|\mathbf{r}| = (\mathbf{r}.\mathbf{r}')/r,$$

pues es $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \mathbf{r}.\mathbf{r}$. No debe confundirse $r' = |\mathbf{r}|'$ con $|\mathbf{r}'|$, en general distintos, pues si $\mathbf{r}'$ no es paralelo a $\mathbf{r}$, entonces por la desigualdad de CAUCHY - SCHWARZ (Cap. XVII, nota II, *b*) es $|\mathbf{r}.\mathbf{r}'| < r.|\mathbf{r}'|$, de donde por (*) sería en este caso $r' < |\mathbf{r}'|$. Así, por ejemplo, en [72-20] es $r' \equiv 0$, sin que esto ocurra para $|\mathbf{r}'|$.

c) De la forma en determinante [60-32] se deduce inmediatamente la *regla de derivación del producto vectorial análoga a la del producto ordinario,*

[72-21] $$\frac{d}{du}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}'.$$

d) Si $\mathbf{r}$ es función vectorial de u y u es función escalar del escalar s, la *regla de derivación de función de función* se escribe

[72-22] $$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{du}.\frac{du}{ds},$$

como en § 32-3, con la misma demostración allí vista.

4. **Derivada direccional. Tensor derivado.** — *a*) Si en un recinto del espacio euclídeo (u, v, w) tenemos definido un campo escalar (por ejemplo de densidades, o de temperaturas, etc.) que hace corresponder a cada punto Q de coordenadas cartesianas rectangulares u, v, w un escalar dado por la función escalar de punto $f(Q) = f(u, v, w)$ y ésta es diferenciable, existe entonces su vector gradiente (§ 66-6, *b*):

[72-23] $$Df(Q) = f_u(Q).\mathbf{i} + f_v(Q).\mathbf{j} + f_w(Q).\mathbf{k},$$

cuyas componentes, según cada dirección φ dan las derivadas escalares

[72-24] $$f_\varphi(Q) = f_u(Q).\varphi_1 + f_v(Q).\varphi_2 + f_w(Q).\varphi_3$$

de $f(Q)$ en dicha dirección (§ 66-5 y 6).

b) Análogamente, podemos considerar definido en un recinto del espacio (u, v, w) un campo vectorial (por ejemplo, de velocidades, o de fuerzas, o de intensidades eléctricas, etc.) que hace corresponder a cada punto Q de coordenadas cartesianas rectangulares u, v, w un vector dado por la función vectorial de punto $\mathbf{r}(Q) = \mathbf{r}(u, v, w)$. Si ésta es diferenciable § 72-2, *b*), podremos poner en la dirección φ:

$$\Delta_\varphi \mathbf{r}(Q) = \mathbf{r}_u(Q)du + \mathbf{r}_v(Q)dv + \mathbf{r}_w(Q)dw + \mathbf{o}(|\Delta_\varphi Q|),$$

donde consideramos el vector

[72-25] $$\Delta_\varphi Q = du.\mathbf{i} + dv.\mathbf{j} + dw.\mathbf{k}.$$

Así existirá entonces la *derivada direccional* dada por el vector:

[72-26] $$\mathbf{r}_\varphi(Q) = \lim_{|\Delta_\varphi Q| \to 0} \frac{\mathbf{r}(Q + \Delta_\varphi Q) - \mathbf{r}(Q)}{|\Delta_\varphi Q|} = \mathbf{r}_u(Q).\varphi_1 + \mathbf{r}_v(Q).\varphi_2 + \mathbf{r}_w(Q).\varphi_3$$

de dirección en general distinta a la φ, pero que al venir dado por una función lineal homogénea en los cosenos directores φ_1, φ_2, φ_3 de la dirección φ, representa un tensor de rango dos (§ 63-1, *b*), que es el *tensor derivado* $D\mathbf{r}(Q) = d\mathbf{r}/dQ$ *de la función vectorial de punto* $\mathbf{r}(Q)$, designado también por $\nabla \mathbf{r}$ (§ 91-6).

Si la función vectorial $\mathbf{r}(Q)$ tiene las componentes $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, la primera componente de la derivada direccional [72-26] será $x_u\varphi_1 + x_v\varphi_2 + x_w\varphi_3$, y análogamente las otras dos. En particular, las componentes del vector $\mathbf{r}_u(Q)$ serán x_u, y_u, z_u, y análogamente las de $\mathbf{r}_v(Q)$ y $\mathbf{r}_w(Q)$, formando así las nueve coordenadas, elementos de la matriz (§ 63-1, *b*) del tensor derivado $D\mathbf{r}(Q)$.

El vector diferencial $d_\varphi \mathbf{r}(Q)$ es igual al producto del ten-

sor derivado $\mathrm{Dr}(Q)$ por el vector $\Delta_\varphi Q$ (§ 63-2), es decir, el tensor $\mathrm{Dr}(Q)$ transforma el vector $\Delta_\varphi Q$ de dirección φ en el vector diferencial $d_\varphi \mathbf{r}(Q)$, de dirección en general distinta a la φ.

c) Análogamente, la derivación en un punto dado de una función diferenciable tensorial de punto de rango dos, daría una correspondencia de tensores respecto de las direcciones del espacio (u, v, w) según una ley homogénea en los cosenos directores de cada dirección. El conjunto de estos tensores dependientes de tres tensores de segundo rango, es decir de 9 vectores o de 27 escalares, daría un tensor de tercer rango (§ 60-2, *f*). En la misma forma se definirían tensores derivados de rango superior cualquiera.

5. **Fórmula de Taylor de una función vectorial.** — *a*) Si en u_0 existe (finita) la derivada vectorial $\mathbf{r}^{(n)}(u_0)$ de la función [72-1] se podrá escribir la *fórmula de* TAYLOR:

$$[72\text{-}27] \quad \mathbf{r}(u_0+h) = \mathbf{r}(u_0) + h\mathbf{r}'(u_0) + \frac{h^2}{2!}\mathbf{r}''(u_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(u_0) + \mathbf{T}_n ,$$

con

$$[72\text{-}28] \quad \mathbf{T}_n = \mathbf{o}(h^n) ,$$

deducida por [72-3] y [72-11] con el mismo razonamiento que en el caso escalar (§ 39-3).

Si imponemos a $\mathbf{r}(u)$ la condición más restrictiva de que en un entorno de u_0 sea $\mathbf{r}^{(n)}(u)$ continua y exista $\mathbf{r}^{(n+1)}(u)$, el término complementario vectorial $\mathbf{T}_n$ tendrá por componentes las formas de LAGRANGE

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}x^{(n+1)}(u_0+\theta_1 h) , \quad \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(u_0+\theta_2 h) , \quad \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}z^{(n+1)}(u_0+\theta_3 h) ,$$

$(0 < \theta_i < 1,\ i = 1, 2, 3)$, pero con θ_i en general *distintas*, por lo que aquí será en general

$$[72\text{-}29] \quad \mathbf{T}_n \neq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\mathbf{r}^{(n+1)}(u_0+\theta h)$$

para todo θ de $0 < \theta < 1$.

Si $\mathbf{r}^{(n+1)}(u)$ es *continua* en u_0 se obtiene un caso particular de [72-28] (con $n+1$ en lugar de n):

$$[72\text{-}30] \quad \mathbf{T}_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[\mathbf{r}^{(n+1)}(u_0) + \mathbf{o}(1)] ,$$

donde $\mathbf{o}(1)$ es un vector que tiende a 0 para $h \to 0$ (cfr. § 24-3, *b*).

Se dirá que la función [72-1] es *analítica* en un entorno de u_0 si admite (cfr. § 23-8, *c*) un desarrollo en serie convergente:

$$[72\text{-}31] \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1(u-u_0) + \mathbf{a}_2(u-u_0)^2 + \dots + \mathbf{a}_n(u-u_0)^n + \dots,$$

donde los vectores $\mathbf{a}_n$ son independientes de u (pero no de u_0).

Entonces existen las derivadas de cualquier orden de la función $\mathbf{r}(u)$ en el entorno de u_0, obtenibles derivando [72-31] término a término (§ 43-5, *b*) y es (§ 44-1, *b*):

$$[72\text{-}32] \quad \mathbf{r}^{(n)}(u_0) = n!\mathbf{a}_n , \quad (n = 0, 1, 2, \dots) ,$$

con la convención de poner $\mathbf{r}^{(0)}(u) = \mathbf{r}(u)$.

La fórmula [72-32] demuestra también aquí (cfr. § 44-1) la unicidad del desarrollo [72-31].

Llamaremos también *desarrollo o serie de* MAC-LAURIN al correspondiente a $u_0 = 0$:

$$[72\text{-}33] \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(0) + u\mathbf{r}'(0) + \frac{u^2}{2!}\mathbf{r}''(0) + \dots + \frac{u^n}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(0) + \dots$$

b) Si en (u_0, v_0) existe la diferencial total n-ésima de la función vectorial [72-7], se podrá escribir también la *fórmula de* TAYLOR *para varios parámetros*:

$$[72\text{-}34] \quad \mathbf{r}(u_0+h,\ v_0+k) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}\left(h\frac{\partial}{\partial u} + k\frac{\partial}{\partial v}\right)^{(p)} \mathbf{r}(u_0, v_0) + \mathbf{o}(\varrho^n),$$

con $\varrho = +\sqrt{h^2+k^2}$ (§ 69-5).

6. **Representación paramétrica y vectorial de las curvas: tangente.** — *a*) DEF. *Curva* C en el espacio $\mathbf{E}_3$ es el conjunto de puntos (x, y, z) descrito por tres funciones continuas

$$[72\text{-}35] \quad x = \mathrm{x}(u) , \quad y = \mathrm{y}(u) , \quad z = \mathrm{z}(u) ,$$

al variar u en un intervalo finito o infinito. Las [72-35] se llaman *ecuaciones paramétricas* de la curva (§ 29-2), de la que mediante [72-3] se obtiene inmediatamente su *representación vectorial* [72-1] ó [72-2]. Si el intervalo de variación del parámetro es finito $(u_0 \leqslant u \leqslant u_1)$ se tiene un *arco* de curva; y ésta se llama *cerrada* si $\mathbf{r}(u_0) = \mathbf{r}(u_1)$. Si a dos valores distintos u y u' del parámetro que no sean los extremos corresponde un mismo punto, éste se llama *múltiple*. La curva se

llama *simple* (o de JORDAN) cuando carece de puntos múltiples, es decir, cuando sus puntos [72-35] están en correspondencia biunívoca y continua con un intervalo de variación paramétrica. Las curvas que no son planas se llaman *alabeadas*. Para el caso en que la curva sea la trayectoria de un punto móvil en las aplicaciones, si el parámetro u representa el tiempo, las [72-35] definen el movimiento sobre la trayectoria.

b) *Tangente a una curva*. Las curvas que se presentan en las aplicaciones tienen tangente en cada punto; es decir: la recta P_0P_1 que une el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la curva con otro $P_1(x_1, y_1, z_1)$ que tiende hacia P_0 (es decir, que sus coordenadas tienen como límites las coordenadas de P_0) tiene cosenos directores variables que tienden hacia los de una recta que pasa por P_0, la cual se llama *tangente* a la curva en el punto P_0 (§ 30-4) (fig. 236).

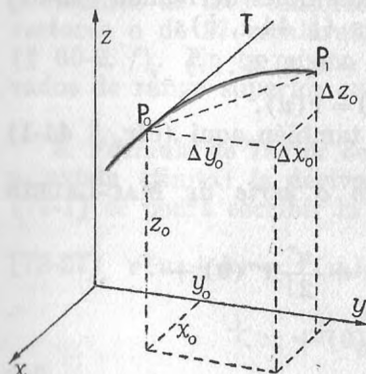


Fig. 236

Los cosenos directores de la recta P_0P_1 son proporcionales a los incrementos de coordenadas Δx_0, Δy_0, Δz_0 (§ 60-8, a_1) y también proporcionales a los números

[72-36] $$\frac{\Delta x_0}{\Delta u_0} \; ; \; \frac{\Delta y_0}{\Delta u_0} \; ; \; \frac{\Delta z_0}{\Delta u_0} \; ;$$

y como al tender Δu_0 a cero, estos cocientes tienen como límites las derivadas $x'_0 = \mathrm{x}'(u_0)$, $y'_0 = \mathrm{y}'(u_0)$, $z'_0 = \mathrm{z}'(u_0)$, resulta que la dirección de la recta P_0P_1 tiene como límite la dirección definida por estos tres números, que son sus coeficientes directores.

La recta que pasa por P_0 y tiene esta dirección límite, tiene por ecuaciones:

[72-37] $$\frac{x - x_0}{\mathrm{x}'(u_0)} = \frac{y - y_0}{\mathrm{y}'(u_0)} = \frac{z - z_0}{\mathrm{z}'(u_0)}$$

que representan la recta tangente en el punto (x_0, y_0, z_0). (Cfr. § 34-6).

NOTAS: 1. Con el convenio de anular el numerador cuando se anula el denominador (§ 60-8, nota 11) pueden adoptarse las ecuaciones [72-37] como válidas en los casos en que se anulen una o dos derivadas en u_0.

2. Si para u_0 son nulas las tres derivadas x'_0, y'_0, z'_0 y es n el orden mínimo para el cual no se anulan simultáneamente las tres derivadas sucesivas, si éstas son finitas, valdrá la fórmula de TAYLOR (§ 39-3, *a*):

$$\Delta x_0 = \frac{1}{n!}\, \mathrm{x}^{(n)}(u_0)\,(\Delta u_0)^n + o[(\Delta u_0)^n]$$

y análogamente para Δy_0, Δz_0. Entonces, el límite de los cocientes [72-36] con el denominador elevado a n es

$$x_0^{(n)} = \mathrm{x}^{(n)}(u_0) \quad , \quad y_0^{(n)} = \mathrm{y}^{(n)}(u_0) \quad , \quad z_0^{(n)} = \mathrm{z}^{(n)}(u_0) \quad ,$$

y las ecuaciones de la tangente son

[72-38] $$\frac{x - x_0}{x_0^{(n)}} = \frac{y - y_0}{y_0^{(n)}} = \frac{z - z_0}{z_0^{(n)}} .$$

Si en [72-37] multiplicamos los tres miembros por $\mathrm{d}u_0 = \Delta u_0$, resulta (§ 34-1) para ecuaciones de la tangente:

[72-39] $$\frac{x - x_0}{\mathrm{d}x_0} = \frac{y - y_0}{\mathrm{d}y_0} = \frac{z - z_0}{\mathrm{d}z_0} .$$

Para la curva C dada en forma paramétrica [72-1], referida al origen fijo O, el vector $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'(u_0)$ se denomina *vector tangencial* (fig. 237):

[72-40] $$\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(u_0) \quad ,$$

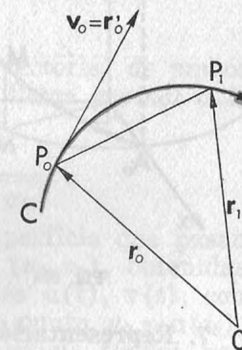


Fig. 237

y según [72-11] tiene por componentes x'_0, y'_0, z'_0. La línea de acción del vector tangencial es la tangente a la curva C, recta de ecuación paramétrica vectorial (§ 60-8, a_1):

[72-41] $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{r}'_0 \quad ,$$

donde se toman $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0)$ y $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'(u_0)$ en u_0 fijo y es λ la variable escalar.

DEF. Un arco de curva se llama *regular* (cfr. § 34-6), en un cierto intervalo $u_0 \leqslant u \leqslant u_1$ si en todos los puntos del mismo existe $\mathbf{r}'(u)$ y es

[72-42] $$\mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0} .$$

Los puntos donde no se verifica [72-42] se llaman *singulares* para la representación [72-1], la que aun así puede ser *analítica* (§ 72-5), nombre aplicado también a la curva. Los puntos donde se cumple [72-42] se llaman *regulares* u *ordinarios*.

EJEMPLO. *Hélice circular*: La hélice puede engendrarse por el movimiento de un punto de una circunferencia que gira alrededor de su centro, al mismo tiempo que éste recorre una perpendicular al plano de la circunferencia, siendo los dos movimientos uniformes.

El movimiento de traslación uniforme se expresa $z = ku + h$. Si la hélice comienza en un punto A_0 (fig. 238) situado en el plano xy (cuando $u = 0$, $z = 0$), entonces la ecuación anterior se reduce a: $z = ku$.

El movimiento de rotación es uniforme también y podemos suponer su velocidad 1; si llamamos φ al ángulo de giro en un cierto tiempo u

se tiene: $\varphi = u$, sin término independiente, porque el movimiento empieza en A_0 situado sobre el eje x.

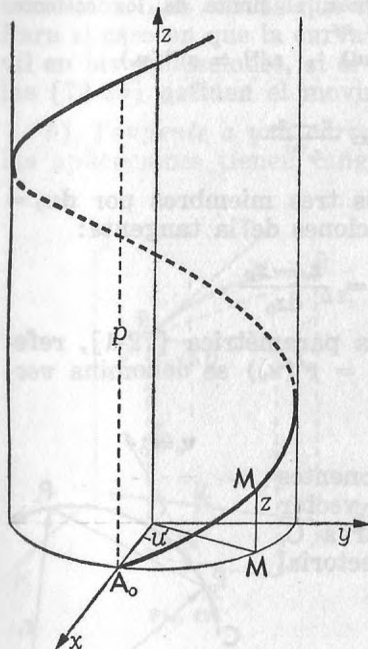


Fig. 238

Llamando r al radio del cilindro sostén de la hélice, obtenemos las ecuaciones de la hélice:

$$x = r\cos u\,,\quad y = r \operatorname{sen} u\,,\quad z = ku.$$

Sobre un mismo cilindro podremos obtener infinitas hélices, según el valor de k. El *paso* de cada una (distancia entre dos intersecciones consecutivas con la misma generatriz del cilindro) es $2k\pi$.

Las ecuaciones de la tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) son:

$$\frac{x - x_0}{-r\operatorname{sen} u_0} = \frac{y - y_0}{r\cos u_0} = \frac{z - z_0}{k}$$

y sus cosenos directores son, por tanto:

$$\frac{-r\operatorname{sen} u_0}{\sqrt{r^2+k^2}}\,;\quad \frac{r\cos u_0}{\sqrt{r^2+k^2}}\,;\quad \frac{k}{\sqrt{r^2+k^2}}.$$

El ángulo que forma la tangente a la hélice en el punto (x_0, y_0, z_0) con la dirección del eje de las z tiene coseno constante; quiere decir que la tangente a la hélice en un punto cualquiera forma un ángulo constante con la generatriz del cilindro que pasa por ese punto. De aquí que su desarrollada sobre un plano sea una recta.

7. Representación paramétrica y vectorial de las superficies: plano tangente. — *a*) DEF. *Superficie* S en el espacio $\mathbf{E}_3$ es el conjunto de puntos (x, y, z) descrito por tres funciones continuas

$$[72\text{-}43] \qquad x = \mathrm{x}(u, v)\quad,\quad y = \mathrm{y}(u, v)\quad,\quad z = \mathrm{z}(u, v)\quad,$$

al variar (u, v) bien en un recinto R, bien en un dominio D (§ 64-5). Las [72-43] se llaman *ecuaciones paramétricas* de la superficie, de la que mediante [72-8] se obtiene inmediatamente su *representación vectorial* [72-7]. Caso particular del anterior es aquel en que se toman como parámetros $x = u$, $y = v$, obteniendo la *representación explícita*

$$[72\text{-}44] \qquad z = \mathrm{f}(x, y)\quad,$$

de la entonces llamada *superficie uniforme* (§ 65-3, *a*).

Recordemos que una superficie puede darse también en *forma implícita* [67-13] en las condiciones de existencia de superficie uniforme que oportunamente se estudiaron (§§ 67-5 y 68-1).

b) *Plano tangente a una superficie.* Sólo estudiaremos los puntos de una superficie donde las tres funciones [72-43] sean *diferenciables* (§ 66-4). Entonces existen las derivadas parciales [72-15] que representan respectivamente los vectores tangenciales a las *líneas coordenadas* de la superficie, obtenidas haciendo en [72-8] bien v constante, bien u constante. Son particularmente importantes los llamados *coeficientes de* GAUSS

$$[72\text{-}45] \qquad \begin{cases} g_{11} = \mathbf{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2\;, \\ g_{12} = \mathbf{r}_u\,.\,\mathbf{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v\;, \\ g_{22} = \mathbf{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2\;, \end{cases}$$

que también suelen designarse por $\mathrm{E} = g_{11}$, $\mathrm{F} = g_{12}$, $\mathrm{G} = g_{22}$.

La identidad de LAGRANGE (§ 60, ejercicio 24) da

$$[72\text{-}46] \qquad |\,\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\,|^2 = \mathbf{r}_u^2\,.\,\mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u\,.\,\mathbf{r}_v)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2\,.$$

El punto de la superficie se llama *ordinario* o *regular* si en él es

$$[72\text{-}47] \qquad \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}\quad;$$

en otro caso, se llama *singular*.

El versor correspondiente al producto vectorial de ambos vectores [72-15] en un punto ordinario se llama *normal a la superficie*:

$$[72\text{-}48] \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\,\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\,|} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{+\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\,.$$

Consideremos todas las curvas de la superficie que pasan por el punto ordinario P_0 de parámetros (u_0, v_0), obtenidas dando en el plano paramétrico dos funciones $\mathrm{u}(t)$, $\mathrm{v}(t)$, con derivadas no simultáneamente nulas en el punto $u_0 = \mathrm{u}(t_0)$, $v_0 = \mathrm{v}(t_0)$. Entonces, la curva en la superficie tendrá por ecuación vectorial

$$[72\text{-}49] \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}[\mathrm{u}(t),\ \mathrm{v}(t)]\quad,$$

que será regular en el punto P_0 considerado y tendrá por vector tangencial (§ 67-1, teor. 1):

$$[72\text{-}50] \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\,\mathrm{u}'(t_0) + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\,.\mathrm{v}'(t_0) \neq \mathbf{0}.$$

La dependencia lineal de este vector tangencial con los $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ muestra (§ 60-2, teor. 2) que todas las rectas tangentes a las curvas regulares que pasan por P_0 están en el llamado *plano tangente* a la superficie, de ecuación vectorial (§ 60-8, a_2):

$$[72\text{-}51] \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \lambda\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + \mu\mathbf{r}_v(u_0, v_0)\quad,$$

con λ y μ parámetros de los distintos puntos del plano.

Este plano es el que pasando por el punto $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$,

está determinado por los vectores tangenciales a las líneas coordenadas $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ y cuya independencia lineal [72-47] asegura la existencia del plano tangente.

La ecuación ortogonal (§ 60-8, *b*) del plano tangente, mediante el vector de posición $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ y la normal [72-48] será:

[72-52] $$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad ,$$

equivalente a poner $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v) = 0$. Si se expresa en componentes cartesianas el producto mixto (§ 60-7, *a*) que aparece en el primer miembro, resulta la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie [72-43] cuando ésta se da en forma paramétrica:

[72-53] $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_{u_0} & y_{u_0} & z_{u_0} \\ x_{v_0} & y_{v_0} & z_{v_0} \end{vmatrix} = 0 .$$

Esta ecuación puede también escribirse en la forma

[72-54] $$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u_0, v_0)} (x - x_0) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u_0, v_0)} (y - y_0) + \\ + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u_0, v_0)} (z - z_0) = 0 \quad ,$$

cuyos coeficientes, parametros directores (§ 60-5, *d*) de la normal [72-48] son los valores que en el punto P_0 toman los jacobianos

[72-55] $$J_1 = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \; , \; J_2 = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \; , \; J_3 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \; ,$$

de cada par de funciones [72-43] respecto del par de parámetros u, v. Supuestas dichas funciones diferenciables, se verifica [72-47], es decir, *el punto es ordinario, cuando y sólo cuando en él* (§ 60-6, *b*) *no son simultáneamente nulos los tres jacobianos* [72-55].

Si en un entorno del punto P_0 las funciones [72-43] tienen derivadas parciales continuas y P_0 es ordinario, podrán expresarse (§ 68-2) los parámetros u, v mediante dos de las coordenadas x, y, z adecuadamente elegidas, y existirá una correspondencia biunívoca (§ 67-7) entre trozos de la superficie y del plano paramétrico. Si por ejemplo, fuese $J_3 \neq 0$ de las dos primeras [72-43], deduciríamos (§ 68-2) $u = \mathrm{u}(x, y)$, $v = \mathrm{v}(x, y)$, que sustituídas en la tercera [72-43] daría la representación explícita de la superficie:

[72-56] $$z = \mathrm{z}[\mathrm{u}(x, y), \; \mathrm{v}(x, y)] \equiv \mathrm{f}(x, y).$$

Así pues, supuestas *existentes y continuas las derivadas*

parciales de las funciones [72-43], *en el entorno de un punto ordinario la superficie es uniforme* (§ 65-3, *a*).

La expresión [60-32] del producto vectorial (§ 60-6, *c*) da

[72-57] $$\mathrm{W}(u, v) = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| = + \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \\ = + \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} .$$

Esta función $\mathrm{W}(u, v)$ es muy importante en las aplicaciones de la teoría.

EJEMPLOS: 1. La ecuación de una *superficie de revolución* de eje z está determinada por la *meridiana* $z = \mathrm{f}(x)$; y como al girar en torno del eje, la x se convierte en r, las coordenadas de un punto cualquiera son:

$$x = r \cdot \cos \alpha \quad , \quad y = r \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad z = \mathrm{f}(r).$$

Los dos parámetros son aquí r y α; las curvas $r = c$ son los paralelos; las $\alpha = c$ son los meridianos.

Los coeficientes de GAUSS son:

$$g_{11} = 1 + \mathrm{f}'^2 \quad ; \quad g_{12} = 0 \quad ; \quad g_{22} = r^2.$$

La anulación idéntica de g_{12} indica la ortogonalidad de meridianos y paralelos.

2. Para la esfera son más convenientes las coordenadas esféricas: longitud λ y latitud φ, contadas entre $-\pi < \lambda \leqslant \pi$ y $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{2}\pi$.

Las ecuaciones paramétricas de la esfera de radio a son (cfr. § 84-2):

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y &= a \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \lambda \\ z &= a \cdot \operatorname{sen} \varphi \quad , \end{aligned}$$

y los coeficientes de GAUSS son:

$$g_{11} = a^2 \quad ; \quad g_{12} = 0 \quad ; \quad g_{22} = a^2 \cdot \cos^2 \varphi .$$

El plano tangente tiene por ecuación

$$a^2 \cos^2 \varphi_0 \cos \lambda_0 (x - x_0) + a^2 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sen} \lambda_0 (y - y_0) + \\ + a^2 \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi_0 (z - z_0) = 0 \quad ,$$

es decir,

$$a \cos \varphi_0 [x_0 (x - x_0) + y_0 (y - y_0) + z_0 (z - z_0)] = 0 \quad ,$$

siendo los parámetros directores de la normal $\mathbf{n}$, las coordenadas x_0, y_0, z_0 del punto de contacto, es decir, las componentes de $\mathbf{r}_0$.

NOTAS: 1. Es posible que [72-8] aun para $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = \mathbf{0}$ represente una superficie que sea regular en otra representación.

Por ejemplo, $x = u^3$, $y = v^3$, $z = 0$ representa el plano xy y en el origen es $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = \mathbf{0}$.

2. Si la superficie viene dada en forma explícita diferenciable [72-44], su representación vectorial es

[72-58] $$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \mathrm{f}(u, v)\mathbf{k} \quad ,$$

sus líneas coordenadas tienen por vectores tangenciales

[72-59] $$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + \mathrm{f}_u\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + \mathrm{f}_v\mathbf{k} \quad ,$$

todos sus puntos son ordinarios, pues $J_3 = 1 \neq 0$, y es

[72-60] $$\mathrm{W}(u, v) = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| = + \sqrt{\mathrm{f}_u^2 + \mathrm{f}_v^2 + 1} > 0.$$

Es fácil ver que la ecuación [72-53] del plano tangente toma la forma conocida [66-8].

3. Recordemos que cuando la superficie se da en forma implícita

[67-13] hemos hallado (§ 67-5, *c*) la ecuación [67-18] de su plano tangente. También se ve que derivando la identidad

[72-61] $$\mathrm{F}[\mathrm{x}(u,v),\ \mathrm{y}(u,v),\ \mathrm{z}(u,v)] \equiv 0 \ ,$$

resulta

[72-62] $$\begin{cases} \mathrm{F}_x . x_u + \mathrm{F}_y . y_u + \mathrm{F}_z . z_u = 0 \ , \\ \mathrm{F}_x . x_v + \mathrm{F}_y . y_v + \mathrm{F}_z . z_v = 0 \ , \end{cases}$$

por lo que en un punto ordinario, F_x, F_y, F_z son proporcionales (§ 15-6, *c*) a los jacobianos J_1, J_2, J_3, parámetros directores de la normal a la superficie (cfr. § 67-5, notas 2 y 3).

8. Representación implícita y ecuaciones reducidas de las curvas. — En § 67-6, nota 3, hemos estudiado la representación implícita [67-28] de una curva en el espacio y la ecuación [67-31] de su tangente, que tiene por parámetros directores los jacobianos que figuran en [67-30]. Aquí también y bajo la hipótesis general de diferenciabilidad, *el punto es ordinario, si alguno de estos tres jacobianos no se anula,* quedando entonces determinada la tangente a la curva.

Suponiendo sea $\partial(\mathrm{F},\mathrm{G})/\partial(y,z) \neq 0$, será posible despejar en [67-28] y, z en función de x, obteniendo las *ecuaciones reducidas* de la curva

[72-63] $$y = \varphi(x) \quad , \quad z = \psi(x) \ ,$$

caso particular de las [72-35] para $u = x$. Si las funciones son derivables, es siempre aquí

[72-64] $$|\mathbf{r}'(u)| = +\sqrt{1+\varphi'^2+\psi'^2} > 0 \ ,$$

es decir, la curva es regular. Recíprocamente, si la curva [72-35] es regular, alguna de las componentes de [72-11] no será nula, por ejemplo, la $\mathrm{x}'(u) \neq 0$, y al poder despejar (§ 67-7) de la primera de las [72-35] la $u = \mathrm{u}(x)$ y sustituir en las dos últimas, se podrán obtener las ecuaciones reducidas [72-63]. Éstas representan la curva como intersección de dos superficies cilíndricas proyectantes, siendo las trazas sobre el plano (x, y) : $y = \varphi(x)$, $z = 0$, y sobre el plano (z, x) : $z = \psi(x)$, $y = 0$. Es la traducción analítica de la representación en el sistema diédrico o de MONGE.

9. Concepto de curva y de superficie según Fréchet. — *a*) El estudio de las propiedades de una curva C o una superficie S que haremos valiéndonos de sus ecuaciones y de las funciones [72-64] y [72-57], depende de la representación de la curva C o de la superficie S más bien que de la curva o superficie mismas. Éstas, al admitir una infinidad de representaciones suscitan el problema de examinar en qué casos distintas representaciones dan una misma curva o superficie y según los convenios que adoptemos así tendremos fijado el concepto de curva o superficie. Refiriéndonos por ejemplo a las superficies, hemos de explicar cuando otra ecuación

[72-65] $$\mathrm{S}^* : \mathbf{r} = \mathbf{r}^*(u,v) \equiv \mathrm{x}^*(u,v)\mathbf{i} + \mathrm{y}^*(u,v)\mathbf{j} + \mathrm{z}^*(u,v)\mathbf{k} \ ; \quad (u,v)\,\varepsilon\,\mathrm{R}^*$$

representa la misma superficie S de [72-43], para poder decir en este caso que [72-43] y [72-65] son dos distintas representaciones r y r^* de una misma superficie o que las superficies S y S* coinciden o son idénticas. Entonces diremos también que las ecuaciones [72-43] y [72-65] son *equivalentes.* Sólo después de haber estudiado el significado de esta equivalencia como relación reflexiva, simétrica y transitiva (§ 1-5), será posible dividir la clase de todas las posibles y admisibles ecuaciones [72-43] en subclases para poner en una subclase las ecuaciones admisibles que son equivalentes entre sí y en distintas subclases las ecuaciones admisibles que no son equivalentes. Cada subclase dará todas las posibles representaciones r de una misma superficie y así el concepto de superficie quedará definido por las subclases de la clase de todas sus posibles y admisibles representaciones sobre recintos y sólo entonces tendrá sentido decir que "una ecuación como [72-43] define una superficie".

b) Cerciorémonos de la importancia de esta cuestión con la siguiente distinción.

La ecuación [72-3] hace corresponder a cada punto u del intervalo paramétrico I_0 un bien determinado punto P del espacio E_3 y así [72-3] hará corresponder al intervalo I_0 un continuo $\Gamma(\mathrm{I}_0)$ de E_3 como lugar de puntos de la curva C, sin que por esto dicha correspondencia haya de ser biunívoca. Por ejemplo, si Γ es la circunferencia unidad, podemos obtenerla mediante

[72-66] $$\mathbf{r} = \mathbf{i} . \cos u + \mathbf{j} . \operatorname{sen} u \quad , \quad 0 \leqq u \leqq 2\pi$$

o bien mediante

[72-67] $$\mathbf{r} = \mathbf{i} . \cos u + \mathbf{j} . \operatorname{sen} u \quad , \quad 0 \leqq u \leqq 4\pi .$$

En el segundo caso, la fórmula [55-9] del § 55-1, *c*, da como longitud de la circunferencia el valor 4π, pues [72-67] hace recorrer dos veces la circunferencia Γ. Esto dice que la integral clásica [55-9] no proporciona la longitud de un lugar de puntos, sino más bien da la *longitud del recorrido* sobre un lugar de puntos. Por tanto [72-3] no será la representación de un continuo Γ, sino la de un *recorrido continuo* sobre Γ y en este sentido nos ocuparemos de las *curvas como recorrido* ("path curve") y no meramente de las *curvas como lugar de puntos* ("point curve").

En forma análoga, no podremos decir que dos superficies S y S* coinciden porque ocupen el mismo lugar de puntos Γ en el espacio E_3; así una superficie cilíndrica recta de determinada altura y la misma superficie cubierta dos veces por un velo flexible serán superficies distintas con diferente área, aun cuando ocupen el mismo conjunto puntual en el espacio E_3.

Al lugar de puntos Γ de una curva C ó superficie S se le llama *huella* o *gráfica* de dicha curva o superficie.

c) La ecuación [72-3] representa una transformación continua del intervalo I_0 en la curva C, así como [72-8] lo es del recinto R en la superficie S. Son casos particulares de transformaciones continuas (Cap. XVIII, nota I) y para el problema de la equivalencia habremos de considerar pares de transformaciones continuas $\mathrm{T}_1(\mathrm{R}_1) = \Gamma$, $\mathrm{T}_2(\mathrm{R}_2) = \Gamma$, en que R_1 y R_2 serán dos recintos del plano uv y Γ será la huella de una superficie del espacio E_3, consistiendo el *problema de la equivalencia* en ver cuándo T_1 y T_2 darán una misma superficie S.

Diremos que T_1 y T_2 son *topológicamente similares,* en símbolo $\mathrm{T}_1 \sim \mathrm{T}_2$ (*ts*), cuando y sólo cuando existe un homeomorfismo $\mathrm{H}(\mathrm{R}_1) = \mathrm{R}_2$ tal que $\mathrm{T}_1(\mathrm{P}_1) = \mathrm{T}_2\mathrm{H}(\mathrm{P}_1)$ para todo punto $\mathrm{P}_1 \varepsilon \mathrm{R}_1$ (Cap. XVIII, nota I). Esta relación de equivalencia, usada por LEBESGUE[1] y KNESER[2], es de-

[1] H. LEBESGUE, *Intégrale, longueur, aire* (Ann. Mat. Pura Appl., *7*, p. 231-359, 1902).
[2] H. KNESER, *Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen* (Math. Zeitschrift, *25*, p. 362-372, 1926).

masiado restringida, como luego justificaremos, y hoy definitivamente se acepta la *relación de equivalencia de* FRÉCHET[1]. Diremos que T_1 y T_2 son F-equivalentes, en símbolos $T_1 \sim T_2$ (F), cuando y sólo cuando para cada $\varepsilon > 0$, existe un homeomorfismo $H_\varepsilon (R_1) = R_2$ tal que cumpla la distancia $\varrho[T_1(P_1), T_2H_\varepsilon (P_1)] < \varepsilon$ para todo punto $P_1 \varepsilon R_1$. Esta relación de equivalencia que es reflexiva, simétrica y transitiva, nos define las F-curvas, F-superficies y en general las F-variedades. La clase K de representaciones admisibles es la de transformaciones continuas $T(R) = \Gamma$ en el espacio euclídeo E_3. Escogido un recinto fijo, por ejemplo el cuadrado unidad $R_0 : 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1$, definamos $K(R_0)$ como la subclase de K formada por todas las transformaciones continuas $T(R) = \Gamma$ para las que R es homeomorfo con R_0. Así obtenemos las *F-superficies del tipo rectangular* en el espacio euclídeo E_3.

Si R_0 es un arco simple de JORDAN, o también un intervalo finito I_0, obtendremos las *F-curvas del tipo de arco simple.* Si R_0 es una curva simple cerrada, obtenemos las *F-curvas del tipo de curva simple cerrada.*

d) Es evidente que si $T_1 \sim T_2$ (*ts*) también es $T_1 \sim T_2$ (F), pero el recíproco no es cierto y vamos a ver ejemplos que justifican pasar de la equivalencia topológicamente similar de LEBESGUE a la equivalencia de FRÉCHET. Supongamos que $T_1(R_1)$ represente la superficie S de huella Γ en el círculo R_1 del plano *uv* (fig. 239). Dividamos R_1 en dos partes mediante un diámetro paralelo al eje *v* y separemos ambos semicírculos

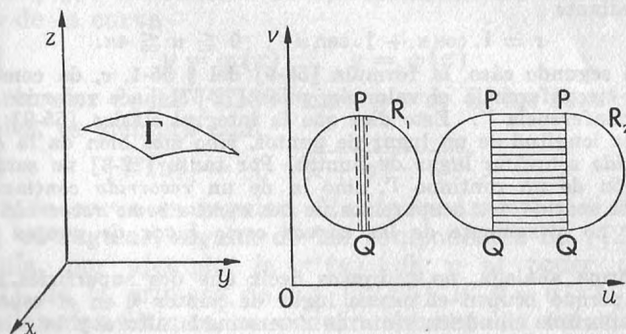


Fig. 239

mediante una traslación paralela al eje *u*, obteniendo así un recinto R_2. Hagamos corresponder a todos los puntos de cada segmento paralelo al eje *u* del rectángulo situado entre ambos semicírculos, el mismo punto de la superficie S que ya antes correspondía a los extremos de ese segmento. Así obtenemos una nueva representación $T_2(R_2)$ de la superficie S, sin que por ello dicha superficie haya sufrido ninguna modificación. Sólo hemos modificado su representación que podremos decir es *estacionaria* en aquellos segmentos. Si suponemos que la representación $T_1(R_1)$ es nunca estacionaria, entonces no existe ningún homeomorfismo entre R_1 y R_2 tal que sus puntos correspondientes P_1 y P_2 tengan una misma imagen $T_1(P_1) = T_2(P_2)$ en Γ. Sería necesario que a cada segmento de R_2 correspondiese un punto de R_1 y la correspondencia entre R_1 y R_2 dejaría de ser un homeomorfismo. Sin embargo, a este caso puede aplicarse la definición general de FRÉCHET, pues es suficiente considerar en R_1 una banda suficientemente estrecha de lados paralelos al eje *v* y

[1] M. FRÉCHET, *Sur la distance de deux surfaces* (Ann. Soc. Polonaise Math., *3*, p. 4-19, 1934).

hacer corresponder los segmentos circulares de R_1 a los semicírculos de R_2 y la banda central de R_1 al rectángulo central de R_2.

Un ejemplo análogo para las curvas será suponer que $T_2(I_0) = \Gamma$ represente el segmento $\Gamma : 0 \leqq x \leqq 1,\ y = 0,\ z = 0$, en el $I_0 : 0 \leqq u \leqq 1$, de manera que T_2 haga corresponder al primer tercio $0 \leqq u \leqq 1/3$ la mitad $0 \leqq x \leqq 1/2$, que en el segundo tercio $1/3 \leqq u \leqq 2/3$ el punto de Γ permanezca estacionario en (1/2, 0, 0) y que al último tercio $2/3 \leqq \leqq u \leqq 1$ corresponda la segunda mitad $1/2 \leqq x \leqq 1$. Si quisiéramos adoptar como nuevo parámetro la *abscisa curvilínea* (§ 55-1, *b*) determinada por la longitud del recorrido de la curva resultante, la nueva representación $T_1(I_0) = \Gamma$, de fundamental importancia incluso en la teoría elemental, no sería topológicamente similar a la inicial.

e) El concepto de F-equivalencia admite en ciertos casos la siguiente *modificación de* MCSHANE, de trascendencia en el cálculo de variaciones. En esta modificación se exige que el homeomorfismo $H_\varepsilon (R_1) = R_2$ conserve las orientaciones que previamente se hayan fijado para R_1 y R_2. Por ejemplo, se dirá que dos representaciones del tipo rectangular son *positivamente F-equivalentes* si el homeomorfismo H_ε no tan sólo transforma el contorno de R_1 en el de R_2, sino también el sentido positivo (directo o contrario a las agujas del reloj) del contorno de R_1 en el sentido positivo del contorno de R_2.

EJERCICIOS

1. Condición necesaria y suficiente para que un vector variable y derivable no nulo se conserve paralelo a una misma recta es que

$$\mathbf{r}(u) \wedge \mathbf{r}'(u) \equiv 0.$$

2. Demostrar que la derivada del versor $r^{-1}\mathbf{r}$ es $(\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}') \wedge \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$.

3. Hallar el error en el siguiente razonamiento: $\mathbf{u}(t)^2 \equiv \mathbf{u}(t) . \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t)^2 \therefore$ (§ 72-3, *b*): $2\mathbf{u} . \mathbf{u}' = 2uu' \therefore \mathbf{u} . \mathbf{u}' = uu' \therefore \mathbf{u}'$ paralelo a $\mathbf{u}$, no siempre cierto (cfr. [72-20]).

4. Condición necesaria y suficiente para que un vector no nulo, variable y derivable dos veces, se conserve paralelo a un mismo plano es que $\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}' . \mathbf{r}'' \equiv 0$.

5. Dada la función vectorial de punto $\mathbf{r}(Q) = (5u^2 - w)\mathbf{i} + (6u + v^2 - 3)\mathbf{j} + (2v^2 - w^3 + 1)\mathbf{k}$: 1º) Formar la matriz del tensor derivado $D\,\mathbf{r}(Q)$, descomponiendo éste en uno simétrico más otro antisimétrico; 2º) Hallar el producto de dicho tensor $D\,\mathbf{r}(Q_0)$ en el punto $Q_0(2; 1; 1)$ por el vector $\mathbf{x} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ de dirección $\varphi = x^{-1}\mathbf{x} = (1/3)\mathbf{i} - (2/3)\mathbf{j} + (2/3)\mathbf{k}$, mediante las respectivas componentes; 3º) Lo mismo mediante la derivada direccional $\mathbf{r}_\varphi (Q_0)$ y el módulo x; 4º) Lo mismo mediante el valor $d_\varphi\ \mathbf{r}(Q_0)$ del vector diferencial $d\,\mathbf{r}(Q)$ en el punto Q_0 para el incremento $\Delta_\varphi\ Q_0 = \mathbf{x}$; 5º) Comprobar que la componente antisimétrica del tensor $D\,\mathbf{r}(Q)$ tiene todos sus vectores coplanares (§ 63; ejercicio 2, 2º), hallando el plano donde actúan, así como la dirección del vector $\mathbf{a}_\varphi$ de dicho tensor antisimétrico correspondiente a la anterior dirección de $\mathbf{x}$, comprobando que son ortogonales; 6º) Comprobar que el anterior tensor derivado $D\,\mathbf{r}(Q)$ tiene en el origen O(0; 0; 0) todos sus vectores paralelos al plano ij, pero en general no perpendiculares a las direcciones respecvas (cfr. § 63, ejercicio 2, 2º).

6. Llamemos *números derivonormados* a

$$N_+\mathbf{r}(u_0) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{|\,\mathbf{r}(u_0 + h) - \mathbf{r}(u_0)\,|}{|\,h\,|} \geqslant 0$$

y análogamente $N^{+}\mathbf{r}(u_0)$ (con lim sup), $N_{-}\mathbf{r}(u_0)$, $N^{-}\mathbf{r}(u_0)$ (a la izquierda), siempre existentes. Demostrar que si existe $\mathbf{r}'(u_0)$ es $\mathbf{r}'(u_0) = N_{+} = N^{+} = N_{-} = N^{-}$. Estudiar en $u = 0$ la función vectorial $\mathbf{r}(u) = u\mathbf{i} + |u|\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (cfr. Cap. IX, nota V, a_2).

7. Sean una función vectorial $\mathbf{r}(u)$ y una función numérica $f(u)$, ambas continuas en $[u_0, u_1]$. Llamemos $F(u) = |\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)| - f(u) + f(u_0)$ y supongamos sea $F(v) > y_m > 0$ en un punto v de $(u_0, u_1]$. Si u_m es el extremo superior de los puntos de (u_0, v) donde $F(u) \leqslant y_m$, demostrar que: 1º) $F(u_m) = y_m$; 2º) $N_{+}\mathbf{r}(u_m) \geqslant D_{+}f(u_m)$.

8. Sean una función vectorial $\mathbf{r}(u)$ y una función numérica creciente $f(u)$, ambas continuas en $[u_0, u_1]$. Si el conjunto $F(S)$ de valores funcionales $F(u) = |\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)| - f(u) + f(u_0)$ correspondientes a los puntos del subconjunto S de $[u_0, u_1]$ donde $N_{+}\mathbf{r}(u) \geqslant D_{+}f(u)$ no contiene ningún intervalo no degenerado, entonces se conserva $F(u) \leqslant 0$ en $[u_0, u_1]$. Demuéstrese para el caso en que N_{+} y D_{+} se sustituyen por N^{-} y D^{-}.

9. *Teorema de incrementos finitos para funciones vectoriales.* — Sean una función vectorial $\mathbf{r}(u)$ y una función numérica creciente $g(u)$, ambas continuas en $[u_0, u_1]$, tales que en el complemento de un conjunto numerable A respecto de $[u_0, u_1)$ sea $N_{+}\mathbf{r}(u) \leqslant D_{+}g(u)$, no siendo ambos miembros de esta última relación simultáneamente infinitos en dicho complemento. Entonces es $|\mathbf{r}(u_1) - \mathbf{r}(u_0)| \leqslant g(u_1) - g(u_0)$. Si además existe al menos un punto de $[u_0, u_1)$ donde sea $N_{+}\mathbf{r}(u) < D_{+}g(u)$, entonces es $|\mathbf{r}(u_1) - \mathbf{r}(u_0)| < g(u_1) - g(u_0)$.

10. *Teorema de incrementos finitos para funciones vectoriales derivables.* — Sea una función vectorial $\mathbf{r}(u)$ continua en $[u_0, u_1]$, derivable en (u_0, u_1) y supongamos que exista una función numérica creciente $g(u)$ continua en $[u_0, u_1]$, que tenga derivada $g'(u) \geqslant |\mathbf{r}'(u)|$ en (u_0, u_1); entonces es $|\mathbf{r}(u_1) - \mathbf{r}(u_0)| \leqslant g(u_1) - g(u_0) = (u_1 - u_0)g'(u_m)$ para un cierto u_m de (u_0, u_1).

11. Para que una función vectorial $\mathbf{r}(u)$ continua en $[u_0, u_1]$, sea constante en este intervalo, basta que $N_{+}\mathbf{r}(u)$ (ó $\mathbf{r}'(u)$ si la función es derivable) se anule en todos los puntos del complemento de un conjunto numerable A respecto de (u_0, u_1).

12. Si $\mathbf{r}(u)$ es derivable, representa: 1º) Un punto, cuando y sólo cuando $\mathbf{r}'(u) \equiv 0$; 2º) Una recta, cuando y sólo cuando $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{r}' \equiv 0$.

13. Si existe $\mathbf{r}''(u)$, entonces $\mathbf{r}(u)$ representa: 1º) Una recta, cuando y sólo cuando $\mathbf{r}'(u) \not\equiv 0$, $\mathbf{r}'(u) \wedge \mathbf{r}''(u) \equiv 0$; 2º) Una curva plana, cuando y sólo cuando $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{r}' . \mathbf{r}'' \equiv 0$.

14. Si existe $\mathbf{r}'''(u)$, entonces $\mathbf{r}(u)$ representa una curva plana no recta, cuando y sólo cuando $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' \not\equiv 0$, $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' . \mathbf{r}''' \equiv 0$.

15. Si $\mathbf{r}(u, v)$ tiene derivadas primeras, representa: 1º) Un punto, cuando y sólo cuando $\mathbf{r}_u(u, v) = \mathbf{r}_v(u, v) \equiv 0$; 2º) Una curva, cuando y sólo cuando $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \equiv 0$, $|\mathbf{r}_u| + |\mathbf{r}_v| \not\equiv 0$.

16. Demostrar que en un punto de una curva plana con tangente [72-38], toda recta distinta de ésta, atraviesa o no la curva en P_0 según que n sea impar o par.

17. Estudiar el carácter del punto P_0 (§ 71-3 y 4) de una curva plana con tangente [72-38] para la que existan las derivadas sucesivas a la $\mathbf{r}^{(n)}(u_0)$ hasta la primera $\mathbf{r}^{(p)}(u_0)$ que no sea nula ni paralela a $\mathbf{r}^{(n)}(u_0)$, mediante el producto escalar del desarrollo de Taylor [72-27] por el versor $\mathbf{n}$ normal a la tangente.

18. Un punto se mueve sobre la intersección del plano $y - x = 2$ con el cono $x^2 + xy + y^2 = z^2$, y al pasar por $P(3; 5; 7)$ la componente v_1 de su velocidad $\mathbf{v}$ vale 2; determinar $\mathbf{v}$ vectorialmente por [72-40] e implícitamente por [67-31].

19. Ecuación vectorial de la parábola situada en el plano $2x - y + 3z = 0$, que pasa por $P(1; 2; 0)$, es tangente en el origen al plano coordenado $y = 0$ y tiene el eje paralelo al plano coordenado $x = 0$. Tómese $x = u$.

20. Determinar la tangente a la curva intersección de los cilindros $F \equiv z - y^2 = 0$, $G \equiv x - z^2 = 0$ en el punto P_0 para el que $y = 1$, utilizando [67-31] y comprobarlo mediante el vector tangencial [72-40] de la curva dada vectorialmente. Tómese $y = u$.

21. 1º) Probar que en la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = v + \ln \cos u$, dos líneas coordenadas $u = a$, $u = b$, determinan arcos iguales en todas las líneas de coordenadas $v =$ constante; 2º) Probar que no ocurre lo mismo al cambiar u con v.

22. Dada la superficie $\mathbf{r} = 2 \cos u \operatorname{ch} v\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} u \operatorname{ch} v\mathbf{j} + \operatorname{sh} v\mathbf{k}$ determinar en el punto $(\pi/6, \ln 2)$ el plano tangente mediante [72-51], [72-54] y [67-18], una vez hallada la ecuación implícita [67-13] de la superficie.

23. Tomando las ecuaciones paramétricas del tipo [29-14] para la meridiana y la directriz del toro (§ 54, ejercicio 6), hallar la ecuación vectorial de su superficie y los puntos singulares de ésta.

§ 73. Curvas alabeadas

1. Abscisa curvilínea o parámetro intrínseco. — Dado un arco de curva regular (§ 72-6, *b*) en representación paramétrica vectorial [72-3], si además suponemos que la derivada $\mathbf{r}'(u)$ es *continua*, definiremos como *abscisa curvilínea* $s(u)$ del punto P de parámetro u, al valor de la integral

$$[73\text{-}1] \qquad s = s(u) = \int_a^u |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^u \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$$

tomada a partir del punto A de parámetro a.

Con la misma definición y demostración dadas en § 55-1, *c* para curvas planas, la integral [73-1] representa la *longitud del arco* AP, valor relativo a un *sentido* de recorrido fijado sobre la curva, que supondremos *positivo* si es el correspondiente a las u crecientes $(u > a)$.

Por la continuidad del integrando, existirá la diferencial de la función [73-1] y será (§ 50-1)

$$[73\text{-}2] \qquad ds = |\mathbf{r}'(u)|\,du = +\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}\,du = +\sqrt{\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)^2}\,du\,,$$

llamada *diferencial de arco* (cfr. § 55-1, *b*), donde ds tiene el signo de du, con la convención adoptada para el sentido positivo de la curva dada.

La diferencial de arco [73-2] es el módulo del *vector diferencial de arco*

[73-3] $$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x \cdot \mathbf{i} + \mathrm{d}y \cdot \mathbf{j} + \mathrm{d}z \cdot \mathbf{k} = \mathrm{d}\mathbf{r} \quad ,$$

donde, según [72-11], es

[73-4] $$\mathrm{d}x = \mathrm{x}'(u)\,\mathrm{d}u \quad , \quad \mathrm{d}y = \mathrm{y}'(u)\,\mathrm{d}u \quad , \quad \mathrm{d}z = \mathrm{z}'(u)\,\mathrm{d}u \quad ,$$

y tiene la dirección y sentido del vector tangencial [72-40].

La abscisa curvilínea s como función escalar del parámetro u, tiene por derivada el módulo del vector tangencial, es el módulo de la velocidad cuando el parámetro u es el tiempo:

[73-5] $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}\right| = |\mathbf{v}| = v > 0 \quad ,$$

es decir, nunca es nula por la hipótesis hecha al principio. Esto nos permite asegurar la existencia de la función inversa de la [73-1], pues ésta será propiamente monótona (creciente), y tomar a s como parámetro llamado *intrínseco* de los puntos de la curva dada. La función vectorial referida al parámetro intrínseco

[73-6] $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

tiene por vector derivado $\mathbf{t}$ el llamado *vector tangente* a la curva el que por [72-22] será:

[73-7] $$\mathbf{t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u} : \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} \quad ,$$

es decir, será un vector unitario o versor

[73-8] $$|\mathbf{t}| = 1 \quad ,$$

como se ve aplicando [73-5] a [73-7]. Así pues, *el vector tangente es el versor correspondiente al vector tangencial*, con línea de acción según la tangente a la curva y dirigido en el sentido de los arcos crecientes. Si se cambia el sentido de los arcos, $\mathbf{t}$ cambia de sentido. Las componentes de

[73-9] $$\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$$

serán los *cosenos directores de la tangente* a la curva, y al aplicar [72-11] al parámetro intrínseco s, resultará para dichos cosenos

[73-10] $$t_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \quad , \quad t_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \quad , \quad t_3 = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \quad ,$$

que son también los correspondientes al vector [73-3] (cfr. § 55-2).

EJEMPLO. Calcular la longitud de una espira de hélice circular de ecuaciones: $x = r\cos u$, $y = r \operatorname{sen} u$, $z = ku$ (§ 72-6, ejemplo).

Se tiene

$$\mathrm{d}s^2 = (r^2\cos^2 u + r^2 \operatorname{sen}^2 u + k^2)\,(\mathrm{d}u)^2 = (r^2 + k^2)\,(\mathrm{d}u)^2 \quad ,$$

e integrando entre 0 y 2π, resulta:

$$s = 2\pi\sqrt{r^2 + k^2}.$$

En general: la longitud del arco de amplitud α es $\alpha\sqrt{r^2 + k^2}$, es decir, proporcional a dicha amplitud, resultado acorde con el desarrollo rectilíneo de la hélice.

NOTAS: 1. La longitud es una propiedad métrica, pues se conserva invariante con respecto al grupo euclídeo (§ 61-7, d).

En particular, la transformación por movimiento de un arco no altera su longitud. En efecto, si el vector de posición $\mathbf{x}$ de matriz vectorial X (§ 61-4, d) se transforma en un vector $\mathbf{y}$ de matriz Y mediante un movimiento (§ 61-1) o en general, mediante una transformación lineal de matriz ortogonal A (§ 61-7), sus vectores derivados $\dot{\mathbf{x}}$ é $\dot{\mathbf{y}}$ de matrices respectivas $\dot{\mathrm{X}}$ é $\dot{\mathrm{Y}}$, cumplirán $\dot{\mathrm{Y}} = \mathrm{A}\dot{\mathrm{X}}$ (§ 61-4, d), y utilizando el cálculo de matrices (§ 61-4 a) resulta *

$$\dot{\mathbf{y}}^2 = \dot{\mathrm{Y}}'\dot{\mathrm{Y}} = \dot{\mathrm{X}}'\mathrm{A}'\mathrm{A}\dot{\mathrm{X}} = \dot{\mathrm{X}}'\dot{\mathrm{X}} = \dot{\mathbf{x}}^2 \quad ,$$

pues $\mathrm{A}'\mathrm{A} = \mathbf{I}$ (§ 61-7, b), de donde

[73-11] $$s = \int_a^u \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^u \sqrt{\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. La longitud es también invariante respecto de la representación analítica de una F-curva (§ 72-9), en particular respecto de un cambio de parámetro dado por una función monótona, como es inmediato demostrar por [72-22] y § 51-3, b.

3. La cuerda, el incremento de arco y la diferencial de arco son infinitésimos distintos, pero equivalentes, como en el caso de las curvas planas (§ 55-1, nota 4).

2. **Plano osculador a una curva alabeada.** — Dada una curva C por su expresión vectorial [72-3], consideremos el punto $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}(u_0)$, en donde supondremos que [72-3] admite desarrollo de TAYLOR (§ 72-5), hasta $n = 2$, es decir

[73-12] $$\mathbf{r}(u_0 + h) = \mathbf{r}(u_0) + h\mathbf{r}'(u_0) + \frac{h^2}{2!}\mathbf{r}''(u_0) + \mathbf{o}(h^2).$$

Consideremos sobre la curva dos puntos $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}(u_0 + h)$ y $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}(u_0 + k)$ *distintos infinitamente próximos* al P_0, significando con ello (ver nota 1) que haremos $h \to 0$, $k \to 0$ de manera que *h, k y $k - h$ se conserven infinitésimos del mismo orden* (§ 24-3). Consideremos también aplicado a P_0 el vector $\mathbf{t}_p$ paralelo al $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'(u_0 + h)$.

Entonces, vamos a demostrar que son equivalentes las tres siguientes definiciones de *plano osculador* (fig. 240) en el caso

* Para reservar el acento en la notación de la matriz traspuesta, se ha utilizado el punto como signo de derivación.

que los vectores $\mathbf{r}'(u_0)$ y $\mathbf{r}''(u_0)$ sean *linealmente independientes*, es decir, sea $\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0 \neq \mathbf{0}$.

DEF. 1ª: Plano osculador a la curva C en P_0 es la posición límite para $h \to 0$ y $k \to 0$ del determinado por P_0 y dos puntos de la curva distintos infinitamente próximos $P_1 = P(u_0 + h)$ y $P_2 = P(u_0 + k)$ al P_0.

DEF. 2ª: Plano osculador a la curva C en P_0 es la posición límite para $h \to 0$ del determinado por el vector $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(u_0)$ y el punto $P_1 = P(u_0 + h)$ infinitamente próximo al P_0.

DEF. 3ª: Plano osculador a la curva C en P_0 es la posición límite para $h \to 0$ del determinado por $\mathbf{r}'(u_0)$ y el vector $\mathbf{t}_p$ aplicado a P_0 y paralelo al $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'(u_0 + h)$, por lo que en lenguaje expresivo se dice queda determinado por dos tangentes infinitamente próximas.

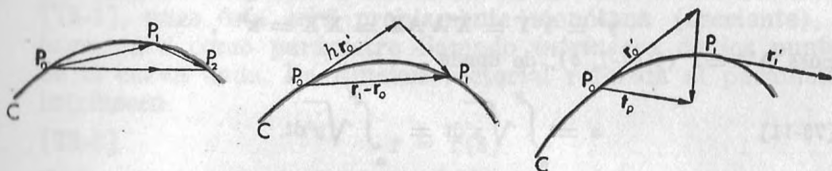


Fig. 240

$$\lim_{(h \neq k) \to 0} (P_0, P_1, P_2) = \lim_{h \to 0} (\mathbf{r}'_0, P_1) = \lim_{h \to 0} (\mathbf{r}'_0, \mathbf{t}_p).$$

De acuerdo con la primera definición, consideremos el plano P_0, P_1, P_2 determinado por los vectores

$$[73\text{-}13] \qquad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}(u_0 + h) - \mathbf{r}(u_0)}{h} = \mathbf{r}'(u_0) + \tfrac{1}{2} h \mathbf{r}''(u_0) + \mathbf{o}(h^2)/h.$$

$$[73\text{-}14] \quad \mathbf{b} = \frac{2}{k-h}\left[\frac{\mathbf{r}(u_0 + k) - \mathbf{r}(u_0)}{k} - \frac{\mathbf{r}(u_0 + h) - \mathbf{r}(u_0)}{h}\right] = \mathbf{r}''(u_0) + \frac{2}{k-h}\left[\frac{\mathbf{o}(k^2)}{k} - \frac{\mathbf{o}(h^2)}{h}\right].$$

Si ahora hacemos $h \to 0$, $k \to 0$ de manera que h, k y $k - h$ se conserven infinitésimos del mismo orden, la posición límite del plano determinado por [73-13] y [73-14] es el determinado por

$$[73\text{-}15] \qquad \lim_{h \to 0} \mathbf{a} = \mathbf{r}'(u_0) \quad ; \quad \lim_{(h \neq k) \to 0} \mathbf{b} = \mathbf{r}''(u_0) ,$$

aplicados al punto P_0, dando para *ecuación paramétrica del plano osculador*:

$$[73\text{-}16] \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0) + \lambda \mathbf{r}'(u_0) + \mu \mathbf{r}''(u_0) ,$$

con λ, μ parámetros de los distintos puntos del plano.

De acuerdo con la segunda definición, consideremos el plano determinado por los vectores $\mathbf{r}'(u_0)$ y

$$[73\text{-}17] \qquad \mathbf{c} = 2\,\frac{\mathbf{r}(u_0 + h) - \mathbf{r}(u_0) - h\mathbf{r}'(u_0)}{h^2} = \mathbf{r}''(u_0) + 2\,\frac{\mathbf{o}(h^2)}{h^2} ,$$

cuya posición límite dada por

$$[73\text{-}18] \qquad \lim_{h \to 0} \mathbf{c} = \mathbf{r}''(u_0)$$

y $\mathbf{r}'(u_0)$ es también [73-16].

De acuerdo con la tercera definición, consideremos el plano determinado por los vectores $\mathbf{r}'(u_0)$ y

$$[73\text{-}19] \quad \mathbf{d} = \frac{\mathbf{r}'(u_0 + h) - \mathbf{r}'(u_0)}{h} = \mathbf{r}''(u_0) + \frac{\mathbf{o}(h)}{h} ,$$

pues las condiciones que permiten establecer [73-12], justifican también (§ 72-5):

$$[73\text{-}20] \qquad \mathbf{r}'(u_0 + h) = \mathbf{r}'(u_0) + h\mathbf{r}''(u_0) + \mathbf{o}(h).$$

La posición límite del plano determinado por $\mathbf{r}'(u_0)$ y $\mathbf{d}$ para $h \to 0$ será también [73-16].

La ecuación ortogonal (§ 60-8, *b*) correspondiente al plano [73-16] puede escribirse (§ 60-6):

$$[73\text{-}21] \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0) = 0 ,$$

y entonces la *ecuación cartesiana* es (§ 60-7, *a*):

$$[73\text{-}22] \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0.$$

EJEMPLO. Aplicación a la hélice circular (§ 72-6, ejemplo):

$$x = r\cos u , \quad y = r \operatorname{sen} u , \quad z = ku ,$$
$$x'(u) = -r \operatorname{sen} u , \quad y'(u) = r\cos u , \quad z'(u) = k ,$$
$$x''(u) = -r\cos u , \quad y''(u) = -r \operatorname{sen} u , \quad z''(u) = 0.$$

El plano osculador tiene, por tanto, la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -r \operatorname{sen} u_0 & r\cos u_0 & k \\ -r\cos u_0 & -r \operatorname{sen} u_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

que puede escribirse así:

$$(x - x_0) k \operatorname{sen} u_0 - (y - y_0) k \cos u_0 + (z - z_0) r = 0.$$

NOTAS: 1. Si suponemos que $\mathbf{r}''(u)$ es *continua* en u_0, la DEF. 1 se simplifica en el sentido de que puede entenderse como puntos P_1, P_2 *distintos infinitamente próximos* al P_0 aquellos determinados por $h \neq k (\to 0)$. Pues, por [72-30] será

$$\mathbf{r}(u_0 + h) = \mathbf{r}(u_0) + h\mathbf{r}'(u_0) + \tfrac{1}{2}h^2[\mathbf{r}''(u_0) + \mathbf{o}(1)] ,$$

y entonces [73-14] toma la forma

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}''(u_0) + \mathbf{o}(1) \quad ,$$

cumpliéndose [73-15] sin necesidad de considerar el orden infinitesimal de $k - h$.

2. Un análisis muy afinado de las relaciones que guardan entre sí ocho posibles definiciones de plano osculador para curvas continuas en condiciones muy amplias ha sido realizado por E. J. VAN DER WAAG (*Sur les plans osculateurs*, Nederl. Akad. Wettensch. Proc. Ser. A, *55* = Indagationes Math. *14*, pp. 41-62; 1952).

3. El plano osculador de una curva plana es el plano en que está situada y continúa siéndolo aunque la curva plana no tenga tangente. En este caso sólo la primera definición de plano osculador es aplicable.

4. Si en un punto ordinario $(\mathbf{r}'(u_0) \neq 0)$ es

[73-23] $$\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0 = 0 \quad ,$$

sea $\mathbf{r}_0^{(p)} = \mathbf{r}^{(p)}(u_0)$ el primer vector derivado tal que

[73-24] $$\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}_0^{(p)} \neq 0 \quad ,$$

en caso de existir. Entonces el plano (*sobre*) - *osculador* tiene por ecuación ($p > 2$; cfr. ejercicio 4):

[73-25] $$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}_0^{(p)}) = 0 \quad ,$$

equivalente a la *ecuación cartesiana*:

[73-26] $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x_0^{(p)} & y_0^{(p)} & z_0^{(p)} \end{vmatrix} = 0 .$$

EJERCICIO. Si una curva es *regular* y admite en todos los puntos desarrollo [73-12] se reduce a una recta (§ 72, ejercicio 12) en todo intervalo paramétrico donde idénticamente se verifique [73-23]. Por tanto, ésta se cumple excepcionalmente en una curva de las condiciones dichas.

3. **Triedro principal o intrínseco.** — En un punto P_0 de una curva alabeada C, se llama *plano normal* al perpendicular al vector tangente $\mathbf{t}_0$ en P_0. Las rectas situadas en el plano normal son las *normales* a la curva. De éstas, tienen particular importancia la *normal principal* situada en el plano osculador y por tanto intersección de éste con el plano normal, y la *binormal* perpendicular a dicho plano osculador en P_0. La tangente, la normal principal y la binormal son las aristas del *triedro principal* o *intrínseco* a la curva en P_0, cuyas caras de orientación respectivamente perpendicular a las aristas citadas, son los planos normal, rectificante y osculador.

Dicho triedro queda determinado por vectores unitarios $\mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{b}_0$ aplicados en P_0 según la tangente, normal principal y binormal respectivamente, de manera que $\mathbf{t}_0$ *se dirija hacia los arcos crecientes* según la convención del § 73-1, $\mathbf{n}_0$ *hacia la concavidad de la curva* y resulte

[73-27] $$\mathbf{b}_0 = \mathbf{t}_0 \wedge \mathbf{n}_0 \quad ,$$

para que la terna $(\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$ tenga la misma *orientación que la de referencia* (dextrógira según § 60-3, *a*).

En el § 73-9 veremos que en general (para plano osculador no estacionario) la curva atraviesa en P_0 al plano osculador, lo que puede suceder de dos maneras: Si se supone un observador parado en el extremo de $\mathbf{n}_0$ sobre el plano osculador con el sentido de pies a cabeza dado por $\mathbf{b}_0$ y mirando a P_0 (fig. 241), o bien verá que la curva atraviesa el plano osculador de *abajo a arriba* según los arcos crecientes, tipo de

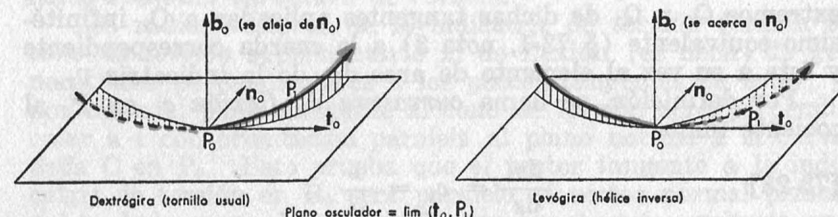


Fig. 241

curva *dextrógira* al que pertenece la hélice del tornillo usual (§ 72-6, ejemplo, con $k > 0$), o bien verá que la curva atraviesa el plano osculador de *arriba a abajo* según los arcos crecientes, tipo de curva levógira al que pertenece la hélice inversa (§ 72-6, ejemplo, con $k < 0$).

NOTA. Obsérvese que para triedro de referencia levógiro, $k > 0$ da hélice levógira y $k < 0$ da la hélice dextrógira del tornillo usual.

Según la segunda definición de plano osculador (§ 73-2), puede considerarse que éste gira alrededor de la tangente cuando se pasa de un punto al infinitamente próximo, y entonces si esto se efectúa en el sentido de los arcos crecientes, para las curvas de tipo *dextrógiro* la binormal $\mathbf{b}_0$ *se aleja* de $\mathbf{n}_0$, mientras que para las curvas de tipo *levógiro* la binormal $\mathbf{b}_0$ *se acerca* a $\mathbf{n}_0$ (fig. 241, donde se ha dibujado también en cada caso, la proyección de la curva sobre el plano osculador en P_0).

Algunos pocos autores (v. g. GINO FANO), llaman sinistrorsum a las curvas del tipo del tornillo usual y destrorsum a las del tipo opuesto.

4. **Curvaturas de flexión y de torsión de una curva alabeada.** — Al pasar de un punto P_0 de una curva alabeada C a su infinitamente próximo P_1, la dirección del vector tangente $\mathbf{t}$ cambiará, así como la orientación del plano osculador determinada por el vector binormal $\mathbf{b}$. La curvatura de flexión o de torsión miden respectivamente la variación de dirección de $\mathbf{t}$ o de $\mathbf{b}$ por unidad de longitud de arco recorrido.

Sea una curva que en el entorno de P_0 admita el desarro-

llo [73-12]. Si a partir de un punto fijo, por ejemplo O, aplicamos vectores equipolentes a los **t**, a cada punto P de la curva C corresponderá el extremo Q de éstos, describiendo una curva esférica Γ_1 llamada *indicatriz de flexión o de las tangentes*, situada sobre la superficie esférica de centro O y radio 1. El ángulo en *medida radial* que forman dos tangentes infinitamente próximas $\mathbf{t}_0$ y $\mathbf{t}_1$ viene medido por el arco de circunferencia máxima que en dicha superficie esférica pasa por los extremos Q_0 y Q_1 de dichas tangentes aplicadas a O, infinitésimo equivalente (§ 73-1, nota 3) a la cuerda correspondiente y ésta a su vez al elemento de arco $d\sigma_1$ de la indicatriz Γ_1.

Por definición, se llama *curvatura de flexión* c_1 en P_0 al cociente límite

$$[73\text{-}28] \qquad \frac{d\sigma_1}{ds} = c_1 = \frac{1}{\varrho},$$

donde ds es el elemento de arco de la curva dada C entre P_0 y P_1, mientras ϱ, número escalar recíproco a la curvatura c_1, es el llamado *radio de curvatura de flexión*.

Los radios vectores de la indicatriz de flexión forman el *cono de flexión*, cuyo plano tangente a lo largo de $\mathbf{t}_0$ es paralelo al plano osculador en P_0, en virtud de la tercera definición de éste (§ 73-2). Por tanto, el vector tangente a la indicatriz de flexión en Q_0 será equipolente al vector normal principal $\mathbf{n}_0$ de la curva dada C en P_0, por ser el vector unitario que perteneciendo a la orientación del plano osculador es, según [72-20] perpendicular a $\mathbf{t}_0$ y siempre en el mismo sentido que $\mathbf{n}_0$, por haber determinado éste (§ 73-3) según el de $d\mathbf{t}_0$ (que da la concavidad de la curva).

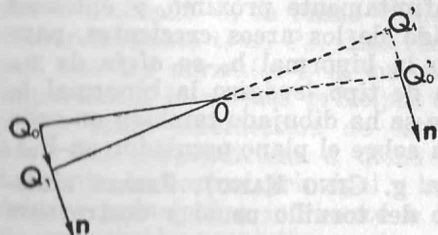


Fig. 242

Por otra parte, el sentido de $\mathbf{n}_0$ no cambia al invertir el sentido de los arcos crecientes, pues entonces la curva Γ_1 se reemplaza por la curva simétrica respecto de O (fig. 242 en relación con la fig. 241) y el recorrido de Q_0 a Q_1 correspondiente al de P_0 a P_1 se cambia en el de Q'_1 a Q'_0 correspondiente al de P_1 a P_0.

Análogamente, aplicados a O los equipolentes de los vectores binormales **b**, obtendremos que sus extremos B describen sobre la superficie esférica de centro O y radio 1 la *indicatriz de torsión o de las binormales* Γ_2. Su elemento de arco $d\sigma_2$ dará la medida radial en infinitésimo equivalente al del ángulo que forman dos planos osculadores infinitamente próximos, y por definición se llama *curvatura de torsión* c_2 en P_0 al cociente límite

$$[73\text{-}29] \qquad \frac{d\sigma_2}{ds} = c_2 = \frac{1}{\tau},$$

donde ds es el elemento de arco de curva dada C entre P_0 y P_1, mientras τ, escalar recíproco a la curvatura c_2, es el llamado *radio de curvatura de torsión*.

Los radios vectores de la indicatriz de torsión forman el *cono de torsión* suplementario al de flexión (es decir, de generatrices perpendiculares a los planos tangentes de éste), y por tanto el plano tangente al cono de torsión será perpendicular a **t** con orientación paralela al plano normal a la curva dada C en P_0. Esto prueba que el vector tangente a la indicatriz de torsión en B_0 será paralelo al vector normal principal $\mathbf{n}_0$ de la curva dada C en P_0, por ser el vector unitario que perteneciendo a la orientación del plano normal es, según [72-20], perpendicular a $\mathbf{b}_0$. Pero aquí, si la curva es *dextrógira* (§ 73-3), como $\mathbf{b}_0$ *se aleja* de $\mathbf{n}_0$, dicho vector tangente a la directriz de torsión tendrá *sentido opuesto* a $\mathbf{n}_0$, mientras que si la curva es *levógira*, como $\mathbf{b}_0$ *se acerca* a $\mathbf{n}_0$, dicho vector tangente a la directriz de torsión tendrá el *mismo sentido* que $\mathbf{n}_0$. Si adoptamos como positivo el sentido dado por $\mathbf{n}_0$ (GOURSAT, VALLÉE-POUSSIN, EISENHART, etc.) resultará para $ds > 0$ en [73-29] $d\sigma_2$ negativo o positivo según que respectivamente la curva sea dextrógira o levógira, con lo que habremos en uno u otro caso asignado un *signo a la torsión*, invariante, por el mismo razonamiento visto para la flexión, del sentido de los arcos crecientes, pero aquí dependiente del tipo de curva dada. Así pues, las curvas *dextrógiras* tienen torsión *negativa*, mientras que las curvas *levógiras* tienen torsión *positiva*. Muchos autores (DARBOUX, JUVET, VALIRON, TAYLOR, BIEBERBACH, etc.) adoptan como positivo en la indicatriz de torsión el sentido opuesto al considerado anteriormente, resultando entonces que las curvas dextrógiras tienen torsión positiva y las levógiras torsión negativa. El signo de la torsión fija el tipo de curva, siendo importante observar la convención particular adoptada por cada autor para saber a cuál de los dos signos corresponde cada tipo de curva. En esta cuestión, la confusión en la nomenclatura aumenta por el uso de triedros de una u otra orientación y por el uso ambiguo que según los autores se da a las palabras "levógiro", "destrorsum", "dextrógiro" y "sinistrorsum".

5. Fórmulas de Frenet o Serret. — Determinan la variación del triedro intrínseco al pasar de un punto P_0 de una curva alabeada C al infinitamente próximo P_1, pues dan los vectores derivados de los unitarios **t**, **n**, **b** que fijan dicho triedro,

como combinaciones lineales de los vectores del mismo triedro. El cálculo se simplifica tomando como parámetro el intrínseco s; para el parámetro cualquiera u bastará aplicar el cambio de variable [72-22].

Recordando [73-28] y la conclusión obtenida en § 73-4 respecto del vector tangente $\mathbf{dt}/d\sigma_1$ a la indicatriz de flexión, según la que era equipolente al vector **n**, quedará

$$[73\text{-}30] \qquad \frac{\mathbf{dt}}{ds} = \frac{\mathbf{dt}}{d\sigma_1} \cdot \frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{1}{\varrho}\,\mathbf{n}.$$

Del mismo modo, de [73-29] y de ser el vector tangente $\mathbf{db}/d\sigma_2$ a la indicatriz de torsión, paralelo y de opuesto o igual sentido que **n**, según que la curva sea dextrógira o levógira, resultará

$$[73\text{-}31] \qquad \frac{\mathbf{db}}{ds} = \frac{\mathbf{db}}{d\sigma_2} \cdot \frac{d\sigma_2}{ds} = \frac{1}{\tau}\,\mathbf{n}\,,$$

donde el último miembro lleva implícito el signo de la torsión que le corresponde.

NOTAS: 1. Si se hubiese adoptado para la torsión la convención de signo opuesta, en vez de [73-31] se habría escrito

$$[73\text{-}32] \qquad \frac{\mathbf{db}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\,\mathbf{n}.$$

2. La [73-31] indica que para $\tau > 0$, **db** tiene el sentido de **n**, es decir, **b** se acerca a la **n** (curva levógira), mientras que en [73-32] para $\tau > 0$, **db** tiene sentido opuesto a **n**, es decir, **b** se aleja de la curva dextrógira. Análogamente para $\tau < 0$.

Derivando, según [72-21], la relación

$$[73\text{-}33] \qquad \mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$$

obtenemos, de acuerdo con las [73-30] y [73-31], la

$$[73\text{-}34] \qquad \frac{\mathbf{dn}}{ds} = \frac{\mathbf{db}}{ds} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \frac{\mathbf{dt}}{ds} = \frac{1}{\tau}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}) + \frac{1}{\varrho}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{n}) = -\frac{1}{\varrho}\,\mathbf{t} - \frac{1}{\tau}\,\mathbf{b}.$$

Las [73-30], [73-34] y [73-31] constituyen las fórmulas de FRENET - SERRET, que escritas reunidas son

$$[73\text{-}35] \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathbf{dt}}{ds} &= \frac{1}{\varrho}\,\mathbf{n}\,, \\ \frac{\mathbf{dn}}{ds} &= -\frac{1}{\varrho}\,\mathbf{t} - \frac{1}{\tau}\,\mathbf{b}\,, \\ \frac{\mathbf{db}}{ds} &= \frac{1}{\tau}\,\mathbf{n}\,, \end{aligned} \right.$$

para la convención

$$\left\{ \begin{aligned} \tau &< 0, \quad \text{Curva dextrógira (hélice de tornillo usual).} \\ \tau &> 0, \quad \text{Curva levógira (hélice inversa).} \end{aligned} \right.$$

Recordemos que se han obtenido suponiendo válido el desarrollo [73-12] con $\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0 \neq 0$.

Obsérvese que [73-34] está en el plano rectificante y tiene módulo

$$[73\text{-}36] \qquad \left|\frac{\mathbf{dn}}{ds}\right| = +\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}}\,.$$

NOTAS: 3. Las fórmulas de FRENET permiten expresar todas las derivadas (de cualquier orden, supuesto que existan) en función de la terna intrínseca **t, n, b.** Por ejemplo:

$$[73\text{-}37] \qquad \frac{\mathbf{d^2t}}{ds^2} = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\,\mathbf{n} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathbf{dn}}{ds} = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\,\mathbf{t} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\,\mathbf{n} + \frac{1}{\tau}\,\mathbf{b}\right).$$

4. Obsérvese que la matriz de los coeficientes de [73-35] es hemisimétrica, propiedad importante para el estudio intrínseco de la curva (§ 73-9).

6. Vector de Darboux. — Es el definido mediante

$$[73\text{-}38] \qquad \mathbf{d} = -\frac{1}{\tau}\,\mathbf{t} + \frac{1}{\varrho}\,\mathbf{b} = -c_2\mathbf{t} + c_1\mathbf{b}\,,$$

con el mismo módulo [73-36] y normal al [73-34], por ser

$$[73\text{-}39] \qquad \mathbf{d} \cdot \frac{\mathbf{dn}}{ds} = \left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(-\frac{1}{\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = 0,$$

en el plano rectificante (fig. 243). Tiene la propiedad de cumplir

$$[73\text{-}40] \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{d} \wedge \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{dt}}{ds}\,, \\ \mathbf{d} \wedge \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{dn}}{ds}\,, \\ \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{db}}{ds}\,, \end{aligned} \right.$$

obtenidas al efectuar en [73-38] los productos vectoriales indicados en

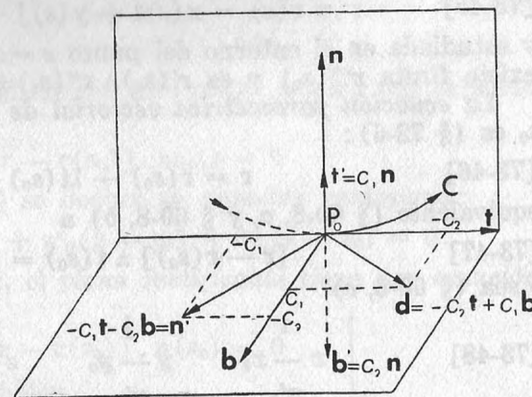


Fig. 243. Curva C dextrógira: $c_2 = \frac{1}{\tau} < 0$.

los primeros miembros y aplicar [73-35] si se tiene en cuenta que es

[73-41] $\mathbf{n}\wedge\mathbf{b}=\mathbf{t}\quad,\quad\mathbf{b}\wedge\mathbf{t}=\mathbf{n}\quad,\quad\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}=\mathbf{b}.$

Entonces, dado un vector cualquiera $\mathbf{r}$ sólidamente unido al triedro intrínseco:

[73-42] $$\mathbf{r}=r_1\mathbf{t}+r_2\mathbf{n}+r_3\mathbf{b}\quad,$$

en que r_1, r_2, r_3, son invariables (independientes del parámetro s) y $\mathbf{r}$ es función de s sólo a través de $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$, al multiplicar respectivamente las [73-40] por r_1, r_2, r_3 y sumar, obtendremos

[73-43] $$\mathbf{d}\wedge\mathbf{r}=r_1\frac{d\mathbf{t}}{ds}+r_2\frac{d\mathbf{n}}{ds}+r_3\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

Esta fórmula expresa que en el movimiento del triedro intrínseco para P describiendo la curva con velocidad 1, es decir, siendo s el tiempo, el vector tangencial del extremo de $\mathbf{r}$ que fija cualquier punto sólidamente unido al triedro, corresponde a una rotación de eje y velocidad angular representados por la línea de acción y módulo y sentido de $\mathbf{d}$ (§ 60-6), es decir, el *vector de* DARBOUX $\mathbf{d}$ *representa la rotación instantánea del triedro intrínseco.*

7. **Expresiones explícitas de los elementos del triedro intrínseco y de las curvaturas de flexión y de torsión.** — Tomaremos como parámetro el intrínseco s y a él referiremos los signos de derivación que se efectúe en la curva

[73-44] $$P=P(s)$$

dada por el vector de posición

[73-45] $$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)=x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}+z(s)\mathbf{k}$$

y estudiada en el entorno del punto $s=s_0$. Supondremos que existe finita $\mathbf{r}'''(s_0)$ y es $\mathbf{r}'(s_0)\wedge\mathbf{r}''(s_0)\neq 0$.

La *ecuación paramétrica vectorial de la recta tangente* en s_0 es (§ 72-6):

[73-46] $$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s_0)+\lambda\mathbf{t}(s_0)\quad,$$

equivalente (§ 60-8, *a*, y § 60-8, *b*) a

[73-47] $$[\mathbf{r}-\mathbf{r}(s_0)]\wedge\mathbf{t}(s_0)=\mathbf{0}\quad,$$

o sea (§ 60-6, *c*)

[73-48] $$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x'_0 & y'_0 & z'_0\end{vmatrix}=0.$$

Cualquiera de las expresiones anteriores da para la *tangente* a la curva en s_0 la *ecuación cartesiana*

[73-49] $$\frac{x-x_0}{x'_0}=\frac{y-y_0}{y'_0}=\frac{z-z_0}{z'_0}\ ,$$

que también se puede deducir directamente de la expresión del *vector tangente*

[73-50] $$\mathbf{t}_0=\mathbf{r}'(s_0)=x'_0\mathbf{i}+y'_0\mathbf{j}+z'_0\mathbf{k}\quad,$$

cuyas componentes son cosenos directores de su línea de acción (§ 73-1).

La primera fórmula de FRENET [73-35] da el *vector normal principal*:

[73-51] $$\mathbf{n}_0=\varrho_0\mathbf{t}'_0=\varrho_0\mathbf{r}''_0=\frac{x''_0\mathbf{i}+y''_0\mathbf{j}+z''_0\mathbf{k}}{+\sqrt{x''^2_0+y''^2_0+z''^2_0}}\ ,$$

por ser $\mathbf{n}$ un vector unitario y ϱ esencialmente positivo.

De ahí deducimos la *ecuación cartesiana de la recta normal principal*

[73-52] $$\frac{x-x_0}{x''_0}=\frac{y-y_0}{y''_0}=\frac{z-z_0}{z''_0}\ ,$$

en la que no debe olvidarse que los signos de derivación se refieren al parámetro intrínseco s, siendo inmediatas las ecuaciones vectoriales análogas a las [73-46] y [73-47].

El *vector binormal* viene dado por

[73-53] $$\mathbf{b}_0=\mathbf{t}_0\wedge\mathbf{n}_0=\frac{1}{+\sqrt{x''^2_0+y''^2_0+z''^2_0}}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x'_0 & y'_0 & z'_0\\ x''_0 & y''_0 & z''_0\end{vmatrix}\ ,$$

si se tiene en cuenta [73-50] y [73-51].

De [73-53] se obtiene la *ecuación cartesiana de la recta binormal*

[73-54] $$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}y'_0 & z'_0\\ y''_0 & z''_0\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}z'_0 & x'_0\\ z''_0 & x''_0\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}x'_0 & y'_0\\ x''_0 & y''_0\end{vmatrix}}\ .$$

El *plano normal*, en virtud de [73-46] tendrá por ecuación ortogonal (§ 60-8, *b*)

[73-55] $$[\mathbf{r}-\mathbf{r}(s_0)]\cdot\mathbf{t}(s_0)=0\quad,$$

de la que por [73-50] se deduce su *ecuación cartesiana*:

[73-56] $$x'_0(x-x_0)+y'_0(y-y_0)+z'_0(z-z_0)=0.$$

En forma análoga, el *plano rectificante* tiene por *ecuación ortogonal*

[73-57] $$[\mathbf{r}-\mathbf{r}(s_0)]\cdot\mathbf{n}(s_0)=0\quad,$$

y por *ecuación cartesiana*

[73-58] $$x''_0(x-x_0)+y''_0(y-y_0)+z''_0(z-z_0)=0\quad,$$

mientras que el *plano osculador* tiene por *ecuación ortogonal*

[73-59] $$[\mathbf{r} - \mathbf{r}(s_0)] \cdot [\mathbf{t}(s_0) \wedge \mathbf{n}(s_0)] = 0 \;,$$

cuya *traducción cartesiana* es (§ 60-7, *a*):

[73-60] $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0 \;,$$

como ya habíamos obtenido en [73-22].

De [73-51] se obtiene

[73-62] $$|\mathbf{r}''_0| = \left| \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{n}_0 \right| = \frac{1}{\varrho_0} \;,$$

es decir, la *curvatura de flexión*

[73-63] $$c_1 = 1/\varrho_0 = + \sqrt{x''^2_0 + y''^2_0 + z''^2_0} \;,$$

dada por una expresión irracional en las derivadas de las coordenadas.

De la tercera fórmula de Frenet [73-35] y [73-51] se deduce

[73-64] $$\frac{1}{\tau_0} = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{b}'_0 = \varrho_0 \mathbf{r}''_0 \cdot \frac{d}{ds} (\mathbf{t}_0 \wedge \mathbf{n}_0) =$$

$$= \varrho_0^2 \mathbf{r}''_0 \cdot \frac{d}{ds} (\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0) = \varrho_0^2 \mathbf{r}''_0 (\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}'''_0)$$

justificada la penúltima igualdad por ser $\mathbf{r}''_0(\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0) = 0$. La [73-64] da la *curvatura de torsión*, e interpretada *cartesianamente* (§ 60-7, *a*)

[73-65] $$c_2 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{\begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \\ x'''_0 & y'''_0 & z'''_0 \end{vmatrix}}{x''^2_0 + y''^2_0 + z''^2_0} \;,$$

función racional de las derivadas de las coordenadas, con un signo de significado geométrico ya visto en §§ 73-4 y 73-5.

En los puntos P_0 donde $c_2 = 0$, es decir, se anula el determinante que figura en [73-65], el plano osculador se llama *estacionario*.

Nota: Si la curva se da referida a un parámetro cualquiera *u*, designando por $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/du$, $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/ds$ y análogamente las derivadas sucesivas, la aplicación reiterada de [72-22] y de [73-5] permite expresar los versores del triedro intrínseco y las curvaturas en función de $\mathbf{r}(u)$ y sus derivadas, deducidas de las fórmulas anteriores.

Así, de $\dot{\mathbf{r}} = |\dot{\mathbf{r}}| \cdot \mathbf{r}'$ y [73-50] se deduce

[73-66] $$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}}| .$$

De [73-21] deducimos directamente

[73-67] $$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|}$$

donde los factores del numerador se toman precisamente en el orden indicado por estar dirigido **n** hacia la concavidad de la curva (dada por dr) y ser $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$. De ésta y las dos anteriores, se deduce inmediatamente:

[73-68] $$\mathbf{n} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \wedge \dot{\mathbf{r}}}{|(\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \wedge \dot{\mathbf{r}}|} .$$

De

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{d}{du} |\dot{\mathbf{r}}| \right) \cdot \mathbf{r}' + |\dot{\mathbf{r}}|^2 \cdot \mathbf{r}''$$

se obtiene

[73-69] $$\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = |\dot{\mathbf{r}}|^3 (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'')$$

y por [73-50] y [73-51] es $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \varrho(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'')$, de donde tomando módulos resulta

[73-70] $$c_1 = 1/\varrho = |\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|/|\dot{\mathbf{r}}|^3 .$$

Si se multiplica escalarmente [73-69] por

$$\dddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{d^2}{du^2} |\dot{\mathbf{r}}| \right) \cdot \mathbf{r}' + 3 \left(\frac{d}{du} |\dot{\mathbf{r}}| \right) |\dot{\mathbf{r}}| \mathbf{r}'' + |\dot{\mathbf{r}}|^3 \mathbf{r}'''$$

se obtiene

$$(\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \dddot{\mathbf{r}} = |\dot{\mathbf{r}}|^6 (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'')\mathbf{r}''' = - |\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|^2 \cdot c_2 \;.$$

pues por [73-64] y [73-70] es

$$(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''' = - c_2 (1/\varrho)^2 = - c_2 |\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|^2 / |\dot{\mathbf{r}}|^6 .$$

De donde resulta finalmente

[73-71] $$c_2 = 1/\tau = - (\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \dddot{\mathbf{r}} / |\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|^2 .$$

De estas formas vectoriales se pasa inmediatamente a las cartesianas, mediante las expresiones vistas en §§ 60-6 y 60-7.

Ejemplo. Calculemos los versores del triedro intrínseco, las curvaturas y el vector de Darboux para la hélice circular

$$\mathbf{r} = r \cos u \mathbf{i} + r \operatorname{sen} u \mathbf{j} + k u \mathbf{k} .$$

En § 72-6, ejemplo, vimos ya que era

$$\mathbf{t} = \frac{- r \operatorname{sen} u_0 \mathbf{i} + r \cos u_0 \mathbf{j} + k \mathbf{k}}{\sqrt{r^2 + k^2}} .$$

Resulta ser (cfr. § 73-2, ejemplo):

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{r^2 + k^2} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = rk \operatorname{sen} u_0 \mathbf{i} - rk \cos u_0 \mathbf{j} + r^2 \mathbf{k} \quad ,$$

con $|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}| = r \sqrt{r^2 + k^2}$, de donde

$$\mathbf{b} = \frac{k \operatorname{sen} u_0 \mathbf{i} - k \cos u_0 \mathbf{j} + r \mathbf{k}}{\sqrt{r^2 + k^2}}$$

Es

$$(\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \wedge \dot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ rk \operatorname{sen} u_0 & - rk \cos u_0 & r^2 \\ - r \operatorname{sen} u_0 & r \cos u_0 & k \end{vmatrix} =$$

$$= - r(r^2 + k^2) \cos u_0 \mathbf{i} - r(r^2 + k^2) \operatorname{sen} u_0 \mathbf{j}$$

con $|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \wedge \dot{\mathbf{r}}| = r(r^2 + k^2)$, de donde

$$\mathbf{n} = -\cos u_0 \,.\, \mathbf{i} - \operatorname{sen} u_0 \,.\, \mathbf{j} \quad ,$$

diciéndonos que la normal principal es horizontal y dirigida según el radio del cilindro sostén de la hélice.

Por ser

$$(\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \,.\, \dddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} -r \operatorname{sen} u_0 & r \cos u_0 & k \\ -r \cos u_0 & -r \operatorname{sen} u_0 & 0 \\ r \operatorname{sen} u_0 & -r \cos u_0 & 0 \end{vmatrix} = r^2 k \quad ,$$

e [73-70] y [73-71] resultan constantes los radios de curvatura

$$\varrho = \frac{r^2 + k^2}{r} \quad , \quad \tau = -\frac{r^2 + k^2}{k} \quad ,$$

con $\tau < 0$ para $k > 0$ (hélice dextrógira) y $\tau > 0$ para $k < 0$ (hélice levógira).

El vector de DARBOUX [73-38] aquí es

$$\mathbf{d} = \mathbf{k} / \sqrt{r^2 + k^2} \quad ,$$

de acuerdo con la definición cinemática de la hélice.

8. **Vector aceleración.** — La ecuación [72-3] del vector de posición [72-2] puede significar la ecuación de la trayectoria de un punto móvil para el parámetro u tiempo. Respecto de dicha trayectoria se ha definido en [72-40] el *vector tangencial* v (también llamado *velocidad*), de módulo [73-5].

Por definición, *aceleración* de la trayectoria [72-2] es el vector derivada segunda, en caso de existir:

[73-72] $$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{du^2} = \frac{d^2x}{du^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{du^2}\,\mathbf{j} + \frac{d^2z}{du^2}\,\mathbf{k} .$$

Si de [73-5] y [73-7] obtenemos

[73-73] $$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \mathbf{v} = \frac{ds}{du}\,\mathbf{t} = v\mathbf{t} \quad ,$$

al derivar respecto de u mediante la variable intermedia $s(u)$ y aplicación de la primera fórmula de FRENET [73-35], resulta:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2} = \frac{d^2s}{du^2}\,\mathbf{t} + \frac{ds}{du} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{du} = \frac{d^2s}{du^2}\,\mathbf{t} + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 \mathbf{n} \quad ,$$

es decir

[73-74] $$\mathbf{a} = \frac{dv}{du}\,\mathbf{t} + \frac{v^2}{\varrho}\,\mathbf{n} \quad ,$$

que prueba que *el vector aceleración está situado en el plano osculador y se compone de una aceleración tangencial o lineal*

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{du}\,\mathbf{t}$$

de módulo

$$\frac{dv}{du} = \frac{d^2s}{du^2}$$

y de otra aceleración normal o centrípeta

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\varrho}\,\mathbf{n}$$

de módulo

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{du}\right)^2$$

y dirigida hacia el centro de curvatura.

Si $1/\varrho = 0$, la aceleración normal $\mathbf{a}_n = 0$, es decir, ésta es nula en las *trayectorias rectilíneas*. Para $u = s$, es $v = 1$ y $\mathbf{a}_t = 0$, reduciéndose la aceleración a su componente normal $\mathbf{a}_n = \mathbf{n}/\varrho$; corresponde al caso de *movimiento uniforme sobre la trayectoria*.

EJEMPLO. Para la hélice circular

$$\mathbf{r} = r \cos u\mathbf{i} + r \operatorname{sen} u\mathbf{j} + ku\mathbf{k}$$

la velocidad lineal es $v = \sqrt{r^2 + k^2}$ constante, y la aceleración:

$$\mathbf{a} = -r \cos u\mathbf{i} - r \operatorname{sen} u\mathbf{j} = r\mathbf{n} = \mathbf{a}_n$$

de módulo $r = v^2/\varrho$. La aceleración tangencial es nula.

9. **Fórmula de Taylor y ecuaciones intrínsecas de una curva alabeada.** — La fórmula de TAYLOR (§ 72-5) respecto del parámetro intrínseco s será, limitándonos a los primeros términos,

[73-75] $$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{r}_0'}{1!}(s - s_0) + \frac{\mathbf{r}_0''}{2!}(s - s_0)^2 + \frac{\mathbf{r}_0'''}{3!}(s - s_0)^3 + \ldots$$

y teniendo en cuenta [73-7], [73-35] y [73-37], se podrán expresar los coeficientes mediante la terma intrínseca t, n, b;

[73-76] $$\mathbf{r}_0' = \mathbf{t}_0 \;;\; \frac{\mathbf{r}_0''}{2!} = \frac{\mathbf{n}_0}{2\varrho_0} \;;\; \frac{\mathbf{r}_0'''}{3!} = = -\frac{1}{6\varrho_0}\left(\frac{1}{\varrho_0}\,\mathbf{t}_0 + \frac{\varrho_0'}{\varrho_0}\,\mathbf{n}_0 + \frac{1}{\tau_0}\,\mathbf{b}_0\right) \;;\; \ldots$$

siempre que $\mathbf{r}_0' \wedge \mathbf{r}_0'' \neq 0$.

De aquí puede deducirse información precisa sobre el orden infinitesimal de la distancia de un punto de la curva a una tangente, al plano osculador, etc. Por ejemplo, respecto del *infinitésimo principal*

[73-77] $$h = s - s_0$$

la *distancia de* $P(s)$ *a la tangente en* $P_0 = P(s_0)$ es del orden (§ 60-6, *f*):

[73-78] $$|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{t}_0| = \left| -\frac{\mathbf{b}_0}{2\varrho_0}\,h^2 + \ldots \right| = O(h^2), \quad \text{si} \quad \frac{1}{\varrho_0} \neq 0,$$

pues $\mathbf{t}_0 \wedge \mathbf{t}_0 = 0$, $\mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{t}_0 = -\mathbf{b}_0$.

NOTA. Para el caso de ser $1/\varrho_0 = 0$, que corresponde al caso excepcional $\mathbf{r}_0' \wedge \mathbf{r}_0'' = 0$, la tangente se llama *estacionaria*. Entonces, el orden de la distancia anterior es mayor que dos.

El orden de la distancia de P(*s*) *al plano osculador en* $P_0 = P(s_0)$, viene dado (§ 60-8, *b*) por

[73-79] $$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{b}_0 = -\frac{h^3}{6\varrho_0\tau_0} + \ldots = O(h^3) \;,$$

si el plano osculador no es estacionario (§ 73-8), es decir $1/(\varrho_0\tau_0) \neq 0$. La distancia [73-79] viene dada con su signo y ello nos dice que al depender de un orden impar el plano osculador no estacionario queda atravesado por la curva (§ 73-3).

Puede referirse la curva al triedro intrínseco en $P_0 = P(s_0)$, con x, y, z coordenadas de sus puntos respecto de este triedro, poniendo

[73-80] $$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 = x\mathbf{t}_0 + y\mathbf{n}_0 + z\mathbf{b}_0 .$$

Si el primer miembro de [73-80] viene dado por [73-75] y [73-76], basta multiplicar escalarmente por $\mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{b}_0$ para obtener las coordenadas:

[73-81] $$\begin{cases} x = s - s_0 - \dfrac{1}{6\varrho_0^2}(s-s_0)^3 + \ldots \\ y = \dfrac{1}{2\varrho_0}(s-s_0)^2 - \dfrac{\varrho_0'}{6\varrho_0^2}(s-s_0)^3 + \ldots \\ z = -\dfrac{1}{6\varrho_0\tau_0}(s-s_0)^3 + \ldots \end{cases}$$

Las igualdades [73-63] y [73-65] nos dan las curvaturas en función del parámetro intrínseco s. Recíprocamente, dadas dos funciones de la variable independiente s:

[73-82] $$\frac{1}{\varrho} = \varphi(s) \quad , \quad \frac{1}{\tau} = \psi(s)$$

donde la primera es positiva y ambas indefinidamente derivables en s_0, supongamos que si calculamos los valores correspondientes de ϱ_0, τ_0 y sus derivadas y los sustituimos en [73-81] se obtengan desarrollos convergentes. Entonces, éstos, en un entorno de s_0, definirán la curva que habrá quedado determinada a menos de un desplazamiento por las [73-82], llamadas *ecuaciones intrínsecas de la curva*. Más aún, basta que las funciones [73-82] sean continuas para que a menos de un desplazamiento (rotación y traslación) la curva quede determinada por ellas. Pues dadas $\varrho(s)$ y $\tau(s)$, pueden concebirse las ecuaciones de FRENET [73-35] como un sistema de nueve ecuaciones diferenciales lineales homogéneas en las nueve funciones incógnitas t_i, n_i, b_i, $(i=1,2,3)$, que definen unívocamente los versores **t**, **n**, **b** como terna ortonormal a menos de una rotación de la posición inicial (§ 109-2, ejemplo 2). Conocido el triedro intrínseco para cada valor de s, la curva C se determina integrando la ecuación vectorial $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{t}(s)$ equivalente a tres escalares y que por simples cuadraturas introduciendo tres constantes arbitrarias equivalentes a una traslación, acaban de determinar la curva C.

10. Circunferencia y esfera osculatrices. — *a*) Entre las circunferencias tangentes a una curva en un punto P y situadas en el plano osculador, la que tiene por radio el de curvatura de flexión, resulta asimismo como límite de la circunferencia determinada por tres puntos de la curva que tienden a confundirse en P, y tiene *contacto al menos de segundo orden*, es decir, cortando por planos no paralelos a la tangente, la distancia entre los puntos de ambas curvas es infinitésimo de

tercer orden por lo menos (§ 40-6, Cap. X, nota I, *c*, y § 55-5).

Como ésta es, de entre todas las circunferencias que pasan por P, la que tiene con la curva un contacto de mayor orden, se llama *circunferencia osculatriz* de la curva en P; su centro se llama *centro de curvatura*.

Sea **c** el vector de posición del centro de la circunferencia en cuestión y r_c el radio de esta circunferencia.

Formemos la *potencia* de un punto variable de la curva referida al parámetro intrínseco s:

[73-83] $$\Phi(s) = (\mathbf{r}(s)-\mathbf{c})^2 - r_c^2 \;,$$

tal que para **c** y r_c constantes, según [73-50] y [73-35], tiene por derivadas

[73-84] $$\begin{cases} \tfrac{1}{2}d\Phi/ds = (\mathbf{r}(s)-\mathbf{c})\cdot\mathbf{t}(s), \\ \tfrac{1}{2}d^2\Phi/ds^2 = \mathbf{t}^2 + \dfrac{1}{\varrho}\mathbf{n}(\mathbf{r}(s)-\mathbf{c}). \end{cases}$$

Como se verifica $\Phi(s_0) = \Phi(s_1) = \Phi(s_2)$, por el teorema de ROLLE (§ 35-2) la derivada primera se anula en dos puntos intermedios y la derivada segunda en uno. Cuando los tres puntos tienden a confundirse en el $P(s_0)$, resultan las condiciones que dan el contacto de segundo orden (cfr. § 40-6)

[73-85] $$\begin{cases} (\mathbf{r}_0-\mathbf{c})^2 - r_c^2 = 0 \;,\quad (\mathbf{r}_0-\mathbf{c})\cdot\mathbf{t}_0 = 0 \;, \\ (\mathbf{r}_0-\mathbf{c})\cdot\mathbf{n}_0 = -\varrho_0 \;, \end{cases}$$

que junto con la condición de estar el punto **c** en el plano osculador $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{b}_0 = 0$, es decir, cumplir

[73-86] $$(\mathbf{c}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{b}_0 = 0 \;,$$

determinan el centro y el radio de la circunferencia osculatriz. Las dos últimas [73-85] y la [73-86] nos dicen que el vector $\mathbf{c}-\mathbf{r}_0$ referido al triedro intrínseco tiene por componentes $(0, \varrho_0, 0)$, y por tanto es

[73-87] $$\mathbf{c} = \mathbf{r}_0 + \varrho_0\mathbf{n}_0 \;,$$

mientras que la primera de las [73-85] demuestra que es $r_c = \varrho_0$. Así queda demostrado que el centro de la circunferencia límite queda sobre la normal principal, al lado de la concavidad de la curva y a una distancia del punto de contacto igual al radio de curvatura de flexión, es decir, es el centro de curvatura.

b) Se llama *esfera osculatriz*, al límite de la superficie esférica determinada por cuatro puntos de la curva, que tienden a confundirse en P. Por tanto, contiene a la circunferencia osculatriz, que es su sección por el plano osculador.

La recta perpendicular al plano osculador en el centro de curvatura P, se llama *recta polar* o *eje de curvatura* o eje del

plano osculador, correspondiente al punto P, y en ella está asimismo el centro de la esfera osculatriz.

Si s_1, s_2, s_3, s_4 son los valores de s que determinan cuatro puntos de una curva, veamos la posición límite de la esfera que pasa por ellos, cuando tienden a confundirse en uno. Para ello formemos como antes la *potencia* de un punto variable de la curva, o sea la función:

[73-88] $$F(s) = (\mathbf{r}(s) - \mathbf{c}_e)^2 - r_e^2 ,$$

siendo $\mathbf{c}_e$ el vector de posición del centro y r_e el radio. Como se verifica:

[73-89] $$F(s_1) = F(s_2) = F(s_3) = F(s_4) = 0 ,$$

la derivada $F'(s)$ se anula en tres puntos intermedios; la $F''(s)$ se anula en dos; la $F'''(s)$ en uno.

Si los cuatro puntos tienden a confundirse en uno, queda determinada la esfera osculatriz en éste, cuyo centro y radio están dados por las ecuaciones:

[73-90] $$F(s_0) = 0, \quad F'(s_0) = 0, \quad F''(s_0) = 0, \quad F'''(s_0) = 0$$

que, desarrolladas, son:

[73-91] $$\begin{cases} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{c}_e)^2 - r_e^2 = 0 \quad , \quad (\mathbf{r}_0 - \mathbf{c}_e) . \mathbf{t}_0 = 0 \quad , \\ (\mathbf{r}_0 - \mathbf{c}_e) . \mathbf{n}_0 = -\varrho_0 \quad , \quad (\mathbf{r}_0 - \mathbf{c}_e) . \mathbf{b}_0 = \tau_0 \dfrac{d\varrho}{ds_0} \quad , \end{cases}$$

donde la última se justifica por [73-35]; al derivar la penúltima dando

$$\mathbf{t}_0 . \mathbf{n}_0 + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{c}_e) . \left(-\frac{1}{\varrho_0} \mathbf{t}_0 - \frac{1}{\tau_0} \mathbf{b}_0 \right) = -\frac{d\varrho}{ds_0}$$

y aplicar la segunda de las mismas [73-91].

Por lo tanto, el centro de la esfera osculatriz viene dado por el vector

[73-92] $$\mathbf{c}_e = \mathbf{r}_0 + \varrho_0 \mathbf{n}_0 - \tau_0 \frac{d\varrho}{ds_0} \mathbf{b}_0 \quad ,$$

y su radio es

[73-93] $$r_e = \sqrt{\varrho_0^2 + \tau_0^2 \left(\frac{d\varrho}{ds_0} \right)^2} .$$

En las curvas de radio de curvatura constante, el centro de curvatura es centro de la esfera osculatriz, cuyo radio coincide con el de curvatura de flexión.

La ecuación paramétrica vectorial del eje de curvatura es

[73-94] $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s_0) + \varrho_0 \mathbf{n}(s_0) + \mu \mathbf{b}(s_0) \quad ,$$

donde μ es el parámetro de los distintos puntos de dicho eje polar. Para

[73-95] $$\mu = \left\{ \frac{dc_1}{ds_0} \right\} : \left\{ c_1^2(s_0) . c_2(s_0) \right\}$$

se obtiene el centro de la esfera osculatriz.

EJEMPLO. Para la hélice circular

$$\mathbf{r} = r \cos u \mathbf{i} + r \operatorname{sen} u \mathbf{j} + ku \mathbf{k} \quad ,$$

es (§ 73-7, ejemplo)

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_e = \mathbf{r}_0 + \frac{r^2 + k^2}{r} \mathbf{n}_0 = -\frac{k^2}{r} \cos u_0 \mathbf{i} - \frac{k^2}{r} \operatorname{sen} u_0 \mathbf{j} + ku_0 \mathbf{k} \quad ,$$

con $r_e = \varrho = (r^2 + k^2)/r$.

EJERCICIOS

1. Las funciones $x(u) = 1 + \cos u$, $y(u) = \operatorname{sen} u$, $z(u) = -(1 + \cos u)(7 + \cos u)/(4 \operatorname{sen} u)$ verifican: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (S_1), $4x^2 + 3y^2 + 4yz = 0$ (S_2). ¿Da entonces $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ la intersección de las superficies S_1 y S_2?

2. Si el vector derivado $\mathbf{r}'(u)$ es continuo, el parámetro u es la abscisa curvilínea cuando y sólo cuando $\mathbf{r}'(u) . \mathbf{r}'(u) \equiv 1$.

3. Hallar para la curva $\mathbf{r} = u^3\mathbf{i} + u^2\mathbf{k}$ (cfr. § 30-5, ejemplo 3) la longitud de arco entre los puntos $u = -h$, $u = h$ y dividiéndola por la longitud de la cuerda, hallar el límite del cociente para $h \to 0$. ¿A qué se debe la anomalía? (cfr. § 73-1, nota 3).

4. Para una curva con tangente [72-38], el plano que pasa por ella con mayor orden de contacto (osculador o sobreosculador) en P_0, si en éste existen las derivadas sucesivas a la $\mathbf{r}^{(n)}(u_0)$ hasta la primera $\mathbf{r}^{(p)}(u_0)$ que no sea nula ni paralela a $\mathbf{r}^{(n)}(u_0)$, tiene por ecuación $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) . (\mathbf{r}_0^{(n)} \wedge \mathbf{r}_0^{(p)}) = 0$ (cfr. § 73-2, nota 4).

5. En las condiciones del ejercicio anterior demostrar que la curva atraviesa o no en P_0 a todo plano que no contenga la tangente según que n sea impar o par. La curva atraviesa o no en P_0 cualquier plano que contenga la tangente y no sea el osculador según que p sea impar o par. La curva atraviesa o no en P_0 al plano osculador según que sea impar o par el orden q de la primera derivada (supuesta existente) no nula, ni paralela al plano osculador.

6. Dada la curva (§ 72, ejercicio 20) $\mathbf{r}(u) = u^4\mathbf{i} + u\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ determinar en el punto correspondiente a $u = 1$ los vectores tangente, normal principal y binormal, así como las ecuaciones vectoriales y cartesianas de las aristas y caras del triedro intrínseco.

7. Lo mismo para la curva $\mathbf{r}(u) = u\mathbf{i} + \frac{1}{2}u^2\mathbf{j} + (1/6)u^3\mathbf{k}$, en un punto genérico y en el punto correspondiente a $u = 2$, rectificando además el arco entre el origen y dicho punto.

8. Lo mismo para la curva de VIVIANI, intersección de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con la cilíndrica $x^2 + y^2 - x = 0$, expresada vectorialmente por $\mathbf{r} = \cos^2 u\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \cos u\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\mathbf{k}$, en el punto correspondiente a $u = \pi/4$, rectificando el arco comprendido entre $u = 0$ y dicho punto $u = \pi/4$, y entre $u = 0$ y $u = \pi/2$.

9. Calcular los radios de curvatura de flexión ϱ_0 y de torsión τ_0 de la curva $\mathbf{r}(u) = u^4\mathbf{i} + u\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ en el punto correspondiente a $u = 1$ (cfr. ejercicio 6).

10. Calcular los radios de curvatura de flexión ϱ_0 y de torsión τ_0,

obtener el versor normal principal mediante la primera fórmula de FRENET [73-30] y hallar el centro de curvatura con la correspondiente recta polar o eje de curvatura en forma vectorial y cartesiana, para: 1º) La curva de VIVIANI (ejercicio 8) en el punto correspondiente a $u=\pi/4$; 2º) La curva $\mathbf{r}(u)=u\mathbf{i}+\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}+(u^3/6)\mathbf{k}$ en un punto genérico y en el punto correspondiente a $u=2$ (cfr. ejercicio 7).

11. Los radios de curvatura de flexión y de torsión de la curva $\mathbf{r}(u)=\mathrm{x}(u)\mathbf{i}+\mathrm{y}(u)\mathbf{j}+\mathrm{z}(u)\mathbf{k}$ vienen dados por $\rho=s'^3/\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, $\tau=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)/\mu$ con $s'^2=x'^2+y'^2+z'^2$; $\alpha=y'z''-z'y''$, $\beta=z'x''-x'z''$, $\gamma=x'y''-y'x''$,

$$\mu = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

12. Obtener el versor normal principal mediante la fórmula de FRENET [73-31] para la curva $\mathbf{r}(u)=u\mathbf{i}+\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}+(u^3/6)\mathbf{k}$ en el punto correspondiente a $u=2$ (cfr. ejercicio 7).

13. Para k constante, se define la *hélice* en una superficie cilíndrica cualquiera de generatrices paralelas al eje z mediante $\mathbf{r}=\varphi(\sigma)\mathbf{i}+\Psi(\sigma)\mathbf{j}+k\sigma\mathbf{k}$, donde σ es la abscisa curvilínea de la sección recta de la superficie cilíndrica, es decir, $\varphi'(\sigma)^2+\Psi'(\sigma)^2\equiv 1$. Demostrar que: 1º) La tangente, la normal principal y la binormal forman ángulo constante con las generatrices de la superficie cilíndrica, siendo el segundo $\frac{1}{2}\pi$; 2º) La razón entre los radios de curvatura de flexión y de torsión de una hélice es constante; 3º) Cada una de las cuatro propiedades anteriores caracteriza como hélice a la curva que la posea; 4º) Los radios de curvatura de flexión de la hélice y de la sección recta de su superficie cilíndrica en puntos correspondientes de la misma generatriz son proporcionales; 5º) Toda hélice de curvatura de flexión constante es circular (§ 73-7, ejemplo).

14. Hallar los vectores tangencial $\mathbf{v}$, aceleración $\mathbf{a}$ y de DARBOUX $\mathbf{d}$, dando sus componentes respecto del triedro intrínseco, para: 1º) La curva $\mathbf{r}(u)=u^4\mathbf{i}+u\mathbf{j}+u^2\mathbf{k}$ en $u=1$, (ejercicio 6); 2º) La curva $\mathbf{r}(u)=u\mathbf{i}+\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}+(u^3/6)\mathbf{k}$ en $u=2$, (ejercicio 7).

15. Tomando como infinitésimo principal $h=s-s_0$, hallar los infinitésimos equivalentes: 1º) A la mínima distancia entre dos tangentes en puntos infinitamente próximos; 2º) A la diferencia entre el elemento de arco y su cuerda.

16. Si $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ es una curva de la superficie esférica de radio 1 y existe $\mathbf{r}'''(s)$, se cumple idénticamente (s es la abscisa curvilínea): $\mathbf{r}'''^2-\mathbf{r}''^4=[(\mathbf{r}'\wedge\mathbf{r}''').\mathbf{r}'']^2$.

§ 74. ENVOLVENTES DE CURVAS Y SUPERFICIES

1. **Envolvente de curvas planas.** — *a*) Si en la ecuación

[74-1] $$\mathrm{f}(x,y,t)=0\ ,$$

consideramos a t como un parámetro tendremos una *familia monoparamétrica* o *haz* de curvas $\{C_t\}$. Para cada valor $t=a$, $t=b$, ..., dado al parámetro tendremos una curva C_a, C_b, ...

Análogamente pueden considerarse familias de curvas con varios parámetros, y cada curva puede estar dada en otras formas además de la implícita [74-1].

EJEMPLOS: 1. El haz de curvas

[74-2] $$(x-t)^2+y^2=1$$

está formado por las circunferencias de radio 1 con centro en el eje x. Para $t=a$ se obtiene la circunferencia C_a de centro $(a,0)$.

2. La familia con dos parámetros u, v:

[74-3] $$(x-u)^2+(y-v)^2=1$$

representa todas las circunferencias de radio 1 con centros en el plano (x,y). Para $v=0$ se obtiene como *subfamilia* el haz [74-2].

3. La familia con dos parámetros $y=ux+v$ representa todas las rectas no paralelas al eje y. Poniendo $v=\varphi(u)$, se tiene como subfamilia el haz $y=ux+\varphi(u)$. Cada curva (recta) de estas familias está dada en forma explícita.

4. El par de ecuaciones paramétricas

[74-4] $$x=t\cos u\ ,\quad y=t\operatorname{sen} u$$

representa para t fijo sobre cada curva todas las circunferencias con centro en el origen. Entonces llamaremos a t *parámetro del haz*; cada curva C_t está dada en forma paramétrica, siendo u el parámetro que da los distintos puntos sobre la curva, en este caso fácilmente eliminable obteniéndose

[74-5] $$x^2+y^2=t^2.$$

Considerando ahora u como parámetro del haz [74-4], se obtienen las rectas por el origen; C_u es la recta de inclinación u, pues $y/x=\operatorname{tg} u$.

Para t y u, independientes, las [74-4] no representan una curva, sino una transformación puntual o de coordenadas (cfr. § 61). ¿Cuál?

b) Dado un haz $\{C_t\}$, [74-1], de curvas planas, *puede ocurrir* que exista una curva E tal que en cada uno de sus puntos P_0, sea tangente a una curva C_{t_0} del haz $\{C_t\}$. En tal caso la curva E se llama *envolvente* del haz $\{C_t\}$, cada una de cuyas curvas se llama *involuta*.

Supongamos que en un intervalo del parámetro t del haz $\{C_t\}$ exista la envolvente E como curva regular (§ 72-6) respecto de dicho parámetro y que las curvas del haz $\{C_t\}$ vengan dadas por [74-1], cuyo primer miembro tenga derivadas primeras continuas, tales que en cada punto de contacto P_0 de la involuta sea

[74-6] $$\mathrm{f}_x^2+\mathrm{f}_y^2\neq 0\ ,$$

siendo por tanto ordinario respecto de ella (§ 72-8). Entonces E vendrá representada paramétricamente por

[74-7] $$x=\mathrm{x}(t)\ ;\quad y=\mathrm{y}(t)\ ;\quad x'^2+y'^2\neq 0\ ,$$

donde t es el valor del parámetro que determina la involuta C_t que contiene el punto de contacto [74-7] de la envolvente E. Por tanto, en el intervalo considerado del parámetro t se verificará la identidad

[74-8] $$\mathrm{f}[\mathrm{x}(t),\ \mathrm{y}(t),\ t]\equiv 0$$

y también (§ 67-1):

[74-9] $$\mathrm{f}_x\,.\,\mathrm{x}'(t)+\mathrm{f}_y\,.\,\mathrm{y}'(t)+\mathrm{f}_t\equiv 0.$$

Como para cada valor de t son E y C_t tangentes, de la tercera [74-7] y [74-6] se deduce (§§ 34-6 y 67-4):

[74-10] $$f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t) \equiv 0 \quad ,$$

que sustituída en [74-9] demuestra que la representación [74-7] de la envolvente E verifica simultáneamente el sistema

[74-11] $$f[x(t), y(t), t] = 0 \quad , \quad f_t[x(t), y(t), t] = 0 .$$

De aquí:

TEOR. 1. *Para que exista una envolvente E del haz [74-1], como curva regular [74-7] de parámetro t, es necesario que sus coordenadas verifiquen [74-11].*

Supongamos ahora que el primer miembro de [74-1] tenga derivadas segundas continuas. Entonces la envolvente, si existe, es parte (propia o no) del lugar geométrico $\Psi(x, y) = 0$ definido por [74-11] por eliminación de t. Éste se llama *curva discriminante* del haz, y $\Psi = 0$ *ecuación discriminante.*

TEOR. 2. *Si el sistema [74-11] es resoluble en x, y, para lo cual es suficiente que sus soluciones cumplan (§ 67-7):*

[74-12] $$\Delta = \frac{\partial (f, f_t)}{\partial (x, y)} \neq 0 \quad ,$$

y si $f_{tt} \neq 0$, entonces existe una curva E, tangente a las C_t en sus puntos ordinarios.

Por [74-12] son f_x, f_y no simultáneamente nulas, el punto es ordinario en C_t. Entonces E puede representarse paramétricamente en t por funciones [74-7] cuyas derivadas $x'(t)$, $y'(t)$ se deducen del sistema

[74-13] $$f_x . x'(t) + f_y . y'(t) = 0 \quad , \quad f_{tx} x'(t) + f_{ty} y'(t) + f_{tt} = 0 \quad ,$$

y no pueden anularse simultáneamente por ser $f_{tt} \neq 0$. Entonces tanto C_t como E tienen tangente y la primera [74-13], es decir [74-10], expresa la condición de contacto, pues f_x, f_y [$x'(t)$, $y'(t)$] son parámetros directores de la normal a C_t [de la tangente a E].

EJEMPLOS: 5. En el haz [74-2], derivando respecto del parámetro t resulta $-2(x - t) = 0$, y eliminando t sale: $y^2 = 1$; $y = \pm 1$. Estas dos rectas componen la envolvente.

6. El haz [74-5] de circunferencias concéntricas, donde $f(x, y, t) \equiv x^2 + y^2 - t^2 = 0$, no tiene evidentemente envolvente real. Y en efecto, eliminando el parámetro t entre [74-5] y la ecuación $t = 0$ que resulta al derivar respecto de t, se obtiene $x^2 + y^2 = 0$, que se satisface para el único punto real $(0, 0)$. Es $f_{tx} = f_{ty} = 0$, de donde $\Delta = 0$, y no es aplicable el teorema 2.

7. Las circunferencias de radio 1 que pasan por el origen tienen sus centros en la circunferencia unidad; entonces el haz se obtiene de [74-3] poniendo $u = \cos t$, $v = \operatorname{sen} t$:

$$(x - \cos t)^2 + (y - \operatorname{sen} t)^2 = 1, \quad \text{ó:} \quad x^2 + y^2 - 2x \cos t - 2y \operatorname{sen} t = 0.$$

La envolvente resulta de eliminar t entre esta ecuación y $x \operatorname{sen} t - y \cos t = 0$. Ambas ecuaciones se verifican para $x = y = 0$, o bien para $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, de donde se elimina t y resulta $x^2 + y^2 = 4$ circunferencia de radio 2 con centro en el origen.

El siguiente teorema muestra que *en general* (ver nota 1 y ejemplo 8) el punto P de contacto de E con C_t es el límite de la *intersección* (si existe) de C_t con C_{t+h} para $h \to 0$:

TEOR. 3. *En las hipótesis del teorema 2, los puntos de la curva discriminante son los puntos límites, uno para cada t, de la intersección de las curvas C_t y C_{t+h} del haz C_t para $h \to 0$.*

Todo punto P_h (fig. 244) intersección C_t y C_{t+h} verifica $f(x, y, t) = 0$, $f(x, y, t + h) = 0$, y en consecuencia por el teorema de ROLLE (§ 35-2):

$$f_t(x, y, \tau) = 0 \quad ; \quad \tau \text{ entre } t \text{ y } t + h .$$

Para h suficientemente pequeño, el sistema

$$\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \quad , \\ f_t(x, y, \tau) = 0 \quad , \end{cases}$$

es resoluble en x, y, pues el respectivo jacobiano tiende, para $h \to 0$, al $\Delta \neq 0$ de [74-2]; la solución *única* $x = x(h)$, $y = y(h)$ tiende para $h \to 0$ al punto P de contacto con la envolvente, que verifica [74-11].

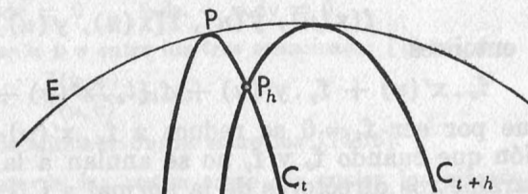


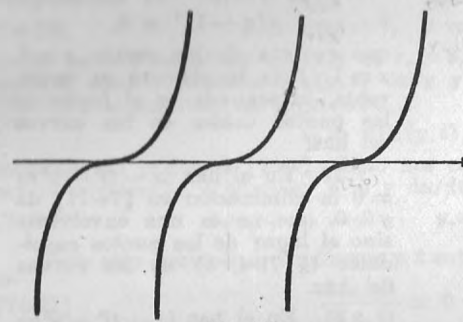
Fig. 244

NOTA 1. Si no se verifican las hipótesis del teorema 3, la envolvente de un haz C_t puede no ser lugar geométrico de puntos límites de intersecciones de C_t y C_{t+h}. Un caso importante es aquél en que *las curvas* $f(x, y, t) = 0$ y $f_t(x, y, t) = 0$ *son tangentes.* Entonces es $\Delta \equiv \partial(f, f_t) / \partial(x, y) = 0$, y también $f_{tt} = 0$, pues de lo contrario sería incompatible el sistema [74-13] en las derivadas existentes $x'(t)$, $y'(t)$. En tal caso el contacto con la envolvente es de orden superior a 1 [ej.: haz de circunferencias osculatrices a una curva E; dos de estas circunferencias infinitamente próximas *no se cortan*, porque la distancia de sus centros es menor que la longitud del arco de evoluta, nunca rectilínea, que mide (§ 55-8, *c*) la diferencia de los respectivos radios de curvatura].

EJEMPLO 8. En el haz de parábolas cúbicas (fig. 245):

$$f(x, y, t) \equiv y - (x - t)^3 = 0 \quad ,$$

todas las curvas se obtienen de una de ellas por traslación paralela al eje x, y como en cada una es x función uniforme de y, dos curvas del haz no tienen ningún punto común. De $f_t = -3(x - t)^2 = 0$ resulta como discriminante $y = 0$, eje x, y como todas las parábolas son tangentes a él, es envolvente del haz.


Fig. 245

Obsérvese que no se verifican las hipótesis del teorema 3, pues por ser $\Delta = f_{tt} = -6(x - t)$, ambos se anulan en los puntos

donde la curva envolvente $y=0$ toca a sus involutas, es decir en $x=t$, $y=0$.

TEOR. 4 *En el caso general* $f_{tt} \neq 0$, *la curva discriminante está formada por la envolvente* E *y el lugar de los puntos singulares de las curvas del haz.*

Sean $x = \mathrm{x}(u)$, $y = \mathrm{y}(u)$ ecuaciones paramétricas de la curva discriminante o de un arco de ella. Si la eliminación de t entre las [74-11] se hace despejando esta variable de la *segunda* (lo que es posible por $f_{tt} \neq 0$), $t = \mathrm{t}(x, y)$, y reemplazando en la primera, será idénticamente, por definición de discriminante:

$$f\{\mathrm{x}(u), \mathrm{y}(u), \mathrm{t}[\mathrm{x}(u), \mathrm{y}(u)]\} \equiv 0 ,$$

y entonces

$$f_x \cdot \mathrm{x}'(u) + f_y \cdot \mathrm{y}'(u) + f_t[t_x \cdot \mathrm{x}'(u) + t_y \cdot \mathrm{y}'(u)] \equiv 0 ,$$

que por ser $f_t = 0$ se reduce a $f_x \cdot \mathrm{x}'(u) + f_y \cdot \mathrm{y}'(u) = 0$, ecuación que cuando f_x y f_y no se anulan a la vez (y entonces son parámetros directores de la normal a C_t) expresa la tangencia de C_t con $\{\mathrm{x}(u), \mathrm{y}(u)\}$.

EJEMPLOS: 9. En el haz de estrofoides

$$f \equiv \{x^2 + (y-t)^2\}(x-2) + x = 0 ,$$

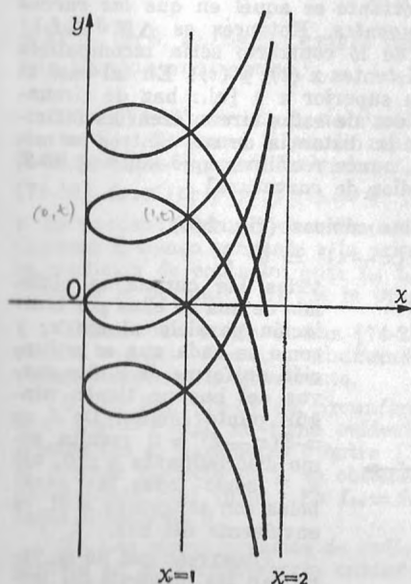


Fig. 246

(fig. 246), la curva discriminante $\Psi = 0$ se compone de la envolvente más el lugar de los puntos dobles. Todas las curvas del haz resultan de una de ellas por traslación paralela al eje y, y tienen la asíntota común $x=2$. De

$$f_t = -2(y-t)(x-2) = 0$$

resulta $x=2$ ó $y=t$. Excluyendo $x=2$, pues a ese valor no corresponde ningún y finito, resulta como discriminante

$$\Psi(x, y) = x^2(x-2) + x = 0,$$

ó $\quad x(x-1)^2 = 0,$

que consta de las rectas $x=0$, $x=1$. Sólo la primera es envolvente, la segunda es el lugar de los puntos dobles de las curvas del haz.

10. En el haz $(x-t)^2 - y^3 = 0$ la eliminación en [74-11] da $y=0$, que no es una envolvente sino el lugar de los puntos cuspidales (§ 71-4, *b*) de las curvas del haz.

11. En el haz $(x-t)^3 - y^2 = 0$ resulta también como discriminante $y=0$, que otra vez es lugar de los puntos cuspidales. Pero ahora

es $y=0$ tangente a cada una de las curvas y, en este sentido, debe considerarse como envolvente del haz.

NOTA 2. Cuando el haz se obtiene a partir de una familia con dos parámetros u, v, ligando éstos por una ecuación (ej. 2 y 3):

[74-14] $\quad g(x, y, u, v) = 0 \;, \quad \varphi(u, v) = 0 \;,$

si consideramos v como función de u: $v = \mathrm{v}(u)$ definida por $\varphi = 0$, recaemos en el caso de un parámetro

[74-15] $\quad g[x, y, u, \mathrm{v}(u)] = 0 \;,$

y debemos considerar con [74-15] la derivada respecto de u: $g_u + g_v(dv/du) = 0$. Como dv/du resulta de $\varphi_u + \varphi_v(dv/du) = 0$ se concluye: *Para obtener la envolvente debemos eliminar u, v y dv/du entre las cuatro relaciones*: [74-14] *y*

[74-16] $\quad g_u du + g_v dv = 0 \;, \quad \varphi_u du + \varphi_v dv = 0.$

Esto equivale a eliminar u y v entre las tres ecuaciones: [74-14] *y*

[74-17] $$\frac{\partial(g, \varphi)}{\partial(u, v)} = 0.$$

Pues [74-17] resulta de eliminar dv/du entre las [74-16].

EJEMPLO 12. Envolvente de las rectas sobre las cuales los ejes de coordenadas determinan un segmento de longitud constante k. Se tiene:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1 \;, \quad \text{siendo } u^2 + v^2 = k^2.$$

Diferenciando ambas ecuaciones respecto de u, v, e igualando los cocientes dv/du resulta:

$$\frac{v^2 x}{u^2 y} = \frac{u}{v} \;, \quad \frac{x}{u^3} = \frac{y}{v^3} \;, \quad \frac{x/u}{u^2} = \frac{y/v}{v^2} = \frac{1}{k^2} \;,$$

de donde $u^3 = xk^2$, $v^3 = yk^2$, y eliminando u, v, resulta la ecuación

$$x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$$

que representa una astroide (§ 23-9, nota; cfr. § 102-3, ej. 2).

NOTA 3. Si las curvas del haz están dadas (cfr. ej. 4) en forma paramétrica, ordinaria o vectorial

[74-18] $\quad \mathbf{r}(u, t) = \mathrm{x}(u, t)\mathbf{i} + \mathrm{y}(u, t)\mathbf{j}$

(u: parámetro sobre cada curva; t: parámetro del haz), donde suponemos existen continuas las derivadas parciales hasta el segundo orden, de las camponentes

[74-19] $\quad x = \mathrm{x}(u, t) \;, \quad y = \mathrm{y}(u, t) \;,$

en un recinto del plano (u, t) y es $\mathbf{r}_u \neq 0$, podemos considerar por ejemplo a u como función $u = \mathrm{u}(y, t)$ de y y de t definida por la segunda [74-19] y al sustituir en la primera

$$x = \mathrm{x}[\mathrm{u}(y, t), t]$$

recaemos en la forma [74-1]. Esto nos conduce (cfr. nota 2) para buscar la envolvente, a eliminar t, u y du/dt entre las [74-19] y

[74-20] $\quad x_u u_t + x_t = 0 \;, \quad y_u u_t + y_t = 0.$

Pero esto equivale a eliminar **u** y **t** entre las tres ecuaciones [74-19] y

[74-21] $$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, t)} = 0 \;,$$

pues [74-21] resulta de eliminar u_t entre las [74-20].

EJEMPLO 13. Envolvente del haz de circunferencias de radio 1 con centro en el eje x (cfr. ej. 1 y 5):

[74-22] $$x = t + \cos u \quad , \quad y = \operatorname{sen} u \quad , \quad (-\infty < t < \infty \quad , \quad 0 \leqslant u < 2\pi).$$

La ecuación [74-21] da: $\cos u = 0$ de donde $\operatorname{sen} u = \pm 1$, y reemplazando en [74-22] se obtiene en forma paramétrica la envolvente ya hallada en el ejemplo 5: $x = t$, $y = \pm 1$.

2. **Evoluta y evolvente en el plano.** — En § 55-8, a), definimos la *evoluta* de una curva C como el lugar geométrico Γ de los centros de sus circunferencias osculatrices, llamando a C *evolvente* de Γ, y probamos que *la evoluta es envolvente del haz de rectas normales de su evolvente.* Esta propiedad suele tomarse también como definición de la evoluta, y en base a ella hallaremos nuevamente su ecuación.

Dada la evolvente C en forma paramétrica: $x = \mathrm{x}(t)$, $y = \mathrm{y}(t)$, la familia de normales de puntos (α, β) será:

$$[\alpha - \mathrm{x}(t)]\mathrm{x}'(t) + [\beta - \mathrm{y}(t)]\mathrm{y}'(t) = 0 \quad ,$$

de la que derivando respecto de t se obtiene

$$(\alpha - x)x'' + (\beta - y)y'' - x'^2 - y'^2 = 0 \quad ,$$

dando con la anterior las ecuaciones paramétricas de la evoluta

[74-23] $$\alpha = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} \quad , \quad \beta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} \quad ,$$

coincidentes con las [55-18].

Para $t = x$ se obtiene

[74-24] $$\alpha = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''} \quad , \quad \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

coincidentes con las coordenadas halladas en [40-16] para el centro de curvatura.

Por ser la evoluta envolvente de las rectas normales, se obtendrán todas las evolventes de una curva Γ como trayectorias ortogonales (§ 103-1, *a*) de sus tangentes (cfr. § 103-1, *b*). En consecuencia, toda curva con tangente continua tiene infinitas evolventes.

EJEMPLO. Evoluta de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.

Derivando se despeja:

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad ;$$

sustituyendo $c^2 = a^2 - b^2$, resulta:

$$1 + y'^2 = \frac{b^4 + c^2y^2}{a^2y^2}$$

derivando nuevamente se despeja:

$$y'' = -b^4/(a^2y^3).$$

Las ecuaciones paramétricas de la evoluta son, por tanto

$$\alpha = \frac{c^2x^3}{a^4} \quad , \quad \beta = -\frac{c^2y^3}{b^4} \quad ;$$

eliminando x, y entre éstas y la ecuación de la elipse resulta la ecuación:

$$(a\alpha/c^2)^{2/3} + (b\beta/c^2)^{2/3} = 1.$$

3. **Envolventes de superficies.** — *a*) *Familias de un parámetro.* — Consideremos una superficie móvil, o más generalmente una familia $\{S_t\}$ con un solo parámetro t, o *haz* de superficies:

[74-25] $$\mathrm{f}(x, y, z, t) = 0 \quad ,$$

donde supondremos que el primer miembro tiene derivadas parciales continuas respecto de cada una de las variables x, y, z, t. *Puede ocurrir* que exista una superficie E con las siguientes propiedades:

1º) E es tangente a cada superficie del haz $\{S_t\}$ a lo largo de una curva;

2º) El haz formado por estas curvas de contacto cubre por completo la superficie E.

En tal caso diremos que la superficie E es una *envolvente* del haz $\{S_t\}$, llamado entonces de superficies *involutas*, y la curva C_t de contacto de E con cada superficie del haz se llama *curva característica* de ésta.

EJEMPLO 1. El haz de esferas de radio 1 con centros en el eje x:

[74-26] $$(x - t)^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad ,$$

tiene evidentemente como envolvente el cilindro de generatrices paralelas al eje x:

[74-27] $$y^2 + z^2 = 1$$

siendo las características las circunferencias

[74-28] $$x = t \quad , \quad y^2 + z^2 = 1 .$$

Observemos que dos esferas [74-26] correspondientes a $t = \tau$, $t = \tau + d$ con $d < 2$ se cortan según la circunferencia

$$t = \tau + \tfrac{1}{2}d \quad , \quad y^2 + z^2 = 1 - (\tfrac{1}{2}d)^2 \quad ,$$

que tiende para $d \to 0$ a la curva característica [74-28] con $t = \tau$.

Con método análogo al empleado en el caso de las curvas (§ 74-1), si existe envolvente dada por:

[74-29] $$x = \mathrm{x}(u, v) \quad , \quad y = \mathrm{y}(u,v) \quad , \quad z = \mathrm{z}(u, v) \quad , \quad \mathrm{W}(u,v) \neq 0 \quad ,$$

donde la última condición implica que consideramos sólo sus puntos ordinarios (§ 72-7), a cada uno de sus puntos $P_0(u_0, v_0)$ corresponderá una cierta involuta S_{t_0} tangente a E en P_0. Resulta así $t = \mathrm{t}(u, v)$ y la curva característica C_t a lo largo de la cual S_t es tangente a E, vendrá dada por $\mathrm{t}(u, v) =$ constante. Por pertenecer cada punto $P(u, v)$ de E a su respectiva S_t, será idénticamente en u, v:

$$\mathrm{f}[\mathrm{x}(u, v), \mathrm{y}(u, v), \mathrm{z}(u, v), \mathrm{t}(u, v)] \equiv 0 \quad ,$$

y también (§ 67-2):

[74-30] $\mathrm{f}_x dx + \mathrm{f}_y dy + \mathrm{f}_z dz + \mathrm{f}_t dt \equiv 0$,

donde dx, dy, dz, dt se toman sobre [74-29].

Para que el plano tangente a S_{t_0} coincida con el de E en su punto de contacto P_0, es necesario y suficiente que se cumpla la condición de perpendicularidad

[74-31] $\mathrm{f}_{x_0}\, dx_0 + \mathrm{f}_{y_0}\, dy_0 + \mathrm{f}_{z_0}\, dz_0 = 0$,

entre la normal a S_{t_0} en P_0 supuesto ordinario en ésta, y una tangente cualquiera a E determinada por sus parámetros directores dx_0, dy_0, dz_0. De [74-30] y [74-31] se deduce que si existe la envolvente E, es *necesario* que sus coordenadas cumplan simultáneamente

[74-32] $\mathrm{f}(x, y, z, t) = 0$, $\mathrm{f}_t(x, y, z, t) = 0$,

par de ecuaciones que para $t = t_0$ determinan la característica C_{t_0} a lo largo de la cual toca E a su involuta S_{t_0} .

Suponiendo que el primer miembro de [74-25] tenga derivadas segundas continuas, se demuestra como en § 74-1, que: *Si alguno de los determinantes funcionales de* f, f_t *respecto de* x, y, *ó* y, z, *ó* z, x *no es nulo y si* $\mathrm{f}_{tt} \neq 0$, *entonces la ecuación* $\Psi(x, y, z) = 0$ *de la envolvente* E *de un haz* [74-25] *de superficies se obtiene eliminando t entre las ecuaciones* [74-32]*: la ecuación del haz y la que resulta de derivar respecto del parámetro. Y bajo las condiciones anteriores, la envolvente* E *resulta estar formada por características* C_t, *obtenidas como límite de la intersección de dos superficies* S_t, S_{t+h} *del haz* $\{S_t\}$ *para* $h \to 0$.

Llamando a la resultante $\Psi(x, y, z) = 0$ de la eliminación de t en [74-32], *discriminante* del haz [74-25], resulta también (cfr. § 74-1, teor. 4) que: *En el caso general* $\mathrm{f}_{tt} \neq 0$, *la superficie discriminante está formada por la envolvente* E *y el lugar de los puntos singulares de las superficies del haz.*

NOTAS: 1. El mismo ejemplo 8 concebido como haz de superficies cilíndricas de generatrices paralelas al eje z muestra que puede existir envolvente $y = 0$ (plano xz) sin que cualquier par de superficies del haz tengan ningún punto común.

2. Si las superficies del haz están dadas en forma paramétrica, ordinaria o vectorial

[74-33] $\mathbf{r}(u, v, t) = \mathrm{x}(u, v, t)\mathbf{i} + \mathrm{y}(u, v, t)\mathbf{j} + \mathrm{z}(u, v, t)\mathbf{k}$

(u, v: parámetros sobre cada superficie; t: parámetro del haz) donde suponemos existen continuas las derivadas parciales hasta el segundo orden, de las componentes

[74-34] $x = \mathrm{x}(u, v, t)$, $y = \mathrm{y}(u, v, t)$, $z = \mathrm{z}(u, v, t)$,

y es $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq 0$, resulta fácilmente como en § 74-1, nota 3, que la envolvente se obtiene por eliminación de u, v, t entre las ecuaciones [74-34] y la

[74-35] $$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = 0.$$

Obsérvese que la ecuación [74-35] equivale a la anulación del producto mixto $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_t) = 0$, que puede probarse, expresa vectorialmente la tangencia de E con cada una de las superficies involutas.

EJEMPLOS: 2. Para hallar la envolvente del haz de esferas [74-26], la ecuación adicional $\mathrm{f}_t = 0$ es $-2(x - t) = 0$, y eliminando t entre ésta y [74-26] se obtiene el cilindro [74-27].

3. Para hallar la envolvente de un haz de esferas de radio constante a cuyos centros están en una curva C: $x = \mathrm{x}(t)$, $y = \mathrm{y}(t)$, $z = \mathrm{z}(t)$, [*superficie canal* de *eje* C, ej.: cilindro (ej. 2), toro], consideremos la ecuación del haz en forma vectorial

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)]^2 = a^2 ,$$

siendo $\mathbf{r}(t) = \mathrm{x}(t)\mathbf{i} + \mathrm{y}(t)\mathbf{j} + \mathrm{z}(t)\mathbf{k}$, y $\mathbf{r}$ el vector que va del origen a un punto genérico de la esfera S_t. Derivando respecto de t resulta la ecuación $[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)] . \mathbf{r}'(t) = 0$ que representa un plano perpendicular al eje por el centro de la correspondiente esfera. Para cada t la curva característica dada por el par de ecuaciones vectoriales es entonces una circunferencia de radio a. La envolvente se obtendrá por eliminación de u, v, t entre las ecuaciones

$$\begin{cases} x = \mathrm{x}(t) + a \cos u \cos v \\ y = \mathrm{y}(t) + a \operatorname{sen} u \cos v \\ z = \mathrm{z}(t) + a \operatorname{sen} v \\ [\mathrm{x}'(t) \cos u + \mathrm{y}'(t) \operatorname{sen} u] \cos v + \mathrm{z}'(t) \operatorname{sen} v = 0 \end{cases} ,$$

caso particular de las [74-34] y [74-35].

b) Familias de dos parámetros. — También una familia $\{S_{u,v}\}$ de superficies dependientes de dos parámetros u, v:

[74-36] $\mathrm{f}(x, y, z. u, v) = 0$,

puede admitir una *superficie envolvente* E, tal que en cada punto P_0 sea tangente a una superficie S_{u_0, v_0} de la familia $\{S_{u,v}\}$. Supondremos que al asociar a cada punto P_0 de E el punto $Q_0(u_0, v_0)$ del plano paramétrico (u, v), a la superficie E corresponde una región del plano (u, v) y además a puntos distintos $Q_1 \not\equiv Q_2$ de este plano corresponden puntos distintos $P_1 \not\equiv P_2$ de E. Entonces cada superficie de la familia [74-36] es tangente a la envolvente E *sólo en un punto, o en puntos aislados.*

EJEMPLO 4. La familia de esferas de radio 1 con centros en el plano (x, y):

[74-37] $\mathrm{f} \equiv (x - u)^2 + (y - v)^2 + z^2 = 1$,

tiene evidentemente como envolvente el par de planos $z = 1$, $z = -1$.

Fijar entre los dos parámetros u, v de la familia [74-36] una relación derivable

[74-38] $v = \varphi(u)$,

equivale a extraer de la familia [74-36] un *haz*

[74-39] $\mathrm{f}[x, y, z, u, \varphi(u)] = 0$,

cuya envolvente (*envolvente parcial*) se busca como en a, eli-

minando u entre [74-39] y la ecuación que resulta de anular la derivada respecto de u:

$$[74\text{-}40] \qquad f_u + f_v \frac{dv}{du} = f_u + f_v \varphi'(u) = 0 \ ,$$

o lo que es igual eliminando u y v entre las *tres* [74-38] a [74-40].

Pero en cada superficie S_{u_0, v_0} de $\{S_{u,v}\}$ hay puntos (llamados *puntos focales*) que pertenecen a la envolvente parcial cualquiera sea la selección [74-38] con $v_0 = \varphi(u_0)$. Son los que satisfacen simultáneamente a las relaciones

$$[74\text{-}41] \qquad f = 0 \ , \ f_u = 0 \ , \ f_v = 0 \ ,$$

pues entonces se verifica [74-40] cualquiera sea $\varphi(u)$. El lugar de los puntos focales es la *envolvente general* o simplemente envolvente de la familia con dos parámetros [74-36]. Su ecuación $\Psi(x, y, z) = 0$ resulta de eliminar u, v entre las tres [74-41].

NOTAS: 3. Si la familia [74-36] se da en forma paramétrica, ordinaria o vectorial.

$$\mathbf{r}(\lambda, \varphi, u, v) = x(\lambda, \varphi, u, v)\mathbf{i} + y(\lambda, \varphi, u, v)\mathbf{j} + z(\lambda, \varphi, u, v)\mathbf{k}$$

(λ, φ: parámetros sobre cada superficie; u, v: parámetros de la familia), se buscará expresar λ, φ en función de u, v, x, y y de sustituir en $z = z(\lambda, \varphi, u, v)$ para recaer en el caso estudiado. Se encuentra así que deben ser coplanarios los cuatro vectores

$$\mathbf{r}_\lambda \ , \ \mathbf{r}_\varphi \ , \ \mathbf{r}_u \ , \ \mathbf{r}_v \ ,$$

y así en lugar de las dos condiciones $f_u = f_v = 0$ se considera la anulación de los productos mixtos

$$(\mathbf{r}_\lambda \ , \ \mathbf{r}_\varphi \ , \ \mathbf{r}_u) = 0 \quad , \quad (\mathbf{r}_\lambda \ , \ \mathbf{r}_\varphi \ , \ \mathbf{r}_v) = 0$$

equivalente a la anulación de los jacobianos

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\lambda, \varphi, u)} = 0 \ , \ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\lambda, \varphi, v)} = 0.$$

4. Se han estudiado sólo condiciones *necesarias*. Supuestas existentes las derivadas segundas continuas; para obtener condiciones suficientes de existencia de la envolvente, basta que se cumplan:

$$\frac{\partial(f, f_u, f_v)}{\partial(x, y, z)} \neq 0 \ , \ \frac{\partial(f_u, f_v)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

EJEMPLOS: 5. En la familia de esferas [74-37] es $f_u = -2(x - u) = 0$, $f_v = -2(y - v) = 0$. Reemplazando en [74-37] resulta $z^2 = 1$, o sea el par de planos ya visto (ej. 4) $z = \pm 1$ como envolvente general.

6. Para hallar la envolvente de una familia de esferas de radio constante a cuyos centros están en una superficie S: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, consideremos la ecuación de la familia en forma vectorial

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)]^2 = a^2 \ , \ \text{siendo} \ \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \ ,$$

y $\mathbf{r}$ el vector que va del origen a un punto genérico de la esfera $S_{u,v}$. Derivando respecto de u y v resultan las ecuaciones

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)] \cdot \mathbf{r}_u(u, v) = 0 \ , \ [\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)] \cdot \mathbf{r}_v(u, v) = 0 \ ,$$

que representan dos planos cuya intersección es normal a los vectores $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$, y por tanto (§ 72-7, *b*) normal a la superficie S de los centros. La envolvente se obtiene entonces llevando sobre cada normal a S un segmento de longitud a hacia ambos lados. Se obtienen así dos superficies S' y S'' llamadas *superficies paralelas* a S. Sus ecuaciones se obtendrán por eliminación de u, v, λ, φ, entre las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) + a \cos\lambda \cos\varphi \\ y &= y(u, v) + a \operatorname{sen}\lambda \cos\varphi \\ z &= z(u, v) + a \operatorname{sen}\varphi \\ &(x_u \cos\lambda + y_u \operatorname{sen}\lambda)\cos\varphi + z_u \operatorname{sen}\varphi = 0 \\ &(x_v \cos\lambda + y_v \operatorname{sen}\lambda)\cos\varphi + z_v \operatorname{sen}\varphi = 0. \end{aligned}$$

En el ejemplo 5 es $x(u, v) \equiv u$, $y(u, v) \equiv v$, $z(u, v) \equiv 0$.

7. Planos $Ax + By + Cz = 1$ cuyos coeficientes cumplen la condición

$$[74\text{-}42] \qquad A^2 + B^2 + C^2 = 1 : r^2.$$

Los parámetros independientes son dos, y en vez de derivar, conviene diferenciar:

$$\begin{aligned} x\,dA + y\,dB + z\,dC &= 0 \\ A\,dA + B\,dB + C\,dC &= 0. \end{aligned}$$

Si B es constante, resulta: $Cx = Az$.

Si A es constante, resulta: $Cy = Bz$. Entonces:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{r^2}{1}.$$

Despejando A, B, C de las tres ecuaciones lineales y sustituyendo en [74-42], resulta:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

pues los planos dados distan del origen la longitud r, y la envolvente debe ser una superficie esférica, que sólo tiene común un punto con cada plano generador.

4. Envolvente de un haz de curvas en el espacio. — *a*) Consideremos un haz $\{C_t\}$ de curvas dependientes de un parámetro t, dando cada una como intersección de dos superficies:

$$[74\text{-}43] \qquad f(x, y, z, t) = 0 \ , \ g(x, y, z, t) = 0.$$

Para que exista una curva E, que llamaremos *envolvente* del haz, tal que en cada uno de sus puntos sea tangente a una curva del haz $\{C_t\}$, es *necesario* que en ellos se cumplan, además de [74-43], las relaciones:

$$[74\text{-}44] \qquad f_t(x, y, z, t) = 0 \ , \ g_t(x, y, z, t) = 0.$$

En efecto, si E existe como curva regular respecto del parámetro t del haz $\{C_t\}$, sus ecuaciones

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t) \ , \ \text{con} \ x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0 \ ,$$

deben verificar idénticamente

$$f[x(t), y(t), z(t), t] \equiv 0 \ , \ g[x(t), y(t), z(t), t] \equiv 0 \ ,$$

y por tanto

$$[74\text{-}45] \ f_x x' + f_y y' + f_z z' + f_t = 0 \ , \ g_x x' + g_y y' + g_z z' + g_t = 0.$$

Como los parámetros directores x', y', z' de su tangente son proporcionales a los de C_t y éstos cumplen (§ 67-6, nota 3):

$$f_x . x' + f_y . y' + f_z . z' = 0 \quad , \quad g_x . x' + g_y . y' + g_z . z' = 0 \quad ,$$

de éstas y las [74-45] se obtienen las [74-44].

La compatibilidad del sistema [74-43], [74-44] indica que la curva característica del haz f, y la del haz g, situadas en las respectivas superficies envolventes E_f y E_g se han de cortar para un *mismo valor de* t en un punto de la intersección E de ambas superficies envolventes E_f y E_g, lo que en general no ocurrirá. Pues en general, las *cuatro* ecuaciones [74-43] y [74-44] en las *tres* variables x, y, z son incompatibles salvo para valores excepcionales de t y el lugar geométrico definido por esas ecuaciones consta en general de puntos aislados. En otras palabras: *Un haz de curvas en el espacio no tiene, en general, envolvente. En cambio habrá en general* (cfr. nota) *envolvente si el sistema* [74-43], [74-44] *se reduce a tres ecuaciones por ser una de ellas consecuencia de las demás.* Veremos en c un caso especialmente importante en que esto ocurre.

NOTA. Se demuestra análogamente a § 74-1, teorema 2, que si es posible resolver el sistema [74-43], [74-44] en x, y, z dando curvas donde $f_{tt} \neq 0$, $g_{tt} \neq 0$, éstas son envolventes.

b) Cuando las curvas del haz $\{C_t\}$ están dadas en forma paramétrica, ordinaria o vectorial:

$$[74\text{-}46] \qquad \mathbf{r}(u, t) = \mathrm{x}(u, t)\mathbf{i} + \mathrm{y}(u, t)\mathbf{j} + \mathrm{z}(u, t)\mathbf{k} \quad ,$$

donde u es el parámetro sobre cada curva C_t, la envolvente E, si existe, se obtendrá reemplazando en [74-46] u por una función de t: $u = \mathrm{u}(t)$ a determinar de modo que para cada t sean linealmente dependientes los vectores tangenciales $\mathbf{r}_u$ de C_t y $\mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_t$ de E, es decir, sea $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_t = \mathbf{0}$ (§ 60-6, *b*), equivalente a poner (§ 60-6, *c*)

$$[74\text{-}47] \qquad \frac{x_u}{x_t} = \frac{y_u}{y_t} = \frac{z_u}{z_t} \; .$$

EJEMPLO. *Caso de una recta.* — Para que el haz

$$[74\text{-}48] \qquad x = u \quad , \quad y = \mathrm{m}(t)u + \mathrm{h}(t) \quad , \quad z = \mathrm{n}(t)u + \mathrm{k}(t) \quad ,$$

tenga envolvente, la condición [74-47] da, tomando las inversas de los tres miembros:

$$\frac{0}{1} = \frac{\mathrm{m}'(t)u + \mathrm{h}'(t)}{\mathrm{m}(t)} = \frac{\mathrm{n}'(t)u + \mathrm{k}'(t)}{\mathrm{n}(t)}$$

lo que exige que sean compatibles las ecuaciones

$$m'u + h' = 0 \quad , \quad n'u + k' = 0 \quad ,$$

para lo cual es necesario y suficiente que se anule idénticamente el determinante

$$[74\text{-}49] \qquad \begin{vmatrix} m' & h' \\ n' & k' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Cumplida esta condición, la envolvente se halla reemplazando en [74-48] u por

$$[74\text{-}50] \qquad \mathrm{u}(t) = -\frac{\mathrm{h}'(t)}{\mathrm{m}'(t)} \equiv -\frac{\mathrm{k}'(t)}{\mathrm{n}'(t)} \, .$$

c) *Envolvente de las curvas características en una superficie.* — Un caso importante de haz de curvas con envolvente es el de las curvas características [74-32] de un haz [74-25] de superficies (§ 74-3, *a*), pues ahora las ecuaciones [74-43], [74-44] se reducen a *tres* (cfr. *a*):

$$[74\text{-}51] \qquad f = 0 \quad , \quad f_t = 0 \quad , \quad f_{tt} = 0.$$

Veamos ahora que la superficie S formada por las características consta de dos hojas S_1, S_2 que se unen a lo largo de la envolvente E de las características formando un "borde filoso", es decir en los p u n t o s de E, S_1 y S_2 tienen el mismo plano tangente y se extienden a ambos lados de dicho plano y hacia un mismo lado de la tangente a E (fig. 247), para lo cual probaremos que todo plano que corta a E en P y no contiene a la tangente a E, corta a S según una curva con P punto cuspidal o de retroceso de primera especie (§ 71-4, *b*). Por esta razón la envolvente E se llama también *arista de retroceso* de S.

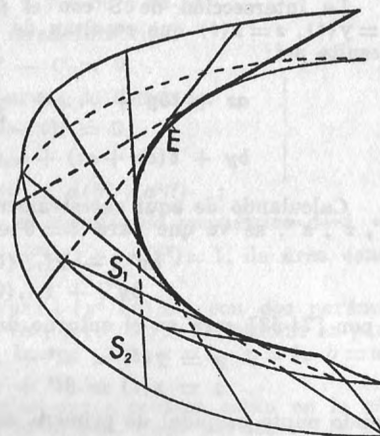


Fig. 247

Supongamos que P coincide con O(0, 0, 0) y corresponda a $t = 0$ en las [74-51]. Para que éstas sean resolubles en (x, y, z) debe ser

$$\partial(\mathrm{f}, \mathrm{f}_t, \mathrm{f}_{tt}) / \partial(x, y, z) \neq 0 \quad \text{en} \quad (0, 0, 0) \quad ,$$

es decir (§ 67-6, nota 3) son distintos y no colineales los planos Π_1, Π_2, Π_3, respectivamente tangentes en el punto (0, 0, 0) a las superficies

$$\mathrm{f}(x, y, z, 0) = 0 \quad , \quad \mathrm{f}_t(x, y, z, 0) = 0 \quad , \quad \mathrm{f}_{tt}(x, y, z, 0) = 0.$$

Supongamos que

$$[74\text{-}52] \qquad \mathrm{f}_{ttt}(0, 0, 0, 0) \neq 0$$

y elijamos los ejes de coordenadas de modo que $\Pi_1 \equiv (x, y)$, $\Pi_2 \equiv (x, z)$. El plano (y, z) será un plano *cualquiera* distinto de Π_1 y de Π_2. Suponiendo la existencia de las derivadas que intervienen tendremos (§ 44-1, *b*) los desarrollos en t:

$$\mathrm{f}(x, y, z, t) = \mathrm{f}(x, y, z, 0) + t\mathrm{f}_t(x, y, z, 0) + \frac{t^2}{2!}\mathrm{f}_{tt}(x, y, z, 0) +$$
$$+ \frac{t^3}{3!}\mathrm{f}_{ttt}(x, y, z, 0) + \ldots$$

$$\mathrm{f}_t(x,y,z,t) = \mathrm{f}_t(x,y,z,0) + t\mathrm{f}_{tt}(x,y,z,0) + \frac{t^2}{2!}\mathrm{f}_{ttt}(x,y,z,0) + \dots$$
$$\mathrm{f}_{tt}(x,y,z,t) = \mathrm{f}_{tt}(x,y,z,0) + t\mathrm{f}_{ttt}(x,y,z,0) + \dots$$
$$\mathrm{f}_{ttt}(x,y,z,t) = \mathrm{f}_{ttt}(x,y,z,0) + \dots$$

Por verificarse [74-51] en $(0,0,0,0)$ y por la elección de los ejes se tiene para los primeros términos de los segundos miembros en las tres primeras relaciones anteriores

$$\mathrm{f}(x,y,z,0) = az + \dots \qquad (a \neq 0) \; ,$$
$$\mathrm{f}_t(x,y,z,0) = by + \dots \qquad (b \neq 0) \; ,$$
$$\mathrm{f}_{tt}(x,y,z,0) = cx + dy + ez + \dots \qquad (c \neq 0) \; ,$$

donde los puntos suspensivos indican términos de grados mayores que 1 en x, y, z. [Es $a \neq 0$ por ser $\Pi_1 \equiv (x,y)$; $b \neq 0$ por $\Pi_2 \equiv (x,z)$; $c \neq 0$, pues de lo contrario Π_3, al contener el eje x, sería colineal con Π_1 y Π_2].

La intersección de S con el plano (y,z) se da por las funciones $y = \mathrm{y}(t)$, $z = \mathrm{z}(t)$ que resultan de las dos primeras [74-51] para $x = 0$. Resulta así:

$$\begin{cases} az + tby + \dots + \dfrac{t^3}{3!}\mathrm{f}_{ttt}(0,y,z,0) + \dots = 0 \\ by + t(dy + ez) + \dots + \dfrac{t^2}{2!}\mathrm{f}_{ttt}(0,y,z,0) + \dots = 0. \end{cases}$$

Calculando de aquí sucesivamente las derivadas respecto de t: y', z', y'', z'', z''', se ve que para $t = 0$ es $y'_0 = z'_0 = z''_0 = 0$, y

$$az'''_0 - 2\mathrm{f}_{ttt}(0,0,0,0) = 0 \; ,$$
$$by''_0 + \mathrm{f}_{ttt}(0,0,0,0) = 0 \; ,$$

y por [74-52] será en el entorno de $t = 0$,

$$y = \mathrm{y}(t) = \alpha t^2 + \dots \; , \quad (\alpha \neq 0) \; ,$$
$$z = \mathrm{z}(t) = \beta t^3 + \dots \; , \quad (\beta \neq 0) \; .$$

dando punto cuspidal de primera especie.

5. Superficies regladas desarrollables. — Un plano móvil S_t, o sea un haz (en sentido general) de planos

[74-53] $\qquad \mathrm{A}(t)x + \mathrm{B}(t)y + \mathrm{C}(t)z + \mathrm{D}(t) = 0 \; ,$

tiene por envolvente (§ 74-3, *a*) el lugar geométrico de la recta (variable con t) definida por [74-53] y

[74-54] $\qquad \mathrm{A}'(t)x + \mathrm{B}'(t)y + \mathrm{C}'(t)z + \mathrm{D}'(t) = 0.$

Esta envolvente es entonces una *superficie reglada* (§ 75-1) con la propiedad de que el plano tangente es el mismo en todos los puntos de cada recta característica (o generatriz rectilínea de E, § 75-1), y es uno de los planos del haz [74-53]; la llamaremos *reglada desarrollable* (cfr. § 75-2).

Las generatrices rectilíneas, por ser un haz de curvas características en E, admitirán (§ 74-4, *c*) una envolvente Γ que es arista de retroceso de E. Dicha envolvente Γ se obtiene (§ 74-4, *c*) considerando conjuntamente con [74-53] y [74-54] la ecuación

[74-55] $\qquad \mathrm{A}''(t)x + \mathrm{B}''(t)y + \mathrm{C}''(t)z + \mathrm{D}''(t) = 0.$

Como la superficie reglada desarrollable puede considerarse también engendrada por las tangentes a su arista de retroceso Γ, se la llama también *superficie tangencial* o *desarrollable circunscrita* de Γ (cfr. § 75-3). La curva Γ puede degenerar en un punto, propio o impropio (cfr. § 75-3).

EJERCICIOS

1. Envolvente de la familia de parábolas $(x - t)^2 - 2y = 0$, comprobando si se cumplen los teoremas 2, 3 y 4 de § 74-1.

2. Lo mismo para la familia de circunferencias
$$(x - 2t)^2 + y^2 - t^2 = 0.$$

3. Lo mismo para la familia de curvas de GERONO:
$$y^4 - y^2 + (x - t)^2 = 0.$$

4. 1º) Envolvente del haz de rectas
$$(b^2 - a^2t^2)x + 2a^2ty = a(b^2 + a^2t^2) \quad ;$$
2º) Estudiar el caso $a = b = 1$ dando el significado geométrico de t.

5. Envolvente del haz de elipses $(x^2/u^2) + (y^2/v^2) = 1$, de área constante $\pi uv = c$.

6. Envolvente de la familia $(x^n/u^n) + (y^n/v^n) = 1$ con dos parámetros u y v ligados por la relación $(u^p/a^p) + (v^p/b^p) = 1$. Estudiar en particular los casos: 1º) $n = 1$, $p = 2$, $b = a$; 2º) $n = 2$. $p = 1$, $b = a$; 3º) $n = p = 2$.

7. Envolvente de las circunferencias cuyos centros están en la cónica $(x^2/a^2) \pm (y^2/b^2) = 1$ y pasan por el origen. Caso particular de que la cónica sea una hipérbola equilátera.

8. Definiendo la *podaria* de una curva C respecto de un punto O como el lugar geométrico de los pies de las normales trazadas por el punto O a las tangentes a C, si M es el punto de contacto de éstas, demostrar que la podaria es la envolvente de las circunferencias que tienen como diámetro el radio vector variable OM.

9. *a*) Trayectoria en el vacío de un proyectil disparado en el plano x, y desde el origen con velocidad inicial de módulo v e inclinación t respecto de x horizontal, siendo g la aceleración de la gravedad (hacia $y < 0$); *b*) Envolvente de las trayectorias para v constante, t variable (*curva de seguridad*).

10. Dada la familia de curvas planas en forma vectorial [74-18], demostrar que la relación [74-21] equivale a $\mathbf{r}_t \wedge \mathbf{r}_u = 0$. Aplicar esta relación y las fórmulas de FRENET [73-35] a demostrar que la evoluta es la envolvente de las normales $\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + u\mathbf{n}(s)$ a una curva $\mathbf{p}(s)$, cuya abscisa curvilínea (§ 73-1) es s.

11. La *cáustica* de un espejo curvo C representado por la curva plana $\mathbf{p}(s)$, producida por un foco luminoso O tomado como origen, es la envolvente de los rayos reflejados $\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + u\mathbf{q}(s)$ por C a partir de O, donde s es la abscisa curvilínea de C, $\mathbf{q}$ unitario, $|\mathbf{q}| = 1$ y tal que si $\mathbf{t}$ es el vector tangente a C, son iguales los ángulos $(\mathbf{p}, \mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\pi - i$, con i ángulo de incidencia. Demostrar que se cumple $(1/u) + (1/p) = 2/(\varrho \cos i)$, siendo ϱ el radio de curvatura de C, y u la longitud del rayo reflejado desde C al punto de contacto de la cáus-

tica. Si la radiación incidente es paralela ($p \to \infty$), la normal a la cáustica pasa por el punto medio del radio de curvatura de C.

12. Demostrar que la cáustica de una circunferencia con el foco sobre ésta es una cardioide y si el foco está en el infinito (radiación paralela) es una epicicloide (cfr. § 55, ejercicio 3).

13. Evoluta de la parábola $y = x^2$.

14. Demostrar que la evoluta $\mathbf{r}(s)$ de una curva $\mathbf{p}(s)$ (con s abscisa curvilínea de $\mathbf{p}$) tiene en general un punto de retroceso de primera especie en los puntos s_0 correspondientes a los vértices (§ 55-7) de $\mathbf{p}(s)$, dados en ésta mediante $c'_1(s_0) = 0$, es decir, $\varrho'(s_0) = 0$, supuesto $\varrho''(s_0) \neq 0$ (cfr. § 74-2, ejemplo).

15. Envolvente del haz de los planos que determinan sobre los ejes de coordenadas los segmentos: $t^2/(t+a)$, $t^2/(t+b)$, $t^2/(t+c)$.

16. Envolvente de las superficies esféricas cuyos centros están sobre la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ del plano xy y pasan por el origen.

17. Si $z = z(x, y)$ es la ecuación de una superficie canal de radio unidad cuyo eje es una curva del plano $z = 0$, entonces cumple

$$z^2(z_x^2 + z_y^2 + 1) = 1 .$$

18. Demostrar que la envolvente de los planos tangentes a las parábolas $z = 0$, $y^2 = 4x$, é $y = 0$, $z^2 = 4x$ está formada por dos superficies cilíndricas parabólicas.

19. Probar que para hallar la envolvente general (§ 74-3, b) de una familia (de dos parámetros) de superficies expresada mediante tres parámetros u, v, w ligados por una relación:

$$f(x, y, z, u, v, w) = 0 \quad , \quad \varphi(u, v, w) = 0 \quad ,$$

deben eliminarse u, v, w entre las cuatro ecuaciones:

$$f = 0 \quad , \quad \varphi = 0 \quad , \quad f_u/\varphi_u = f_v/\varphi_v = f_w/\varphi_w .$$

20. Envolvente de los planos que separan del triedro coordenado un tetraedro de volumen constante k^3.

21. Envolvente de la familia de planos $(x/u) + (y/v) + (z/w) = 1$, tales que los parámetros cumplan la condición: 1º) $u + v + w = 1$; 2º) $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.

22. Demostrar que la envolvente de los planos $ux + vy + wz = p$, con los parámetros ligados por

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \quad \text{y} \quad u^2/(p^2 - a^2) + v^2/(p^2 - b^2) + w^2/(p^2 - c^2) = 0,$$

es la *superficie de ondas*:

$$a^2x^2/(r^2 - a^2) + b^2y^2/(r^2 - b^2) + c^2z^2/(r^2 - c^2) = 0$$

con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

23. Condición que deben cumplir los coeficientes de los planos

$$A_i(t)x + B_i(t)y + C_i(t)z + D_i(t) = 0 \quad , \quad (i = 1, 2) \quad ,$$

para que la recta intersección admita envolvente.

24. Mediante la previa transformación por radios vectores recíprocos (§ 67, ejercicio 23), hallar la envolvente de la familia de superficies esféricas tangentes a las tres:

$$[x - (3/2)]^2 + y^2 + z^2 = 9/4 \quad ; \quad x^2 + [y - (3/2)]^2 + z^2 = 9/4 \quad ;$$
$$x^2 + y^2 + [z - (3/2)]^2 = 9/4 .$$

25. Los radios de curvatura de flexión y de torsión de la arista de retroceso de la familia de planos $A(t)x + B(t)y + C(t)z + D(t) = 0$ vienen dados por

$$\varrho = \frac{|\Delta|\,\kappa^{3/2}}{|\delta|^3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad , \quad \tau = \frac{\Delta(A^2 + B^2 + C^2)}{\delta^2} \quad ,$$

donde

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} \quad ,$$

$$\kappa = (A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2 =$$
$$= \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}^2 .$$

Comprobarlo para la familia de planos $3t^2x - 6ty + 6z - t^3 = 0$. (Cfr. § 75, ejercicio 3 y § 73, ejercicio 11).

§ 75. SUPERFICIES REGLADAS

1. Superficies regladas en general. — Una superficie (§ 72-7) se llama *reglada* si por cada uno de sus puntos pasa al menos una recta llamada *generatriz rectilínea*, que tiene común con la superficie un segmento conteniendo dicho punto. Aquí sólo estudiaremos el caso en que cada generatriz rectilínea pertenece toda ella a la superficie y pueda tomarse el conjunto de generatrices como uno de los sistemas de líneas coordenadas (§ 72-7, b) de la superficie. Entonces una cualquiera de las líneas coordenadas del otro sistema se llama *directriz* de la superficie reglada.

Intuitivamente puede concebirse la superficie reglada como engendrada por una generatriz rectilínea que se mueva apoyándose en la directriz, con direcciones dadas.

Si la ecuación vectorial de la directriz, supuesta de derivada continua y referida a su abscisa curvilínea (§ 73-1) es

$$[75\text{-}1] \qquad \mathbf{r} = \mathbf{p}(s)$$

y sobre ella la generatriz rectilínea queda determinada por el *versor* derivable $\mathbf{q}(s)$, ($|\mathbf{q}| = 1$), la ecuación paramétrica vectorial de la superficie reglada es

$$[75\text{-}2] \qquad \mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + u\mathbf{q}(s) \quad , \quad \left|\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right| = 1 \quad , \quad |\mathbf{q}| = 1 \quad ,$$

donde los parámetros son s y u, fijando s cada generatriz y u cada punto sobre ella.

El punto es ordinario (§ 72-7, b) si

$$[75\text{-}3] \qquad \mathbf{r}_s \wedge \mathbf{r}_u = \left(\frac{d\mathbf{p}}{ds} + u\,\frac{d\mathbf{q}}{ds}\right) \wedge \mathbf{q} \neq \mathbf{0} .$$

Por tanto, en el caso de que $\mathbf{q}(s)$ no sea tangente a la directriz, es decir, se cumpla

$$[75\text{-}4] \qquad \frac{d\mathbf{p}}{ds} \wedge \mathbf{q}(s) \neq \mathbf{0} \quad ,$$

existe un entorno de la directriz ($u = 0$) donde la superficie reglada tiene todos sus puntos ordinarios.

Si la generatriz rectilínea viene dada por las ecuaciones cartesianas reducidas (§ 60-8, c_{23}):

[75-5] $$y = mx + h \quad , \quad z = nx + k \quad ,$$

con m, h, n, k funciones derivables de un parámetro cualquiera t tendremos un caso particular de [75-2], al tomar la directriz en el plano yz:

[75-6] $$\mathbf{p}(s) = \mathrm{h}(s)\mathbf{j} + \mathrm{k}(s)\mathbf{k}$$

y el versor generador dado por

[75-7] $$\mathbf{q}(s) = \frac{\mathbf{i} + \mathrm{m}(s)\mathbf{j} + \mathrm{n}(s)\mathbf{k}}{+\sqrt{1+m^2+n^2}} \, .$$

NOTA. En [75-6] y [75-7] supondremos frecuentemente que s es un parámetro t cualquiera y en lugar del versor $\mathbf{q}$, emplearemos el vector proporcional dado por el numerador de [75-7], de módulo nunca nulo.

Se comprueba fácilmente que se cumple [75-4] en los puntos ordinarios (§ 72-6, b) de [75-6].

2. **Plano tangente a una superficie reglada.** — Su ecuación en el punto (s, u), será (§ 72-7, b):

[75-8] $$[\mathbf{r} - \mathbf{p}(s)] \, . \, [(\mathbf{p}'(s) + u\mathbf{q}'(s)) \wedge \mathbf{q}(s)] = 0 \quad ,$$

en donde las letras acentuadas indican derivadas respecto de s y en cuyo primer factor se ha suprimido el término $-u\mathbf{q}(s)$ por ser $\mathbf{q}(s)$ perpendicular a [75-3].

Teniendo en cuenta las [75-6] y [75-7], respecto de la generatriz [75-5], la [75-8] se traduce cartesianamente en:

[75-9] $$\begin{vmatrix} x & y-h & z-k \\ 0 & h' & k' \\ 1 & m & n \end{vmatrix} + x_0 \begin{vmatrix} x & y-h & z-k \\ 0 & m' & n' \\ 1 & m & n \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

donde $x_0 = u/\sqrt{1+m^2+n^2}$ fija el punto sobre la generatriz [75-5].

EJEMPLO. Sean m, n, h, k funciones lineales de un parámetro t; eliminando t, resulta una ecuación de segundo grado, que representa una cuádrica.

Sea, por ejemplo,

$$y = tx + 2t + 1 \quad , \quad z = (t-1)x - 3t$$

y la cuádrica que definen tiene la ecuación

$$\frac{y-1}{x+2} = \frac{x+z}{x-3} \quad ,$$

o sea, reducida a forma entera resulta el paraboloide hiperbólico:

$$(y-1)(x-3) = (x+z)(x+2).$$

Según [75-9], el plano tangente en el punto de coordenada x_0 de la generatriz t_0 tiene por ecuación:

$$(5t_0 - x_0 - 2)x + (x_0 - 3)y - (x_0 + 2)z - 5t_0x_0 - x_0 + 3 = 0 \quad ,$$

que es fácil ver coincide con la obtenida por el método de § 62-4, nota.

DEF. Una superficie reglada se llama *desarrollable*, cuando el plano tangente en cada punto lo es en todos los puntos de la generatriz que pasa por él (cfr. § 74-5). Si la superficie no es desarrollable se llama *reglada alabeada.*

Para que en [75-8] y [75-9], el plano tangente sea el mismo al variar u, lo que es equivalente a decir que la normal [72-48] a la superficie se conserva paralela a sí misma a lo largo de cada generatriz, $(\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}) + u(\mathbf{q}' \wedge \mathbf{q})$ ha de conservarse independiente de u. Para que esto ocurra, si se cumple [75-4], es condición necesaria y suficiente que $\mathbf{n}$ tenga siempre la dirección de [75-4], es decir, sea:

$$[(\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}) + u(\mathbf{q}' \wedge \mathbf{q})] \wedge (\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}) = u(\mathbf{q}' \wedge \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}) = 0$$

para todo u, equivalente a poner (§ 60-7):

[75-10] $$u \, . (\mathbf{p}', \mathbf{q}, \mathbf{q}') \, . \, \mathbf{q} = 0 \quad ,$$

donde el paréntesis indica el producto mixto de los vectores $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$. Por ser siempre $|\mathbf{q}| = 1$, resulta que la condición necesaria y suficiente para que una superficie reglada [75-2] sea desarrollable, es que se anule el producto mixto

[75-11] $$(\mathbf{p}', \mathbf{q}, \mathbf{q}') = 0 .$$

Para la reglada dada en la forma [75-5], teniendo en cuenta [75-6] y [75-7], esta condición es equivalente a la (cfr. § 74-4, ej.)

[75-12] $$\Rightarrow m'k' = n'h' .$$

En particular, se cumple [75-11] si $\mathbf{q}' \equiv 0$, es decir, si el versor $\mathbf{q}$ conserva su dirección, en cuyo caso la superficie [75-2] es un cilindro. Esto es equivalente a que m y n en [75-5] sean constantes, es decir, $m' \equiv n' \equiv 0$, anulándose el segundo determinante de [75-9].

NOTA. Si $\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q} = 0$, la superficie [75-2] es la superficie tangencial a la curva [75-1], y por tanto es también desarrollable (cfr. § 75-4, a) (§ 74-5).

3. **Clasificación de las superficies desarrollables.** — La condición [75-11] permite clasificar las superficies desarrollables en cilindros, conos y superficies tangenciales con arista de retroceso (§ 74-5) según sea la naturaleza de las funciones vectoriales $\mathbf{p}(s)$ y $\mathbf{q}(s)$.

En efecto, la condición [75-11] es equivalente a la existencia de tres funciones $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ no nulas simultánea-

mente (§§ 60-7 y 60-2), tales que se cumpla idénticamente en s:

[75-13] $$\alpha\mathbf{p}' + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{q}' \equiv 0.$$

Si a lo largo de un arco de la directriz es $\alpha(s) \equiv 0$, deben ser $\mathbf{q}$ y $\mathbf{q}'$ linealmente dependientes, y como por la condición $\mathbf{q}^2 \equiv 1$ es $\mathbf{q}\,.\,\mathbf{q}' \equiv 0$, ello sólo puede ocurrir si $\mathbf{q}' \equiv 0$, es decir $\mathbf{q}$ es constante, las generatrices se conservan paralelas y la superficie es *cilíndrica.*

Si en [75-13] es $\alpha(s) \neq 0$, dicha condición podrá escribirse en la forma:

[75-14] $$\mathbf{p}' \equiv \lambda(s)\mathbf{q} + \mu(s)\mathbf{q}'.$$

Adoptemos en [75-2] el nuevo parámetro

[75-15] $$t = u + \mu(s) \quad ,$$

poniendo

[75-16] $$\mathbf{p}^*(s) = \mathbf{p}(s) - \mu(s)\mathbf{q}(s) \quad ,$$

y así la ecuación [75-2] se convierte en la

[75-17] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}^*(s) + t\mathbf{q}(s).$$

Aquí por [75-16] y [75-14] es

[75-18] $$\frac{d\mathbf{p}^*}{ds} = \frac{d\mathbf{p}}{ds} - \frac{d\mu}{ds}\mathbf{q} - \mu\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \left(\lambda - \frac{d\mu}{ds}\right)\mathbf{q}.$$

Si a lo largo de la directriz se conserva $\lambda(s) \equiv d\mu/ds$, entonces $\mathbf{p}^*(s)$ es constante y la superficie [75-17] es un *cono* con el vértice en $\mathbf{p}^*$, cono que también puede degenerar en un plano.

Si a lo largo de un arco de directriz es $\lambda \neq d\mu/ds$, entonces

[75-19] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}^*(s)$$

es una curva cuyas tangentes tienen por [75-18] la dirección de $\mathbf{q}(s)$ y así [75-17] es la *superficie tangencial* de la curva [75-19], es decir, ésta es la arista de retroceso de la superficie desarrollable [75-2].

NOTA. Para el caso de ecuaciones cartesianas [75-5], la condición [75-14] se convierte en $\lambda = 0$ y

$$\mu = -h'/m' = -k'/n'.$$

Entonces, la arista de retroceso [75-16] vendrá dada por:

$$\mathbf{p}^* = -\mu\mathbf{i} + (-m\mu + h)\mathbf{j} + (-n\mu + k)\mathbf{k} \quad ,$$

es decir, se obtendrá el punto de contacto sobre cada generatriz [75-5] haciendo

$$x = -\mu = -h'/m' = -k'/n'$$

de acuerdo con § 74-4, ejemplo.

4. Superficies regladas engendradas por los elementos del triedro intrínseco a una curva dada. — *a*) La superficie tangencial de la curva [75-1] es

[75-20] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + u\frac{d\mathbf{p}}{ds}.$$

Su normal es paralela a

[75-21] $$\mathbf{r}_s \wedge \mathbf{r}_u = \left(\frac{d\mathbf{p}}{ds} + u\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2}\right) \wedge \frac{d\mathbf{p}}{ds} = u\left(\frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \mathbf{t}\right) = u(\mathbf{n} \wedge \mathbf{t})/\varrho = -u\mathbf{b}/\varrho \quad ,$$

obtenida aplicando [73-35] y [73-27], con $\mathbf{t} = d\mathbf{p}/ds$.

Para s fijo y u variable, los vectores [75-21] son todos ellos paralelos a $\mathbf{b}$, lo que indica que la superficie tangencial tiene el mismo plano tangente a lo largo de la generatriz, que coincide con el plano osculador a la curva en el punto de abscisa s. Es pues, una superficie desarrollable, envolvente de los planos osculadores a la curva (§ 74-5).

Los vectores [75-21] son $\neq 0$ para $u \neq 0$ y $c_1 = 1/\varrho \neq 0$. Para $u = 0$ tenemos los puntos singulares que forman la curva dada, arista de retroceso de su desarrollable circunscrita.

b) La superficie reglada formada por las normales principales $\mathbf{n}(s)$ a la curva [75-1] es

[75-22] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + u\,\mathbf{n}(s) \quad ,$$

cuya normal es paralela a:

[75-23] $$\mathbf{r}_s \wedge \mathbf{r}_u = \left(\frac{d\mathbf{p}}{ds} + u\frac{d\mathbf{n}}{ds}\right) \wedge \mathbf{n} = \left(\mathbf{t} - \frac{u}{\varrho}\mathbf{t} - \frac{u}{\tau}\mathbf{b}\right) \wedge \mathbf{n} = \left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)\mathbf{b} + \frac{u}{\tau}\mathbf{t} \quad ,$$

obtenida aplicando [73-35], con $\mathbf{t} = d\mathbf{p}/ds$.

El vector [75-23] es sólo nulo para $u = \varrho$ y $c_2(s) = 1/\tau = 0$. Así pues, si la curvatura de torsión no es nula, la superficie reglada no tiene puntos singulares y además es alabeada. Para $u = 0$, la normal a la superficie es la binormal $\mathbf{b}$, y si ha de conservarse paralela a ésta vemos que la superficie es desarrollable cuando y sólo cuando es $c_2(s) = 1/\tau \equiv 0$. Entonces la curva es plana, pues el plano osculador es siempre el mismo plano a que se reduce la superficie desarrollable, con los puntos singulares en $u = \varrho$, es decir en la evoluta, que es la curva envuelta por las normales a la curva dada.

c) La superficie reglada formada por los binormales $\mathbf{b}(s)$ a la curva [75-1] es

[75-24] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + u\mathbf{b}(s) \quad ,$$

cuya normal es paralela a

[75-25] $$\mathbf{r}_s \wedge \mathbf{r}_u = \left(\frac{d\mathbf{p}}{ds} + u\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right) \wedge \mathbf{b} =$$

$$= (\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}) + \frac{u}{\tau}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{b}) = -\mathbf{n} + \frac{u}{\tau}\mathbf{t} \quad ,$$

obtenida aplicando [73-35], con $\mathbf{t} = d\mathbf{p}/ds$.

El vector [75-25] para $u \neq 0$ es sólo paralelo a $\mathbf{n}$ cuando $c_2(s) = 1/\tau \equiv 0$, es decir, la superficie reglada es desarrollable cuando y sólo cuando la curva dada es plana; entonces la superficie de las binormales es cilíndrica con generatrices perpendiculares al plano de la curva.

d) Los planos normales a la curva [75-1] tienen por ecuación paramétrica vectorial

[75-26] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + \lambda\mathbf{n}(s) + \mu\mathbf{b}(s) \quad ,$$

y supongamos que para [75-1] sea

[75-27] $$c_1(s) \equiv 1/\varrho \neq 0 \quad , \quad c_2(s) = 1/\tau \neq 0 .$$

La superficie envolvente (§ 74-3, nota 3) de los planos [75-26] se obtiene eliminando uno de los tres parámetros, s, λ, μ entre [75-26] y la condición dada por la anulación del producto mixto

[75-28] $$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mu}\right) = (\mathbf{p}' + \lambda\mathbf{n}' + \mu\mathbf{b}', \mathbf{n}, \mathbf{b}) = 0 .$$

Pero según [73-35], este determinante se convierte en $(\mathbf{t}(1 - \lambda/\varrho), \mathbf{n}, \mathbf{b}) = 1 - \lambda/\varrho$) nulo sólo para

[75-29] $$\lambda = \varrho .$$

La envolvente es, pues,

[75-30] $$\mathbf{r}(s, \mu) = \mathbf{p}(s) + \varrho(s)\mathbf{n}(s) + \mu\mathbf{b}(s) \quad ,$$

llamada *superficie polar*, pues para s fijo, la anterior ecuación representa el eje polar [73-94] de la curva dada. La normal a la superficie polar es paralela a

[75-31] $$\mathbf{r}_s \wedge \mathbf{r}_\mu = (\mathbf{p}' + \varrho'\mathbf{n} + \varrho\mathbf{n}' + \mu\mathbf{b}') \wedge \mathbf{b} =$$

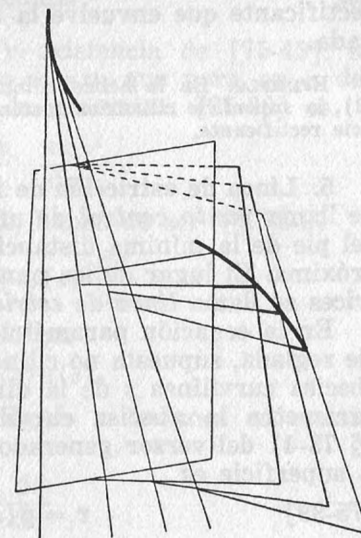
$$= (\mathbf{t} + \varrho'\mathbf{n} - \mathbf{t} - \frac{\varrho}{\tau}\mathbf{b} + \frac{\mu}{\tau}\mathbf{n}) \wedge \mathbf{b} = \left(\varrho' + \frac{\mu}{\tau}\right)\mathbf{t} \quad ,$$

obtenida aplicando [73-35] con $\mathbf{p}' = \mathbf{t}$.

La [75-31] demuestra que para s fijo, todas las normales son paralelas a $\mathbf{t}$, es decir, el plano tangente se conserva el mismo a lo largo del eje polar y coincidente con el plano normal a la curva. Los puntos singulares de la superficie desarrollable [75-30], según [75-31] se obtienen para

[75-32] $$\mu = -\tau\varrho' \quad ,$$

que sustituída en [75-30] da el centro [73-92] de la esfera osculatriz. Por tanto, la arista de retroceso de la superficie polar está formada por los centros de las esferas osculatrices a la curva dada (fig. 248). Sólo en el caso de curva esférica, dicha arista de retroceso se reduce a un punto, centro de la esfera y vértice del cono en que se convierte la superficie polar.


Fig. 248

e) Los planos rectificantes a la curva [75-1] tienen por ecuación paramétrica vectorial

[75-33] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + \lambda\mathbf{t}(s) + \mu\mathbf{b}(s)$$

con

[75-34] $$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t} + \left(\frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\mu}{\tau}\right)\mathbf{n} \quad ,$$

según las [73-35] y $\mathbf{t} = d\mathbf{p}/ds$.
Así se obtiene el producto mixto

[75-35] $$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mu}\right) = \left(\frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\mu}{\tau}\right)(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}) = -\left(\frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\mu}{\tau}\right),$$

cuya anulación

[75-36] $$\frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\mu}{\tau} = 0 \quad ,$$

junto con [75-33] da la envolvente desarrollable

[75-37] $$\mathbf{r}(s, u) = \mathbf{p}(s) + u(\varrho(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s)) \quad ;$$

su generatriz es la línea de acción del vector de DARBOUX [73-38].

Su normal es

[75-38] $$\mathbf{r}_s \wedge \mathbf{r}_u = (\mathbf{t} + u(\varrho'\mathbf{t} - \tau'\mathbf{b})) \wedge (\varrho\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}) =$$

$$= (\tau + u(\varrho'\tau - \varrho\tau'))\mathbf{n} \quad ,$$

obtenida aplicando [73-35] con $\mathbf{p}' = \mathbf{t}$. Así pues, a lo largo de la generatriz, el plano tangente es el mismo, coincidente con el plano rectificante a la curva dada.

Esta curva tiene su normal principal perpendicular al plano tangente a la desarrollable [75-37], condición que define lo que se llamará (§ 76-5, *d*) geodésica a una superficie y que en nuestro caso, al ser ésta desarrollada sobre un plano, convertirá en recta a la curva dada. De ahí el nombre de plano

rectificante que envuelve la *superficie rectificante* de la curva dada.

EJEMPLO. En la hélice cilíndrica (§ 72-6, ejemplo, y § 73, ejercicio 13), la superficie cilíndrica sostén de la hélice es precisamente su superficie rectificante.

5. Línea de estricción de una superficie reglada. — *a*) DEF. Se llama *punto central* de una generatriz a la posición límite del pie de la mínima distancia a otra generatriz infinitamente próxima. El lugar de los puntos centrales de todas las generatrices se llama *línea de estricción* de la superficie.

En la ecuación paramétrica vectorial [75-2] de la superficie reglada, supuesta no cilíndrica, será cómodo, en lugar de la abscisa curvilínea *s* de la directriz [75-1], tomar ahora como parámetro la abscisa curvilínea σ de la indicatriz esférica (§ 73-4) del versor generador **q**. En este caso, la ecuación de la superficie es

[75-39] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}(\sigma) + u\mathbf{q}(\sigma) \quad ,$$

cumpliéndose las condiciones:

[75-40] $$|\mathbf{q}(\sigma)| = 1 \quad ; \quad \left|\frac{d\mathbf{q}}{d\sigma}\right| = 1 \quad ; \quad \mathbf{q}.\frac{d\mathbf{q}}{d\sigma} = 0.$$

El vector que une dos puntos de la superficie [75-39] de coordenadas paramétricas $P_0(\sigma, u)$ y $P_1(\sigma + \Delta\sigma, u + \Delta u)$ es

[75-41] $$P_0P_1 = \Delta\mathbf{p} + \Delta u\,.\,\mathbf{q} + (u + \Delta u)\Delta\mathbf{q} \quad ,$$

donde

$$\mathbf{p}(\sigma + \Delta\sigma) = \mathbf{p}(\sigma) + \Delta\mathbf{p} \quad , \quad \mathbf{q}(\sigma + \Delta\sigma) = \mathbf{q}(\sigma) + \Delta\mathbf{q}.$$

Determinemos P_0P_1 de modo que sea perpendicular a **q** y $\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$.

Para un σ determinado, $\Delta\sigma \to 0$, hemos de elegir *u* y también Δu en tal forma que el producto escalar del vector [75-41] por **q** y por $\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$ se anule (§ 60-5, *c*).

De la anulación del primer producto escalar se deduce

[75-42] $$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\sigma}\,\mathbf{q} + \frac{\Delta u}{\Delta\sigma} + (u + \Delta u)\,\frac{\Delta\mathbf{q}}{\Delta\sigma}\,\mathbf{q} = 0.$$

Para $\Delta\sigma \to 0$, la última de las [75-40] indica que en [75-42] ha de existir y ser

[75-43] $$\frac{du}{d\sigma} = -\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma}\,.\,\mathbf{q}.$$

De la anulación del segundo producto escalar, teniendo en cuenta [75-42], se deduce

[75-44] $$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\sigma}\,.\,\frac{\Delta\mathbf{q}}{\Delta\sigma} + \frac{\Delta u}{\Delta\sigma}\,.\,\mathbf{q}\,.\,\frac{\Delta\mathbf{q}}{\Delta\sigma} + (u + \Delta u)\left(\frac{\Delta\mathbf{q}}{\Delta\sigma}\right)^2 = 0.$$

Para $\Delta\sigma \to 0$, de las [75-41] y existencia de [75-43], se deduce que el valor del parámetro $u = u_c$ que para un σ determinado da el punto central de la generatriz [75-39] es

[75-45] $$u_c = -\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma}\,.\,\frac{d\mathbf{q}}{d\sigma}\,.$$

Si la superficie es desarrollable, habrá de ser (§ 75-3)

[75-46] $$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \lambda(\sigma)\mathbf{q}(\sigma) + \mu(\sigma)\,\frac{d\mathbf{q}}{d\sigma}\,,$$

viniendo dada la arista de retroceso por

[75-47] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}(\sigma) - \mu(\sigma)\mathbf{q}(\sigma).$$

Si multiplicamos [75-46] por $d\mathbf{q}/d\sigma$ y tenemos en cuenta las [75-40], resultará

[75-48] $$\mu(\sigma) = \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma}\,.\,\frac{d\mathbf{q}}{d\sigma}\,,$$

que por [75-45] y [75-47] demuestra que: *En las superficies desarrollables la línea de estricción es la arista de retroceso.*

NOTA. Si la reglada se da en la forma cartesiana [75-5], con *m*, *n*, *h*, *k* funciones de un parámetro cualquiera *t*, se pasará a la forma vectorial [75-39] tomando

[75-49] $$\mathbf{p} = h(\sigma)\mathbf{j} + k(\sigma)\mathbf{k}$$

[75-50] $$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{i} + m(\sigma)\mathbf{j} + n(\sigma)\mathbf{k}}{+\sqrt{1 + m^2 + n^2}}$$

de donde, la coordenada *x* que en [75-5] da el punto central, es

[75-51] $$x_c = -\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma}\,.\,\frac{d\mathbf{q}}{d\sigma}\right) : \sqrt{1 + m^2 + n^2}.$$

Si indicamos con letras acentuadas las derivadas respecto de *t*, según § 73-1 es

[75-52] $$\sigma' = |\mathbf{q}'| \quad ,$$

y como

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \frac{\mathbf{p}'}{\sigma'} \;,\; \frac{d\mathbf{q}}{d\sigma} = \frac{\mathbf{q}'}{\sigma'} \;,$$

al ser

[75-53] $$\begin{cases} \mathbf{p}'\mathbf{q}' = \dfrac{m'h' + n'k' + (mn' - m'n)\,(mk' - nh')}{(1 + m^2 + n^2)^{3/2}}\,, \\[2ex] \mathbf{q}'^2 = \dfrac{m'^2 + n'^2 + (mn' - nm')^2}{(1 + m^2 + n^2)^2}\,, \end{cases}$$

sustituyendo en [75-51], resulta para el punto central

[75-54] $$x_c = -\frac{m'h' + n'k' + (mn' - m'n)\,(mk' - nh')}{m'^2 + n'^2 + (mn' - nm')^2}\,,$$

con las otras dos coordenadas obtenidas sustituyendo este valor en [75-5].

Si la superficie es desarrollable, se cumple [75-12], por la que [75-54] se convierte en la arista de retroceso

$$x_c = -h'/m' = -k'/n' \qquad (\text{§ 75-3, nota}).$$

b) Estudiemos el orden de la distancia entre dos generatrices infinitamente próximas de la superficie reglada.

Tomando la generatriz considerada como eje x, de manera que para $t = t_0$ se anulen en [75-5] los coeficientes m, n, h, k, si damos a t otro valor tenemos otra generatriz, y sea $x = x_0$ el plano paralelo al yz que contenga la perpendicular incidente a ambas. Entonces, la mínima distancia tiene por componentes 0, $mx_0 + h$, $nx_0 + k$, con valor

[75-55] $$d = +\sqrt{(mx_0 + h)^2 + (nx_0 + k)^2}.$$

Si dividimos por $t - t_0 \to 0$, será

[75-56] $$\lim_{t \to t_0} \frac{d}{t - t_0} = +\sqrt{(m'x_c + h')^2 + (n'x_c + k')^2}\ ,$$

sólo nulo, si la generatriz cumple [75-12]. Por esto se dice *en lenguaje figurado que dos generatrices infinitamente próximas se cortan o no, según que la superficie reglada sea desarrollable o alabeada.*

6. Plano central y parámetro de distribución. — El plano tangente en el punto central de una generatriz se llama *plano central.*

Adoptemos el punto central del eje x como origen, y el plano central como xy. Si en [75-5], corresponde el eje x al valor $t = 0$ del parámetro, para éste deberá ser $m(0) = n(0) = h(0) = k(0) = 0$.

Además, en [75-54], como la coordenada del punto central debe ser nula, se verifica:

[75-57] $$m'h' + n'k' = 0\ ,$$

y como la ecuación del plano tangente [75-9] se reduce a $z = 0$, debe ser $k' = 0$; pero $m'k' \neq n'h'$ si la superficie no es desarrollable, es decir, $h' \neq 0$, luego también $m' = 0$, para $t = 0$, es decir, para todos los puntos de la generatriz.

La ecuación del plano tangente [75-9] en el punto x_0 se reduce, pues, a ésta:

[75-58] $$n'x_0 y = h'z\ ,$$

luego: *La pendiente $z{:}y$ del plano tangente sobre el plano central es proporcional a la distancia x_0 del punto de contacto al punto central* O. (Teorema de CHASLES).

El número $\kappa = h'/n'$ se llama *parámetro de distribución* de la generatriz, y la relación anterior se puede escribir: $x_0 = \kappa$. pendiente.

Si κ es nulo o infinito, es decir, nulos h' ó n', la superficie es desarrollable; y cesa la propiedad, puesto que el plano tangente es el mismo a lo largo de toda la generatriz.

EJERCICIOS

1. Ecuación vectorial del *helicoide recto*, es decir, de la superficie engendrada por una recta móvil que cortando al eje z en ángulo recto, gira y se desplaza alrededor y a lo largo de dicho eje con movimientos uniformes. Puntos singulares de la superficie, mostrando que es alabeada. Ecuación cartesiana del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie.

2. Demostrar que la superficie reglada $x = (2/t^2)z + (2t/3)$, $y = (2/t)z + (t^2/6)$ es desarrollable y hallar la arista de retroceso. Plano tangente en $(t_0; z_0)$.

3. Dada la curva $\mathbf{p}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + (1/6)t^3\mathbf{k}$, hallar la superficie polar y su arista de retroceso como lugar de los centros de las esferas osculatrices y como envolvente de los ejes de curvatura. Hallar la superficie tangencial (o desarrollable circunscrita), así como la superficie rectificante y la envolvente de las características de ésta. Vector de DARBOUX **d** de la curva dada $\mathbf{p}(t)$.

4. La superficie polar de una curva plana es un cilindro cuya sección recta es la evoluta de la curva en su plano.

5. Las normales $\mathbf{m} = \mathbf{p}(s) + u(\cos\varphi\mathbf{n} + \operatorname{sen}\varphi\mathbf{b})$ a una curva alabeada $\mathbf{p}(s)$ dependen de dos parámetros: la abscisa curvilínea s de la curva $\mathbf{p}(s)$ que determina el punto de incidencia y el ángulo φ que la normal **m** forma con la normal principal **n**. Mediante la condición [75-11], aplicando las fórmulas de FRENET [73-35], demostrar que si hacemos $\varphi = \varphi(s)$, se ha de cumplir $d\varphi/ds = 1/\tau$, para que las normales **m** admitan envolvente dada por $u = \varrho/\cos\varphi$, llamada *evoluta* (cfr. § 55-8) de la curva $\mathbf{p}(s)$, situada en la superficie polar de ésta.

6. Demostrar que la longitud $\sigma_2 - \sigma_1$ de un arco de evoluta sin punto singular es igual a la diferencia $u_2 - u_1$ de longitudes de las normales correspondientes a sus extremos (cfr. § 55-8, *c*).

7. Se llama *evolvente* C de una curva Γ a toda curva C que tenga Γ como evoluta (cfr. § 55-8). Dada la curva Γ mediante $\mathbf{r}(\sigma)$, con σ abscisa curvilínea de Γ, hallar el vector $\mathbf{p}(\sigma)$ que determina la evolvente C que parte de un punto $\sigma_0 = 0$ de Γ. Situación de la tangente y plano normal de C respecto del triedro intrínseco de Γ.

8. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la evolvente C sea plana es que la evoluta Γ sea una hélice (o bien curva plana) (cfr. § 73, ejercicio 13).

9. Dada la hélice $\mathbf{r}(u) = r\cos u\mathbf{i} + r\operatorname{sen} u\mathbf{j} + ku\mathbf{k}$, hallar la evolvente que yace en el plano $z = 0$, compararla con la de la circunferencia proyección de la hélice y comprobar que la tangente a la evolvente es paralela a la normal principal de la hélice.

10. Obtener el helicoide desarrollable $\mathbf{r}(t, u)$ circunscripto a la hélice $\mathbf{r}(t) = r\cos t\mathbf{i} + r\operatorname{sen} t\mathbf{j} + kt\mathbf{k}$, y su intersección con el plano $z = 0$.

11. Demostrar que en las *superficies regladas de plano director* (es decir, donde las generatrices se conservan paralelas a un plano fijo), la proyección ortogonal de la línea de estricción sobre el plano director es la envolvente de las proyecciones de las generatrices sobre el mismo plano, y por tanto la línea de estricción es el lugar de puntos de la superficie donde el plano tangente es perpendicular al plano director.

12. Línea de estricción de: 1º) Hiperboloide reglado de revolución $(x^2/a^2) + (y^2/a^2) - (z^2/c^2) = 1$; 2º) Paraboloide hiperbólico equilátero $2pz = x^2 - y^2$; 3º) Reglada $y = \frac{1}{2}tx$; $z = (3/4)tx - \frac{1}{2}t$.

13. Dadas las tres rectas paralelas al plano yz

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2z \end{cases} , \quad \begin{cases} x=2 \\ y=z \end{cases} ,$$

y no coplanares dos a dos, hallar la ecuación del paraboloide hiperbólico que determinan (§ 62, ejercicio 15), el otro plano director, las líneas de estricción de sus dos sistemas de generatrices y su ecuación reducida. Hallar en este paraboloide el haz de planos tangentes en puntos de la generatriz $x=y=0$, aplicando el teorema de CHASLES.

14. Dadas las tres rectas no coplanares dos a dos y no paralelas a un plano

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ z=0 \end{cases} ,$$

hallar la ecuación del hiperboloide reglado que determinan (§ 62, ejercicio 15) y su forma reducida (§ 63-8, a).

15. Hallar las dos generatrices: 1º) Del hiperboloide reglado $x^2+y^2-z^2=1$ que pasan por el punto (5; —5; 7); 2º) Del paraboloide hiperbólico $z=(x^2/9)-(y^2/4)$ que pasan por el punto (—6; —2; 3).

16. Dado el cilindro $(x+y+z)(x-2y+z)=1$, hallar sus generatrices, su directriz sobre el plano xy y su ecuación reducida.

§ 76. LAS FORMAS FUNDAMENTALES DE LAS SUPERFICIES: LÍNEAS NOTABLES

1. La primera forma fundamental. — Si sobre una superficie (§ 72-7):

[76-1] $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \mathrm{x}(u, v)\mathbf{i} + \mathrm{y}(u, v)\mathbf{j} + \mathrm{z}(u, v)\mathbf{k}$$

de componentes diferenciables, consideramos curvas

[76-2] $$u = \mathrm{u}(t) \quad , \quad v = \mathrm{v}(t)$$

con tangente continua, nos proponemos estudiar su diferencial de arco (§ 73-1) dada por $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t)^2\mathrm{d}t^2 = (\mathbf{r}_u\mathrm{d}u + \mathbf{r}_v\mathrm{d}v)^2$, que desarrollada es:

[76-3] $$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g_{22}\mathrm{d}v^2 \ ,$$

donde los coeficientes de GAUSS g_{ik}, vistos en [72-45], sólo dependen del punto (u, v) de la superficie y no de la curva [76-2].

La forma cuadrática diferencial [76-3] se llama *primera forma fundamental* de las superficies, que por [72-46], en los puntos regulares [72-47] es siempre definida positiva (§ 63-7). Por tanto, ella introduce una métrica infinitesimal propiamente euclídea (Cap. XVII, nota II) sobre la superficie.

Sirve también para medir el *ángulo de dos curvas*

[76-4] $$u = \mathrm{u}_i(t_i) \quad , \quad v = \mathrm{v}_i(t_i) \quad , \quad i = 1, 2 \ ,$$

que sobre la superficie pasan por un mismo punto en determi-

nados valores de los parámetros t_1 y t_2. Dicho ángulo φ se define por el que forman sus respectivos vectores tangenciales (§ 72-6):

[76-5] $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t_1} = \mathbf{r}_u\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t_1} + \mathbf{r}_v\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t_1} \ , \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t_2} = \mathbf{r}_u\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t_2} + \mathbf{r}_v\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t_2} \ ,$$

y que vendrá dado (Cap. XVII, nota II, b) por

[76-6] $$\cos\varphi = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t_1}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t_2}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t_1}\right|\cdot\left|\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t_2}\right|} \ , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \ ,$$

es decir por

[76-7] $$\cos\varphi = \\ = \frac{g_{11}\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t_1}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t_2} + g_{12}\left(\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t_1}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t_2} + \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t_2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t_1}\right) + g_{22}\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t_1}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t_2}}{\sqrt{g_{11}\left(\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t_1}\right)^2 + 2g_{12}\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t_1}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t_1} + g_{22}\left(\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t_1}\right)^2}\cdot\sqrt{g_{11}\left(\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t_2}\right)^2 + \ldots}}$$

Si ambas curvas son las líneas coordenadas (§ 72-7, b) de la superficie que pasan por el punto, se ha de tomar $\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}t_1 = 0$, $\mathrm{d}u_2/\mathrm{d}t_2 = 0$, y entonces el ángulo ω que forman ambas líneas coordenadas viene dado por

[76-8] $$\cos\omega = g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}} \ .$$

Por tanto, $g_{12} = 0$ representa la *condición de ortogonalidad* de las coordenadas.

2. La segunda forma fundamental. — a) Supongamos existan continuas las derivadas vectoriales segundas de la expresión analítica vectorial [76-1] de la superficie S en el entorno de un punto $\mathrm{P}_0(u_0, v_0)$. Nos proponemos estudiar la *curvatura* de la superficie en P_0, mediante la de sus distintas líneas que pasan por P_0, para tener idea de la desviación que en el entorno de P_0 experimenta la superficie respecto de su comportamiento plano que en primera aproximación da su plano tangente [72-51] en P_0.

Esta desviación quedará evaluada por la distancia X_3 al plano tangente en P_0 de un punto variable P de la superficie tomado en el entorno de P_0. Dada por [72-48] la normal $\mathbf{n}$ a la superficie, *orientada* según el sentido del producto vecto-

rial $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$, la distancia X_3 viene dada en magnitud y signo (§ 60-8, *b*) por

$$[76\text{-}9] \qquad X_3 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} \ ,$$

donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_0$ son los vectores de posición de los puntos P y P_0 de S.

Si aplicamos para $n = 2$ la fórmula de TAYLOR [72-34], y tenemos en cuenta que $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n} = 0$, la [76-9] se convierte en

$$[76\text{-}10] \quad X_3 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_0^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_0 \partial v_0} hk + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v_0^2} k^2\right) \cdot \mathbf{n} + o(\varrho^2),$$

con $\varrho = +\sqrt{h^2 + k^2}$, $h = u - u_0$, $k = v - v_0$.

Si teniendo en cuenta [72-48], y § 60-7, *a*, introducimos los coeficientes

$$[76\text{-}11] \quad \begin{cases} D_{11} = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} = \dfrac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{+\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \ , \\ D_{12} = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} = \dfrac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{+\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \ , \\ D_{22} = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} = \dfrac{(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{+\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \ , \end{cases}$$

la [76-10] se escribe

$$[76\text{-}10^*] \quad X_3 = \tfrac{1}{2}[D_{11}(u_0, v_0) h^2 + 2D_{12}(u_0, v_0) hk + \\ + D_{22}(u_0, v_0) k^2] + o(\varrho^2).$$

Referidas las coordenadas cartesianas $x_1 = h$, $x_2 = k$, x_3 a los vectores $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{n}$ en P_0 tomados como ejes de referencia, la parte principal de [76-10*], dada por

$$[76\text{-}12] \qquad x_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma D_{ij}(u_0, v_0) x_i x_j \ ,$$

representa el llamado *paraboloide osculador* (§ 62-3, *a*) a la superficie S en P_0.

Respecto de una curva cualquiera [76-2] de la superficie que pase por P_0, supuestas existentes las derivadas segundas de las funciones [76-2], la función compuesta $\mathbf{r}[\mathrm{u}(t), \mathrm{v}(t)]$ tiene (§ 69-3, *b*) por diferencial segunda en P_0:

$$[76\text{-}13] \qquad \mathbf{r}_{tt}(t_0)\, dt^2 = \\ = \left(du \frac{\partial}{\partial u} + dv \frac{\partial}{\partial v}\right)^{(2)} \mathbf{r}(u_0, v_0) + \mathbf{r}_{u_0}\, d^2u + \mathbf{r}_{v_0}\, d^2v \ ,$$

y por ser $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n} = 0$, al multiplicar escalarmente ambos miembros de [76-13] por $\mathbf{n}$, queda la forma cuadrática diferencial:

$$[76\text{-}14] \qquad \mathbf{r}_{tt}(t_0) \cdot \mathbf{n}\, dt^2 = D_{11}(u_0, v_0)\, du^2 + \\ + 2D_{12}(u_0, v_0)\, du dv + D_{22}(u_0, v_0)\, dv^2 \ ,$$

llamada *segunda forma fundamental* de las superficies.

b) Para el caso particular de ser $u = x$, $v = y$, la forma paramétrica [76-1] se convierte en la representación explícita (§ 72-7, *a*):

$$[76\text{-}15] \qquad z = \mathrm{f}(x, y) \ ,$$

de las que también supondremos existen continuas las derivadas segundas.

Si tomamos como plano xy el tangente a la superficie en el punto P_0 y a éste como origen de coordenadas, $\mathrm{f}(0, 0) = 0$, la distancia [76-9] es ya directamente la coordenada z dada por la ecuación [76-15], las derivadas en (0; 0) son $\mathrm{f}_x(0, 0) = 0$, $\mathrm{f}_y(0, 0) = 0$, los vectores tangenciales [72-59] a las líneas coordenadas son $\mathbf{r}_x = \mathbf{i}$, $\mathbf{r}_y = \mathbf{j}$, con normal $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ y derivadas vectoriales segundas $\mathbf{r}_{xx} = \mathrm{f}_{xx}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_{xy} = \mathrm{f}_{xy}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_{yy} = \mathrm{f}_{yy}\mathbf{k}$. Entonces los coeficientes [76-11] son simplemente

$$[76\text{-}16] \qquad D_{11} = \mathrm{f}_{xx} \ , \quad D_{12} = \mathrm{f}_{xy} \ , \quad D_{22} = \mathrm{f}_{yy} \ ,$$

y el paraboloide osculador [76-12] está dado por los términos de segunda aproximación del desarrollo de TAYLOR de [76-15], es decir,

$$[76\text{-}17] \qquad 2z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

si llamamos a las derivadas segundas $\mathrm{f}_{xx}(0, 0) = A$, $\mathrm{f}_{xy}(0, 0) = B$, $\mathrm{f}_{yy}(0, 0) = C$ (cfr. § 40-5).

Las dos generatrices rectilíneas del paraboloide [76-17] en el punto P_0 vienen dadas por la ecuación (§ 62-4, *c*):

$$[76\text{-}18] \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Las bisectrices del ángulo de estas generatrices son las direcciones principales del paraboloide, es decir, las secciones del plano tangente con los dos planos principales, que también se llaman *direcciones principales de la superficie* (§ 71-6).

Si las adoptamos como ejes x é y, debe reducirse B a 0, para que los valores de y correspondientes a cada valor de x sean iguales y de signo contrario, y la ecuación del paraboloide osculador es:

$$[76\text{-}19] \qquad 2z = Ax^2 + Cy^2.$$

3. **Indicatriz de Dupin.** — *a*) Ya hemos dicho (§ 76-2, *a*) que estudiar la curvatura de una superficie en un punto O es conocer la curvatura de las diversas curvas que pasan por él. Veremos que el estudio de esta curvatura se reduce al de las secciones normales de la superficie trazadas por O. Para comparar la curvatura de las producidas por el haz de planos normales en O, ideó DUPIN la gráfica siguiente:

DEF. Dada una superficie cualquiera, si consideramos todas las secciones normales en un punto O de la misma, es de-

cir, las curvas determinadas por los planos que pasan por la normal en O, y para cada curva llevamos sobre la tangente, a uno y otro lado, un segmento $r = \pm\sqrt{\varrho}$ igual a la raíz cuadrada del radio de curvatura de dicha curva en el punto O, tenemos infinitos vectores cuyos extremos forman una curva llamada *indicatriz* de la superficie en el punto O.

Para esto bastará efectuar la construcción en el paraboloide osculador [76-19] a la superficie en O (§§ 40-5 y 55-5).

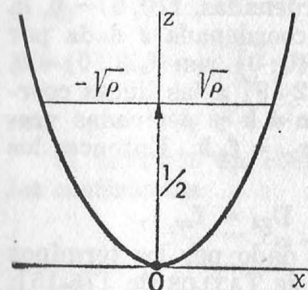


Fig. 249

Recordemos una sencilla propiedad de la parábola $x^2 = 2pz$.

Haciendo $z = \frac{1}{2}$ resulta $x = \sqrt{p}$, y como $p = \varrho$ es el radio de curvatura en el vértice (§ 55-5, ejemplo 1), tenemos un medio gráfico muy sencillo (fig. 249) para construir $\sqrt{\varrho}$.

Si la ecuación es $2z = Ax^2$, el coeficiente $A = 1/\varrho$ es la curvatura en el vértice.

Primer caso; punto elíptico: $H = AC > 0$. Entonces tienen A y C el mismo signo; el paraboloide es elíptico. Todas las secciones normales de la superficie tienen la curvatura en el mismo sentido. La ecuación de la indicatriz resulta haciendo $z = \frac{1}{2}$ y es: $Ax^2 + Cy^2 = 1$, siendo A y C las derivadas segundas de $f(x, y)$. Sus recíprocos son los radios principales $\varrho_1 = 1/A$, $\varrho_2 = 1/C$.

Si [76-19] se pone en la forma (§ 62-3, *b*):

[76-20] $$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q},$$

la ecuación de la indicatriz (fig. 250) es:

[76-21] $$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1.$$

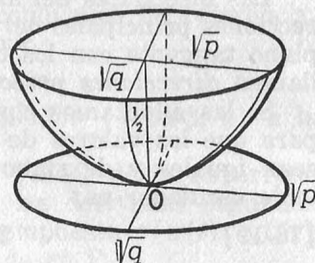


Fig. 250

Los *radios principales* son:

$$\varrho_1 = p \quad , \quad \varrho_2 = q .$$

En un punto elíptico todas las secciones normales tienen la curvatura dirigida en el mismo sentido; y comprendida entre los valores $f_{xx}(0, 0)$ y $f_{yy}(0, 0)$ *La indicatriz es una elipse.*

En particular, cuando es $\varrho_1 = \varrho_2$ todos los radios son iguales; la indicatriz es una circunferencia. El punto se llama *umbílico* o también *cíclico.*

Segundo caso; punto hiperbólico: $H = AC < 0$. Puesto que A y C tienen signos opuestos, el paraboloide es hiperbólico;

las dos generatrices son simétricas. Para todas las secciones trazadas en uno de los ángulos de dichas rectas la curvatura está dirigida en un sentido y para el otro ángulo en sentido opuesto (fig. 251).

Puesto que el número $\sqrt{\varrho}$ correspondiente a cada parábola no es sino la ordenada de la parábola que dista $\frac{1}{2}$ del origen, si cortamos la superficie por el plano horizontal $z = \frac{1}{2}$, éste determinará sobre las parábolas dirigidas hacia arriba una hipérbola; y análogamente el plano $z = -\frac{1}{2}$ corta a las parábolas de curvatura negativa según otra hipérbola.

Trasladando paralelamente hasta el plano xy dichas dos

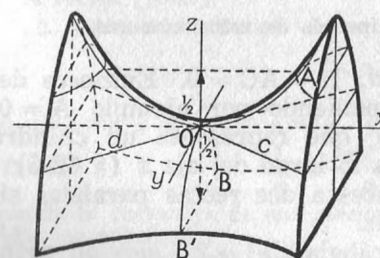


Fig. 251

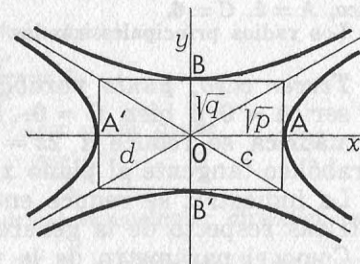


Fig. 252

secciones tenemos la indicatriz de la superficie (fig. 252). Esta indicatriz se compone, pues, de dos hipérbolas que tienen como asíntotas las dos generatrices de la superficie y situadas una en cada uno de los dos ángulos completos que dichas rectas forman.

Los semiejes de dichas hipérbolas corresponden a los radios de las dos secciones *principales* de la superficie. Estos radios se llaman *radios principales de curvatura* y sus valores son: $\varrho_1 = p$, $\varrho_2 = q$, si la ecuación del paraboloide [76-19] toma la forma (§ 62-3, *b*):

[76-22] $$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}.$$

Las ecuaciones de estas hipérbolas resultan haciendo $z = \frac{1}{2}$ y $z = -\frac{1}{2}$ en la ecuación del paraboloide, y son:

[76-23] $$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1 \quad ; \quad \frac{y^2}{q} - \frac{x^2}{p} = 1 \quad ;$$

sus asíntotas son las rectas:

[76-24] $$\frac{y}{x} = \pm\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}.$$

La indicatriz se compone de dos hipérbolas con las mismas asíntotas.

Los radios oscilan en los intervalos (ρ_1, ∞), (ρ_2, ∞), siendo ρ_1 y ρ_2 los recíprocos de las curvaturas principales A y C.

EJEMPLOS. Sean los paraboloides

$$z = 4x^2 + y^2 \quad ; \quad z = x^2 - 3y^2.$$

Las indicatrices en el origen se obtienen inmediatamente haciendo $z = \frac{1}{2}$ en la primera ecuación, y resulta la elipse

$$8x^2 + 2y^2 = 1 \quad ,$$

o bien $z = \pm 1$ en la segunda, y resulta el par de hipérbolas conjugadas:

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad , \quad 3y^2 - x^2 = 1.$$

Recordando que las curvaturas principales son las derivadas segundas, éstas son para el paraboloide elíptico $A = 8$, $C = 2$; para el hiperbólico, $A = 2$, $C = 6$.

Los radios principales son los recíprocos de estos números.

Tercer caso; punto parabólico: $H = AC = 0$. Entonces debe ser $A = 0$ ó bien $C = 0$. Suponiendo por ejemplo $A = 0$, la cuádrica se reduce a $2z = Cy^2$ que representa un cilindro parabólico tangente al plano xy a lo largo del eje x (§ 62-5).

La indicatriz se reduce entonces a dos rectas paralelas simétricas respecto de la generatriz.

Como el parámetro de la parábola $Cy^2 = 2z$, sección principal por el plano xy, es $1/C$, el radio de curvatura principal es $\rho_1 = 1/C$; luego las dos rectas que forman la indicatriz distan $1/\sqrt{C}$ del eje x.

b) Para el caso en que la superficie se dé en forma paramétrica general [76-1], el paraboloide osculador es el [76-12]. Entonces la indicatriz de DUPIN viene dada por el par de curvas

$$[76\text{-}25] \qquad \Sigma D_{ij}(u_0, v_0)\, x_i x_j = +1 \text{ resp. } -1.$$

Aquí también el signo del hessiano del primer miembro de [76-25] repite la anterior clasificación.

1º) $H = D_{11}D_{22} - D_{12}^2 > 0$. Punto elíptico y la indicatriz es una elipse.

2º) $H = D_{11}D_{22} - D_{12}^2 < 0$. Punto hiperbólico y la indicatriz está formada por un par de hipérbolas con las mismas asíntotas.

3º) $H = D_{11}D_{22} - D_{12}^2 = 0$. Punto parabólico y la indicatriz está formada por un par de rectas paralelas.

NOTAS: 1. Si en la ecuación de la superficie

$$2z = Ax^2 + Cy^2 + Dx^3 + Ex^2y + \ldots$$

hacemos $z = h$, obtenemos como sección de la superficie la curva

$$2h = Ax^2 + Cy^2 + \ldots \quad \text{o aproximadamente:} \quad 2h = Ax^2 + Cy^2$$

despreciando los términos siguientes, que son infinitésimos superiores en el entorno del origen. Comparada esta curva con la indicatriz $1 = Ax^2 + Cy^2$ son curvas semejantes; por tanto:

Las secciones de la superficie por planos paralelos al tangente en un punto son curvas sensiblemente semejantes a la indicatriz en ese punto.

2. *Tensor de curvatura.* El conjunto de curvaturas de las secciones normales por 0 se sintetiza por el tensor doble simétrico bidimensional (§ 63-1) que tiene a la indicatriz de DUPIN como línea directriz (§ 63-4). Las curvaturas son los valores (§ 63-3) del tensor en cada dirección.

Las curvaturas principales corresponden a las direcciones principales. El tensor de curvatura de indicatriz [76-19] por ser bidimensional tiene sólo *dos* invariantes (§ 63-6) que lo determinan:

$$[76\text{-}26] \qquad J_1 = 2K = A + C \quad , \quad J_2 = H = AC.$$

SOPHIE GERMAIN estudió el primero y llamó *curvatura media* a K, semisuma constante (§ 63-6) de las curvaturas de cada par de secciones normales perpendiculares entre sí. GAUSS estudió el segundo y llamó *curvatura total* al producto H de las dos curvaturas principales, hessiano de la forma [76-25].

3. *Fórmula de* EULER. Sobre la indicatriz

$$\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} = 1$$

en dirección φ es $x = \sqrt{\rho}\cos\varphi$, $y = \sqrt{\rho}\,\text{sen}\,\varphi$, de donde

$$[76\text{-}27] \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\text{sen}^2\varphi}{\rho_2} \quad ,$$

que da la curvatura de una sección normal en cualquier dirección, conocidas las principales.

Es fácil comprobar mediante [76-27] la invariancia 2K de la suma de curvaturas correspondientes a dos direcciones φ y $\varphi + \frac{1}{2}\pi$ perpendiculares entre sí.

4. *Curvatura total en un punto de una superficie.* El producto de las dos curvaturas principales tiene un significado análogo al de la curvatura plana; en efecto, dada una región σ de superficie, entorno de un punto P, si por un punto O se trazan rayos paralelos a las normales en el contorno de σ forman un cono cuya amplitud (medida sobre la esfera de radio 1) es una cierta área τ; el límite del cociente τ/σ, al tender σ a cero, es precisamente la curvatura total en el punto P.

Como se ve, esta amplitud τ del ángulo cónico de las normales viene a sustituir al ángulo de contingencia τ de las curvas planas, formado por las tangentes o normales en los extremos del mismo.

Es condición necesaria para que dos superficies sean aplicables una sobre otra sin distensión, que tengan la misma curvatura total en cada punto.

Si la superficie es desarrollable, es decir, aplicable sobre un plano, su curvatura total es la misma del plano, esto es, nula; resultado que se ve directamente porque para ellas el área τ es nula, porque la indicatriz de curvatura total se reduce a una curva, cualquiera que sea la porción elegida σ.

5. Son interesantes las superficies que tienen nula su curvatura media en cada punto, es decir: $\rho_1 = -\rho_2$; son las *superficies de área mínima*, esto es, las de menor área que cualquier otra superficie limitada por el mismo contorno. Se construyen sumergiendo éste, construído de alambre, en un líquido gelatinoso, que forma una película de área mínima en el contorno dado.

Si se desean obtener superficies de revolución que tengan esta propiedad, el radio de curvatura de la meridiana en cada punto debe ser igual y opuesto al otro radio principal que es el segmento de normal limitado por el eje; la curva que tiene esta propiedad es la catenaria; al girar alrededor de su recta base engendra una superficie de área mí-

nima, que es la única de revolución que tiene esta propiedad (cfr. § 113-4, ej. 2).

6. Para investigar cómo aproxima a la superficie dada su paraboloide osculador en el entorno del punto considerado, sólo en el caso elíptico puede decirse que en [76-11] sea $o(\varrho^2)$ tendiente a cero uniformemente. En los otros casos puede efectuarse una discusión análoga a la considerada en § 70-2.

Por ejemplo, para la superficie $z = y^2 + x^3$, el paraboloide osculador en el origen de coordenadas es $z = y^2$. Sin embargo, no puede decirse que en el entorno del origen sea $x^3 = o(y^2)$, pues el cociente x^3/y^2 vale siempre uno sobre la curva $x^3 = y^2$.

4. **Teorema de Meusnier.** — Dada la superficie S mediante la expresión paramétrica vectorial [76-1], de la que suponemos existe continua la derivada vectorial segunda, tracemos por el punto $P_0(u_0, v_0)$ una curva sobre la superficie, también con derivada vectorial segunda continua, con el vector tangente $d\mathbf{r}/ds$. Según la primera fórmula de FRENET [73-35] es

$$[76\text{-}28] \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{1}{\varrho}\mathbf{m} \;, \quad \frac{1}{\varrho} \geqslant 0 \;,$$

con **m** normal principal a esa curva, de donde multiplicando escalarmente ambos miembros por la normal **n** a la superficie y teniendo en cuenta [76-13] será:

$$[76\text{-}29] \quad \frac{1}{\varrho}\mathbf{m}\,.\,\mathbf{n}\,ds^2 = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\mathbf{n}\,ds^2 = D_{11}du^2 + 2D_{12}du\,dv + D_{22}dv^2.$$

Respecto de otro parámetro t cualquiera, en lugar del intrínseco s de la curva considerada es

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2t}{ds^2} \;,$$

y teniendo en cuenta que $(d\mathbf{r}/dt)\,.\,\mathbf{n} = 0$ y [76-3], de [76-29] resulta

$$[76\text{-}30] \quad \frac{1}{\varrho}\,\mathbf{m}\,.\,\mathbf{n} = \frac{D_{11}du^2 + 2D_{12}du\,dv + D_{22}dv^2}{g_{11}du^2 + 2g_{12}du\,dv + g_{22}dv^2}\,.$$

Así pues, *todas las curvas de la superficie que pasen por el punto* P_0 *y tengan derivada vectorial segunda continua, si tienen la misma tangente y la misma normal principal en* P_0 *y por tanto el mismo plano osculador, tienen en* P_0 *la misma curvatura* $1/\varrho$, *siempre que sea* $\mathbf{m}\,.\,\mathbf{n} \neq 0$, *es decir, siempre que la normal principal a la curva no esté en el plano tangente a la superficie.* Sobre dichas curvas nada dice [76-30]; estas curvas para las que el plano osculador coincide con el plano tangente a la superficie en P_0 se llamarán líneas asintóticas (§ 76-5).

Si la ecuación vectorial [76-1] de la superficie tiene derivadas vectoriales segundas continuas en P_0, es muy fácil pro-

bar (hágase como ejercicio, cfr. § 68) que sus secciones planas tienen la misma propiedad y basta estudiar la curvatura de flexión de estas secciones planas para conocer la de otra curva cualquiera de la superficie que tenga curvatura y el plano de sección por osculador.

Si ahora consideramos todas las secciones planas de la superficie por P_0 que tengan *la misma tangente*, el segundo miembro de [76-30] será *constante* para ellas, de donde si los versores **m** y **n** forman el ángulo θ, de $(1/\varrho)\mathbf{m}\,.\,\mathbf{n} = (1/\varrho_n)\mathbf{n}\,.\,\mathbf{n}$ se obtiene la *fórmula de* MEUSNIER

$$[76\text{-}31] \qquad \varrho = \varrho_n \cos\theta \;,$$

donde ϱ_n es el radio de curvatura de la sección normal que tiene la misma tangente de la sección plana cuyo radio de curvatura era ϱ, siendo θ el ángulo formado por ambas secciones.

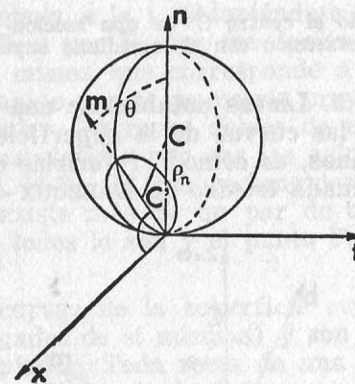


Fig. 253

Así como en cada punto de una superficie hay un paraboloide osculador que tiene la misma curvatura que la superficie en cada sección normal, así hay para cada recta tangente a la superficie una esfera osculatriz tal que las secciones producidas en ella por los planos que pasan por dicha tangente son los círculos osculadores de las secciones producidas en la superficie.

Para estudiar la curvatura de las secciones trazadas por una tangente, se puede sustituir la superficie por su esfera osculatriz (fig. 253). En ésta se verifica que el centro de cualquier sección oblicua es la proyección sobre su plano del centro de la sección normal; aplicado esto a la superficie dada, resulta de [76-31] el importante *teorema de* MEUSNIER:

El centro de curvatura en el punto P_0 *de una sección oblicua es la proyección sobre su plano, del centro de curvatura de la sección normal que tiene la misma tangente.*

Así, por ejemplo, en una superficie de revolución, como el centro de curvatura de cada paralelo es la intersección de su plano con el eje, en este eje está el centro de curvatura de la sección normal trazada por una tangente cualquiera de dicho paralelo.

Las figuras 254 indican el doble uso del teorema. En la 1ª, que tiene secciones normales circulares, se ha determinado el centro C' de una sección oblicua perpendicular al plano de simetría; en la 2ª, que es un cono

oblicuo, de base circular, se ha determinado el centro C de aquella sección normal en el punto A, que además es perpendicular al plano de simetría; en la 3ª, que es una superficie de revolución, se ha determi-

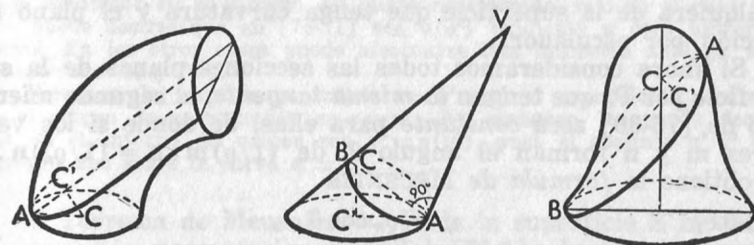


Fig. 254

nado el centro C′ de una sección oblicua cualquiera en el punto A de intersección con el meridiano cuyo plano es perpendicular a ella.

5. **Líneas notables de una superficie.** — *a*) Para el estudio de las curvas de la superficie, en particular de sus secciones planas, es cómodo referirlas en el entorno de un punto P_0 al llamado *triedro de* DARBOUX - RIBAUCOUR, donde se toma como eje x la tangente **t** a la curva, como eje y la normal geodésica **g** intersección del plano normal a la curva con el plano tangente a la superficie, y como eje z la normal **n** a la superficie (fig. 255).

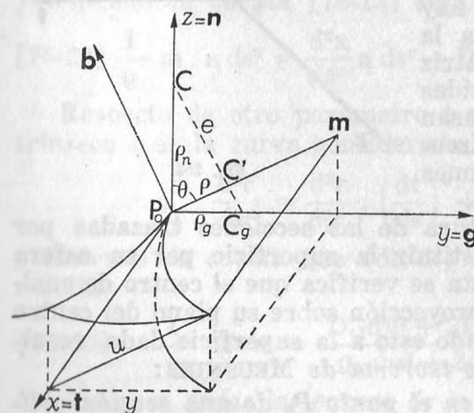


Fig. 255

Si proyectamos la sección oblicua considerada sobre el plano tangente a la superficie, sea C_g el centro de curvatura de dicha curva proyección, llamada *centro de curvatura geodésica.* Si $u(x)$ es la ordenada de la sección oblicua referida a los ejes **t** y **m** (normal principal) y es $y(x)$ la ordenada de la curva de proyección referida a los ejes **t** y **g**, será

$$u(x) = y(x)/\text{sen}\,\theta, \quad u''(x) = y''(x)/\text{sen}\,\theta, \quad \text{con} \quad u'_0 = y'_0 = 0.$$

Por tanto, sobre el eje de curvatura *e* (§ 73-10) de la sección oblicua, perpendicular a su plano por su centro de curvatura C′, se encuentran el centro de curvatura C de la sección normal que tiene la misma tangente **t** (teorema de MEUSNIER) y

el centro de curvatura geodésica C_g. A ellos corresponden la *curvatura normal*

$$[76\text{-}32] \qquad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\rho}\cos\theta$$

y la *curvatura geodésica*

$$[76\text{-}33] \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\rho}\,\text{sen}\,\theta$$

siendo θ el ángulo que forman la normal **n** a la superficie y la normal principal **m** a la sección oblicua considerada.

Si P_1 es un punto de la curva de la superficie que tiende al P_0, los planos tangentes a la superficie en P_0 y P_1, se cortan según una recta que cuando P_1 tiende a P_0 toma una posición límite $\mathbf{t}_c$ llamada *tangente conjugada* a la **t**, obteniéndose así en el plano tangente a la superficie por P_0 una *involución de tangentes conjugadas,* que es la misma que corresponde a su paraboloide osculador, como es sabido por la geometría proyectiva de las cuádricas. En particular, los rayos dobles de esta involución se llaman *tangentes asintóticas* por ser las asíntotas de la indicatriz de DUPIN (§ 76-3). El par rectangular es el de *tangentes principales*; si existe más de un par de tangentes conjugadas rectangulares todos lo son y el punto P_0 es umbílico o cíclico (§ 76-3, *a*).

b) *Líneas asintóticas.* Son curvas de la superficie cuyas tangentes son asintóticas (conjugadas de sí mismas) y son las generatrices del paraboloide osculador. Toda recta de una superficie es, pues, línea asintótica. Como el plano tangente en P_0 puede encontrarse por la posición límite del plano determinado por la tangente conjugada $\mathbf{t}_c$ a **t** y la paralela $\mathbf{t}_p$ a la tangente a la curva en P_1, resulta que al coincidir en las líneas asintóticas $\mathbf{t}_c$ con **t**, el *plano tangente en* P_0 *a la superficie coincidirá con el plano osculador a la curva asintótica* (§ 73-2, 3ª def.) y recíprocamente si ambos planos coinciden, habrán de coincidir **t** y $\mathbf{t}_c$.

La curvatura normal [76-32] de las líneas asintóticas es nula.

Las líneas asintóticas tienen por tangentes las asíntotas de la indicatriz [76-25] y por tanto pueden encontrarse analíticamente resolviendo la ecuación diferencial que resulta de anular la segunda forma diferencial [76-14], es decir, haciendo

$$[76\text{-}34] \qquad D_{11}(u_0, v_0)\,du^2 + 2D_{12}(u_0, v_0)\,du\,dv + D_{22}(u_0, v_0)\,dv^2 = 0.$$

c) *Líneas de curvatura.* Son aquellas cuyas tangentes son todas ellas principales. Se llama *normalía* a la superficie reglada engendrada por las normales **n** a la superficie a lo largo

de una de sus curvas. Para que esta curva sea una *línea de curvatura, es necesario y suficiente que la normalía correspondiente sea una reglada desarrollable* (§ 75-2). Pues si $P_1 \to P_0$, resulta $\mathbf{t}_c$ perpendicular al plano determinado tanto por $\mathbf{n}$ y P_0P_1, como por $\mathbf{n}_1$ y P_0P_1, es decir, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}_1$ aplicados a P_0 y a P_1 resultan coplanares (§ 75-5, *b*). Recíprocamente, si $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}_1$ son en ese sentido coplanares, entonces la tangente conjugada $\mathbf{t}_c$ es perpendicular a P_0P_1 y corresponde a una dirección principal.

EJEMPLOS. Todas las líneas trazadas en un plano son de curvatura, puesto que las normales forman un cilindro. También son de curvatura todas las líneas trazadas sobre una esfera, puesto que las normales forman un cono. En las superficies de revolución son líneas de curvatura los meridianos, pues las normales forman un plano; **y también los paralelos**, puesto que las normales forman un cono.

La superficie esférica es la única superficie no plana donde toda línea es de curvatura.

d) *Líneas geodésicas.* Son aquellas cuya normal principal $\mathbf{m}$ coincide con la normal $\mathbf{n}$ a la superficie y quedan caracterizadas por tener nula su curvatura geodésica [76-33].

Estas curvas son las de longitud mínima entre todas las que se pueden trazar sobre la superficie y se llaman *geodésicas*; su determinación es objeto del Cálculo de variaciones (§ 113-5, *a*).

En la superficie esférica las líneas geodésicas son los arcos de circunferencia máxima; en los cilindros y en general en las superficies desarrollables, son las que tienen como transformadas líneas rectas.

EJERCICIOS

1. Hallar en el hiperboloide alabeado $r = 2\cos u \operatorname{ch} v\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} u \operatorname{ch} v\mathbf{j} + \operatorname{sh} v\mathbf{k}$, $(-\pi \leqslant u \leqslant \pi;\ -\infty < v < +\infty)$, las líneas $u = \text{cte.}$ y $v = \text{cte.}$, determinando si ambas familias son ortogonales. Hallar el elemento de arco y los coeficientes de GAUSS. Ecuaciones paramétricas análogas del hiperboloide de dos hojas.

2. Dada la familia de cuádricas confocales (cfr. § 62, ejercicio 26)

$$\frac{x^2}{a^2-k} + \frac{y^2}{b^2-k} + \frac{z^2}{c^2-k} = 1 \quad , \quad (a > b > c)$$

probar que las tres cuádricas que pasan por cada punto (x, y, z) son ortogonales dos a dos, expresar x, y, z en función de las coordenadas elípticas k_1, k_2, k_3 y hallar el elemento de arco sobre la cuádrica $k = k_3$ tomando en ella como coordenadas curvilíneas k_1 y k_2.

3. Dada la superficie esférica $r = a\cos\varphi\cos\lambda\mathbf{i} + a\cos\varphi \operatorname{sen}\lambda\mathbf{j} + a \operatorname{sen}\varphi\mathbf{k}$ (latitud $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{2}\pi$, longitud $-\pi < \lambda \leqslant \pi$), hallar: 1º) El ángulo que forma la curva $\varphi = \lambda$ con el ecuador $\varphi = 0$; 2º) El ángulo que forman cada dos curvas de los sistemas $\varphi - \lambda = \alpha$, $\varphi + \lambda = \beta$ que pasan por un punto (φ, λ) de la superficie; 3º) El radio de curvatura de flexión de cada una de las curvas anteriores.

4. Si se introduce un nuevo sistema de coordenadas curvilíneas μ, ν en una superficie de coordenadas u, v, mediante las ecuaciones $u = \mathrm{u}(\mu, \nu)$, $v = \mathrm{v}(\mu, \nu)$, demostrar que

$$\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\mu, \nu)}\right)^2 ,$$

donde γ_{11}, γ_{12}, γ_{22} son los coeficientes de GAUSS tomados respecto de μ, ν, y g_{11}, g_{12}, g_{22} los tomados respecto de u y v.

5. En el origen de coordenadas hallar la indicatriz de DUPIN, las curvaturas media K y total H, el radio de curvatura de flexión ϱ_n de la sección con el plano $x = y$ y el ϱ de la sección con el $x - y + z = 0$ de las siguientes superficies: 1º) Paraboloide elíptico $z = (x^2/32) + (y^2/8)$; 2º) Paraboloide hiperbólico $z = (x^2/18) - (y^2/8)$; 3º) Elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9(z+1)^2 = 9$; 4º) Cilindro elíptico $(x^2/16) + (z^2/9) - (2z/3) = 0$.

6. Para el paraboloide de revolución $\mathbf{r} = r\cos\lambda\mathbf{i} + r \operatorname{sen}\lambda\mathbf{j} + (1 - r^2)\mathbf{k}$ y en el punto $r = 1$, $\lambda = \pi/4$, hallar el valor de W en [72-57], las dos fórmulas fundamentales [76-3] y [76-14], el radio de curvatura normal ϱ_n dado por [76-30], los principales ϱ_1 y ϱ_2, la curvatura media K y la total H.

7. Si la superficie viene dada en forma explícita $z = \mathrm{z}(x, y)$, sean t_1, t_2, t_3 los cosenos directores de la tangente a una curva de la superficie y θ el ángulo que el plano osculador de dicha curva forma con la normal $\mathbf{n}$ a la superficie en uno de sus puntos. Demostrar que la curvatura de flexión de la curva viene dada por

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{z_{xx}t_1^2 + 2z_{xy}t_1t_2 + z_{yy}t_2^2}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\cos\theta}.$$

Hallar las dos formas fundamentales.

8. Calcular mediante los radios de curvatura principales como extremos de [76-30], la curvatura media K y la curvatura total H en función de los coeficientes de las dos formas fundamentales para el caso general [76-1]. Caso particular de que la superficie se da en forma explícita $z = \mathrm{z}(x, y)$, utilizando las derivadas de z.

9. Derivando [72-45] demostrar que

$$\mathbf{r}_u\mathbf{r}_{vv} = \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} \quad ; \quad \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{uu} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} \quad ;$$

$$\mathbf{r}_{uv}^2 - \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u \partial v} \quad ;$$

y aplicarlo a expresar $D_{11}D_{22} - D_{12}^2$ mediante los coeficientes de GAUSS g_{ij} y sus derivadas parciales primeras y segundas respecto de u y de v. Expresar en esta forma la curvatura total H ("*Teorema egregio*" de GAUSS).

10. Construir la indicatriz de DUPIN en un punto cualquiera del toro.

11. Determinar los puntos cíclicos (o umbílicos): 1º) Del elipsoide $x^2 + 2y^2 + (z^2/4) = 1$; 2º) Del hiperboloide $(x^2/25) + (y^2/9) - (z^2/144) = -1$; 3º) Del paraboloide $z = (x^2/25) + (y^2/16)$. (Cfr. § 62, ejercicios 19, 20 y 22).

12. Demostrar que en el punto que se considere, la suma de los radios de curvatura de flexión según dos direcciones conjugadas es constante e igual a la suma de los radios principales. Interpretación cuadrática y tensorial.

13. Aplicar los ejercicios 7 y 8 al elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ para demostrar que: 1º) Dada en uno de sus puntos P_0 una sección normal, su radio de curvatura de flexión es $\varrho_n = r^2/d$, donde r es

el radio vector del elipsoide paralelo a la tangente a la curva sección en P_0 y d es la distancia del centro al plano tangente en P_0; 2º) La curvatura total en P_0 es $H = d^4/(a^2b^2c^2)$; 3º) El área de la elipse sección diametral paralela al plano tangente en P_0 es $A = \pi abc/d$.

14. Los centros de curvatura de las secciones planas de una superficie que pasan por la misma tangente en P_0 están sobre una circunferencia.

15. Demostrar que el helicoide recto $\mathbf{r} = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + kv\mathbf{k}$ (§ 75, ejercicio 1) es una superficie de área mínima cuya curvatura total negativa es constante a lo largo de cada hélice $u =$ cte. Líneas asintóticas de la superficie.

16. Supuesto que el punto P_0 recorre con velocidad lineal unidad una curva de una superficie, demostrar con las notaciones del § 76-5 que la velocidad angular ω de rotación instantánea del triedro de DARBOUX-RIBAUCOUR (orientado dextrógiro tng) es $\omega = (1/\tau_g)\mathbf{t} + (1/\varrho_g)\mathbf{n} + (1/\varrho_n)\mathbf{g}$, donde $1/\tau_g = (1/\tau) + (d\theta/ds)$ es la llamada *torsión geodésica*, si se toma el signo de la torsión con la convención [73-32] ($\tau > 0$ para curva dextrógira, tal la hélice normal) y se cuenta el ángulo θ desde **m** hasta **n**, dextrógiramente positivo visto desde **t**. Demostrar que en un punto dado la torsión geodésica y la curvatura normal son las mismas para todas las curvas de la superficie que tienen la misma tangente **t**.

17. Demostrar que dos direcciones conjugadas (du, dv) y $(\delta u, \delta v)$ cumplen la condición $D_{11}du\delta u + D_{12}(du\delta v + dv\delta u) + D_{22}dv\delta v = 0$.

18. Siguiendo el método del ejercicio 8 demostrar que la ecuación diferencial de las líneas de curvatura es $(g_{11}du + g_{12}dv)(D_{12}du + D_{22}dv) - (D_{11}du + D_{12}dv)(g_{12}du + g_{22}dv) = 0$.

19. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que las líneas coordenadas sean de curvatura es que se cumpla $g_{12} = 0$, $D_{12} = 0$.

20. Demostrar que si $u = u(t)$, $v = v(t)$ determinan una línea de curvatura de la superficie $\mathbf{r}(u, v)$, la fórmula de OLINDE RODRÍGUES $d\mathbf{r} + \varrho d\mathbf{n} = 0$ expresa que la normalía $\mathbf{r} + \lambda\mathbf{n}$ a lo largo de la línea de curvatura es desarrollable y tiene en $\lambda = \varrho$ (radio de curvatura principal) la arista de retroceso.

21. Desarrollando la fórmula de OLINDE RODRÍGUES (ejercicio 20), obtener por eliminación la ecuación diferencial de las líneas de curvatura (ejercicio 18) y la ecuación que da los radios de curvatura principales (ejercicio 8).

§ 77. REPRESENTACIÓN DE SUPERFICIES

1. Concepto geométrico de una representación analítica cartográfica. — Las representaciones planas de la superficie terrestre se clasifican en *topográficas*, *geográficas* y *geodésicas*. El criterio de clasificación preferible para distinguirlas con precisión se refiere a la figura de la Tierra adoptada en la representación. Plano topográfico es aquel para cuyo trazado no se ha tenido en cuenta la esfericidad de la Tierra, siendo necesario entonces qué el trozo de superficie terrestre representado sea suficientemente pequeño (máxima extensión menor que 1°). Una carta de parte o de la totalidad de la superficie terrestre es geográfica o geodésica según que en su trazado se considere que nuestro globo es respectivamente una esfera o un elipsoide de revolución achatado en los polos.

Si se considera dividida la superficie terrestre por la red geográfica de sus meridianos y paralelos, el trazado de la carta consistirá en obtener la imagen plana de esa red, pues bastará referir a ella los detalles particulares del terreno.

Por no ser desarrollables (§ 74-5), ni la esfera, ni el elipsoide de revolución, las figuras de la carta serán siempre imágenes deformadas de las correspondientes figuras del terreno. Sin embargo, existen representaciones llamadas *conformes* o *isogonales* (§ 41-1) que conservan los ángulos y en las que por lo tanto una figura infinitamente pequeña y su representación son semejantes. Existen también representaciones llamadas *equivalentes* o *autálicas* que conservan las áreas, no siendo posible la construcción de una carta que sea a la vez conforme y equivalente (§ 77-3). Más aún, si se considera al azar una proyección cualquiera o correspondencia analítica entre la superficie y su plano, sucederá generalmente que se alterarán los ángulos que forman entre sí cada par de direcciones y sus correspondientes imágenes, así como las áreas correspondientes no conservarán una razón constante, dichas representaciones se llaman *afilácticas*, las que cumpliendo condiciones especiales se utilizan también.

La correspondencia entre los puntos de la superficie y de su representación cartográfica se expresa con precisión en forma analítica, pero para tener una visión sintética e intuitiva de dicha correspondencia se procura definirla mediante operaciones geométricas sencillas o por modificaciones de éstas, fáciles de comprender. La operación geométrica más sencilla es la de proyección: si ésta se hace directamente sobre un plano tangente a la superficie terrestre, la proyección se llama *azimutal*; si se utiliza como intermediaria la superficie auxiliar desarrollable que indica su nombre, la proyección se llama *cónica* o *cilíndrica*.

Proyecciones cilíndricas modificadas importantes son la de MERCATOR y la de LAMBERT, referidas a un cilindro circunscrito a la Tierra, supuesta esférica; la primera a lo largo del ecuador, la segunda a lo largo del meridiano tomado como principal. La representación de LAMBERT es caso límite, por anulación de la excentricidad del elipsoide terrestre, de la representación geodésica de GAUSS-KRÜGER, adoptada en la Argentina para los trabajos geodésicos fundamentales.

2. Coordenadas geográficas en la esfera: superficies de revolución. — *a*) Una superficie S, referida a un sistema rectangular de coordenadas x, y, z, dada en forma paramétrica

[77-1] $\quad x = \mathrm{x}(u, v) \;,\quad y = \mathrm{y}(u, v) \;,\quad z = \mathrm{z}(u, v) \;,$

mediante las funciones de los segundos miembros supuestas definidas con derivadas parciales continuas en un recinto Ω del

plano paramétrico (u, v), tiene plano tangente en todo punto donde no sean simultáneamente nulos los jacobianos

[77-2] $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u \ , \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \ , \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \ .$$

Entonces la correspondencia [77-1] entre S y Ω es biunívoca si se verifica esta condición para todo punto (u, v) de Ω.

A toda curva Γ del recinto Ω, dada por las funciones con derivadas continuas no simultáneamente nulas

[77-3] $$u = \mathrm{u}(t) \ , \quad v = \mathrm{v}(t) \ ,$$

corresponderá en la superficie S una curva C, dada por las funciones compuestas

[77-4] $$x = \mathrm{x}[\mathrm{u}(t), \mathrm{v}(t)] \ , \quad y = \mathrm{y}[\mathrm{u}(t), \mathrm{v}(t)] \ , \quad z = \mathrm{z}[\mathrm{u}(t), \mathrm{v}(t)].$$

En particular, a las dos familias de paralelas a los ejes coordenados del plano paramétrico

[77-5] $$v = v_0 \text{ const.} \ , \quad u = u_0 \text{ const.}$$

corresponden las dos familias de curvas principales

[77-6] $$\begin{array}{lll} x = \mathrm{x}(u, v_0) \ , & y = \mathrm{y}(u, v_0) \ , & z = \mathrm{z}(u, v_0) \\ x = \mathrm{x}(u_0, v) \ , & y = \mathrm{y}(u_0, v) \ , & z = \mathrm{z}(u_0, v) \end{array}$$

formando una red de *coordenadas curvilíneas* sobre la superficie S (fig. 256).

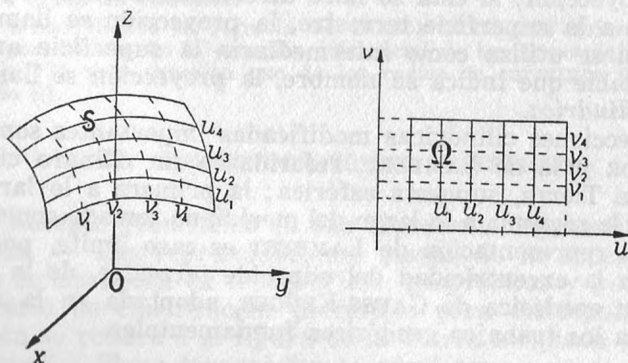


Fig. 256

El elemento de arco ds de la curva C de la superficie viene dado por la primera fórmula cuadrática fundamental

[76-3] $$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

en du, dv con coeficientes de GAUSS dados (§ 72-7) por:

[77-7] $$\begin{cases} g_{11} = \mathrm{E} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ g_{12} = \mathrm{F} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ g_{22} = \mathrm{G} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{cases}$$

Dichos coeficientes de GAUSS en cada punto P de la superficie sólo dependen de dicho punto y no de la curva C que pasando por él se considere, curva de coeficientes directores

[77-8] $$\begin{cases} dx = x_u du + x_v dv \\ dy = y_u du + y_v dv \\ dz = z_u du + z_v dv \end{cases}$$

correspondientes a los du, dv de la curva Γ [77-3].

La condición necesaria y suficiente para que la red de coordenadas curvilíneas sobre S sea *ortogonal* es que sea idénticamente en Ω:

[77-9] $$g_{12} \equiv 0 \ ,$$

por representar respectivamente (x_u, y_u, z_u) y (x_v, y_v, z_v) los coeficientes directores de las curvas principales [77-6].

b) Dados los puntos de la esfera terrestre de radio a (fig. 257) mediante su *latitud* φ contada entre $-\pi/2$ y $\pi/2$

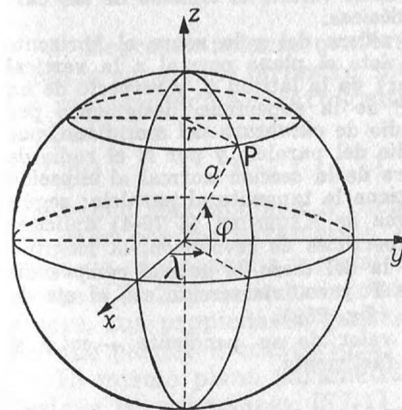


Fig. 257

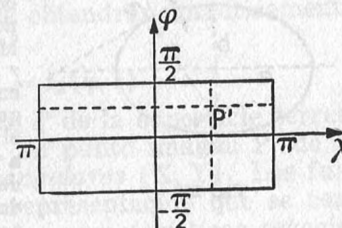


Fig. 258

$(-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$ y su longitud λ tal que $-\pi < \lambda \leqslant \pi$ (fig. 258), las ecuaciones [77-1] serán aquí

[77-10] $$\begin{cases} x = a \cos\varphi \cos\lambda \\ y = a \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\ z = a \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

con coeficientes de GAUSS ($u = \varphi$, $v = \lambda$) dados según [77-7] por

$$[77\text{-}11] \qquad g_{11} = a^2 \;,\; g_{12} = 0 \;,\; g_{22} = a^2 \cos^2 \varphi .$$

La red de coordenadas curvilíneas [77-6] está formada por los meridianos y paralelos y es ortogonal.

La esfera de radio $a = 6\,370$ km tiene sensiblemente la misma superficie que la Tierra y a ella se suele referir el trazado de las cartas geográficas.

c) Si se considera la Tierra como un elipsoide de revolución de meridianos elípticos, con semiejes a y b:

$$[77\text{-}12] \qquad \begin{cases} a = 6\,378\,388 \text{ m} \pm 18 \text{ m} & \text{(Radio ecuatorial)} \\ b = 6\,356\,912 \text{ m} & \text{(Semieje de rotación)} \end{cases}$$

se tendrán excentricidades e_1 y e' dadas por

$$e_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0{,}006\,73 \quad ; \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0{,}006\,768\,170 \quad ;$$

$$[77\text{-}13] \qquad e'^2 = \frac{e_1^2}{1 - e_1^2} \, ,$$

con:

$$[77\text{-}14] \qquad \text{Recíproca del achatamiento: } \frac{a}{a - b} = 297{,}0 \pm 0{,}5.$$

A este elipsoide de HAYFORD * se suele referir el trazado de las cartas geodésicas.

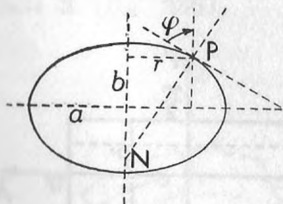


Fig. 259

La altura del polo sobre el horizonte (siendo éste el plano normal a la vertical del lugar) da la latitud φ, y respecto de un punto P de la superficie, designemos por M el radio de curvatura del meridiano, por r el radio del paralelo y por N el radio de curvatura de la sección normal al elipsoide que contiene la tangente al paralelo; según el teorema de MEUSNIER (§ 76-4) aplicado a las superficies de revolución, la longitud de N es la del trozo de normal comprendida entre P y su intersección con el eje de rotación (fig. 259).

De la ecuación de la elipse, del valor de su pendiente $-\cot \varphi$ y de la fórmula de curvatura se deduce fácilmente

$$[77\text{-}15] \qquad \begin{cases} \mathrm{M} = \dfrac{a(1 - e_1^2)}{(1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}} \quad ; \quad r = \mathrm{N} \cos \varphi \quad ; \\[2ex] \mathrm{N} = \dfrac{a}{(1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} . \end{cases}$$

Para $e_1 = 0$ se convierte $\mathrm{N} = \mathrm{M} = a$.

Para el elipsoide de revolución, tomando como parámetros la latitud $\varphi \, (-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$ y la longitud $\lambda \, (-\pi < \lambda \leqslant \pi)$, las ecuaciones [77-1] se convierten en:

* J. F. HAYFORD. — "Supplementary Investigation in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy" (1910).

$$[77\text{-}16] \qquad \begin{cases} x = r \cos \lambda = a \cos \varphi \cos \lambda / \Delta \\ y = r \operatorname{sen} \lambda = a \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda / \Delta \\ z = b (1 - r^2/a^2)^{1/2} = a (1 - e_1^2) \operatorname{sen} \varphi / \Delta \end{cases}$$

siendo:

$$[77\text{-}17] \qquad \Delta = (1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}.$$

Para las coordenadas curvilíneas también ortogonales, $u = \varphi$, $v = \lambda$, los coeficientes de GAUSS están dados, según [77-7], por

$$[77\text{-}18] \quad g_{11} = a^2 (1 - e_1^2)^2 / \Delta^6 \;,\; g_{12} = 0 \;,\; g_{22} = a^2 \cos^2 \varphi / \Delta^2 \;,$$

pues es

$$[77\text{-}19] \quad \begin{cases} x_\varphi = -\,a(1 - e_1^2) \operatorname{sen} \varphi \cos \lambda / \Delta^3 \;, & x_\lambda = -\,a \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda / \Delta \\ y_\varphi = -\,a(1 - e_1^2) \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \lambda / \Delta^3 \;, & y_\lambda = a \cos \varphi \cos \lambda / \Delta \\ z_\varphi = a(1 - e_1^2) \cos \varphi / \Delta^3 \;, & z_\lambda = 0 \;, \end{cases}$$

con Δ dado por [77-17].

Para $e_1 = 0$, las [77-16] y [77-18] se convierten respectivamente en las [77-10] y [77-11].

d) Una superficie de revolución cualquiera cuyo eje de rotación se tome como eje z y tenga por línea meridiana $z = \mathrm{f}(r)$, podrá referirse al radio r de los paralelos que es la abscisa variable de la meridiana $(r_0 \leqq r \leqq r_1)$ y al ángulo de giro $\lambda \, (-\pi < \lambda \leqq \pi)$, dando para las ecuaciones [77-1] las

$$[77\text{-}20] \qquad x = r \cos \lambda \;,\; y = r \operatorname{sen} \lambda \;,\; z = \mathrm{f}(r)$$

con coeficientes de GAUSS (para $u = r$, $v = \lambda$) dados según [77-7] por

$$[77\text{-}21] \qquad g_{11} = r^2 \;,\; g_{12} = 0 \;,\; g_{22} = 1 + [\mathrm{f}'(r)]^2 \;,$$

con coordenadas curvilíneas también ortogonales.

3. Representaciones conformes planas de una superficie. — Dada la superficie terrestre, bien por [77-10], bien por [77-16], las representaciones cartográficas se obtendrán analíticamente mediante las ecuaciones

$$[77\text{-}22] \qquad \mathrm{X} = \mathrm{f}_1(\varphi, \lambda) \;,\; \mathrm{Y} = \mathrm{f}_2(\varphi, \lambda)$$

que hacen corresponder a cada punto P de la superficie terrestre dado por los parámetros (φ, λ), un punto imagen P′ de la carta de *coordenadas supuestas rectangulares* (X, Y). Las funciones [77-22] definen la clase de representación que se considere, sus propiedades generales y las características esenciales que permiten confeccionar la carta.

El mismo plano paramétrico $\mathrm{X} = u$, $\mathrm{Y} = v$ a que están referidas las ecuaciones [77-1] constituye un ejemplo inmediato de representación plana de la superficie [77-1]. Sin embargo, es importante el estudio de la representación general

$$[77\text{-}23] \qquad \mathrm{X} = \mathrm{X}(u, v) \;,\; \mathrm{Y} = \mathrm{Y}(u, v)$$

para que podamos hacerla cumplir determinadas condiciones. Entre éstas supondremos siempre que las funciones [77-23], y también en particular las [77-22], tienen derivadas parciales continuas con jacobiano $\partial(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) / \partial(u, v)$ distinto de cero en todo punto de la representación.

Al elemento de arco ds [76-3] de la curva C de la superficie, le corresponderá en la carta un elemento de arco ds' de la curva imagen C' dado mediante

[77-24] $$ds'^2 = dX^2 + dY^2 = (X_u du + X_v dv)^2 + (Y_u du + Y_v dv)^2 = g_{11}^0 du^2 + 2g_{12}^0 du dv + g_{22}^0 dv^2 .$$

La razón m definida por

[77-25] $$ds' = m ds \quad ,$$

cociente límite ds'/ds para $dt \to 0$ sobre [77-3], se llama *dilatación lineal* correspondiente a la dirección (du, dv) que parte del punto $P(u, v)$ considerado.

La representación plana de la superficie S se llama *conforme* si la dilatación lineal m sólo depende de las coordenadas (u, v) del punto P, pero fijado éste, es la misma para todas las direcciones (du, dv) que pasen por él. Entonces los arcos infinitesimales correspondientes a partir de P y P' son proporcionales, cumpliéndose idénticamente en du, dv la

[77-26] $$dX^2 + dY^2 = m^2 (g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2) \quad ,$$

con m función solamente de u y v.

Por el teorema de identidad de polinomios enteros (en du, dv), es condición necesaria y suficiente para que ello ocurra que sean proporcionales los coeficientes de GAUSS de las formas cuadráticas [76-3] y [77-24] en cada punto P, aun cuando la razón m^2 de proporcionalidad (*dilatación areolar*) varíe con P. Es decir, ha de ser:

[77-27] $$\frac{X_u^2 + Y_u^2}{g_{11}} = \frac{X_u X_v + Y_u Y_v}{g_{12}} = \frac{X_v^2 + Y_v^2}{g_{22}} = m^2$$

en cada punto (u, v).

Si dos curvas C, C_1 que pasan por P correspondientes a las direcciones (du, dv), $(\delta u, \delta v)$ forman ángulo ω dado por

[77-28] $$\cos \omega = \frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{ds \, . \, \delta s_1} = \frac{g_{11} du\delta u + g_{12}(du\delta v + dv\delta u) + g_{22} dv\delta v}{\sqrt{g_{11}du^2 + 2g_{12}du dv + g_{22}dv^2}\ \sqrt{g_{11}\delta u^2 + 2g_{12}\delta u\delta v + g_{22}\delta v^2}} ,$$

es necesario y suficiente que se cumpla [77-27] para que las curvas imágenes C', C'_1 formen en la carta el mismo ángulo ω, pues sólo entonces este ángulo tendrá un coseno, que al estar expresado por un cociente análogo al [77-28] con coeficientes g_{ij}^0 de la forma [77-24], tomará sus mismos valores para cualesquiera du, dv, δu, δv.

Geométricamente se comprende que al cumplirse [77-26], un triángulo infinitesimal de la superficie en P tiene por homólogo en P' un triángulo de lados que tienden a ser propor-

cionales a los de la superficie, por lo que los ángulos homólogos tienden a ser iguales, es decir, el ángulo de las tangentes de dos curvas cualesquiera trazadas sobre la superficie será igual al de las curvas homólogas. De aquí se deduce que toda representación conforme es isogonal y recíprocamente.

Hallar todas las representaciones conformes [77-23], equivale a resolver el sistema [77-27] de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con X, Y como funciones incógnitas, para m función indeterminada de u y v. Este problema admite una infinidad de soluciones, todas las cuales pueden deducirse de una de ellas mediante transformaciones conformes de un plano sobre un plano, problema íntimamente ligado a la teoría de funciones analíticas de variable compleja.

Dos superficies se llaman *aplicables* (o *isométricas*) si se puede establecer entre sus puntos una correspondencia biunívoca que conserve las longitudes, es decir que haga

[77-29] $$ds' = ds \quad ,$$

para todo par de curvas homólogas que pasen respectivamente por cualquier par de puntos correspondientes.

Una superficie será aplicable en el plano, si en [77-26] es m constante, independiente de u y de v, pues por un cambio adecuado de escala en el trazado de la carta ello equivale a suponer $m = 1$. Se comprende que en general será imposible hallar *dos* funciones [77-23] que cumplan las *tres* ecuaciones [77-27] para $m = 1$, si la superficie [77-1] no cumple condiciones especiales. Una sencilla demostración de O. BONNET prueba (véase Nota) que la condición necesaria para que la superficie [77-1] sea aplicable en el plano paramétrico (tal puede tomarse el X, Y) es que la superficie sea la envolvente de un haz de planos tangentes dependientes de un solo parámetro, condición característica de las superficies desarrollables. Recíprocamente se prueba también que toda superficie tangencial a una curva, es decir toda superficie envolvente de un haz de planos tangentes dependientes de un solo parámetro, es aplicable sobre el plano. Esto no puede ocurrir nunca, ni para la esfera [77-10], ni para el elipsoide [77-16], y por tanto las cartas [77-22] que conserven los ángulos, no podrán conservar una razón constante para las áreas.

NOTA. La demostración del teorema según el cual una superficie es aplicable sobre el plano cuando y sólo cuando es la superficie tangencial a una curva, presupone que las funciones [77-1] poseen derivadas parciales segundas continuas; *sin este requisito el teorema es falso*, pues H. LEBESGUE ha dado *ejemplos de superficies no regladas aplicables sobre el plano* (tal un pañuelo arrugado).

La demostración citada consiste en lo siguiente: Para el plano paramétrico los numeradores de [77-27] se reducen a 1, 0, 1 y por tanto, se-

gún [77-7], se obtendrán todas las superficies aplicables sobre el plano integrando el sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1 \quad , \quad x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0 \; .$$
$$x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 1.$$

Derivando parcialmente respecto de u y de v queda

$$\begin{cases} x_u x_{uu} + y_u y_{uu} + z_u z_{uu} = 0 \; , \\ x_v x_{uu} + y_v y_{uu} + z_v z_{uu} = 0 \; , \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_u x_{uv} + y_u y_{uv} + z_u z_{uv} = 0 \; , \\ x_v x_{uv} + y_v y_{uv} + z_v z_{uv} = 0 \; , \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_u x_{vv} + y_u y_{vv} + z_u z_{vv} = 0 \; , \\ x_v x_{vv} + y_v y_{vv} + z_v z_{vv} = 0 \; , \end{cases}$$

Éstas nos dicen que las ternas

$$x_{uu} \; , \; y_{uu} \; , \; z_{uu} \; ; \; x_{uv} \; , \; y_{uv} \; , \; z_{uv} \; ; \; x_{vv} \; , \; y_{vv} \; , \; z_{vv}$$

son proporcionales (§ 15-6, c) a los jacobianos

$$\partial(y,z)/\partial(u,v) \quad , \quad \partial(z,x)/\partial(u,v) \quad , \quad \partial(x,y)/\partial(u,v) \quad ,$$

los que no son idénticamente nulos, si la superficie [77-1] no se reduce a una curva (§ 68-3). Se tienen, pues, las relaciones

$$x_{uu}/x_{uv} = y_{uu}/y_{uv} = z_{uu}/z_{uv} \quad ,$$

mostrando que el jacobiano de cada dos de las tres derivadas x_u, y_u, z_u, es idénticamente nulo, por tanto, x_u, y_u, z_u son funciones de una misma variable t (§ 68-3). Del mismo modo resulta que x_v, y_v, z_v son funciones de una misma variable t'. Ambas variables t, t' se reducen a una sola, por verificarse idénticamente $x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0$. Por tanto, los parámetros directores del plano tangente genérico de la superficie dependen de un solo parámetro, y por tanto la superficie es desarrollable (§ 74-5).

Recíprocamente, sea una superficie desarrollable

[75-20] $$\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + u\mathbf{p}'(s)$$

referida a su arista de retroceso Γ de ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{p}(s)$. Así se han expresado las coordenadas de un punto cualquiera M de la superficie desarrollable en función de dos parámetros u y s.

La expresión de la diferencial de arco $d\sigma$ de una curva trazada sobre la superficie, será en virtud de las fórmulas de FRENET (§ 73-5):

$$d\sigma^2 = (du + ds)^2 + u^2 ds^2/r_1^2 \quad ,$$

donde r_1 es el radio de curvatura de flexión de la arista de retroceso Γ, sin que intervenga la torsión de ésta.

La curvatura de flexión $c_1 = 1/r_1$ es una función determinada $f_1(s)$ del arco s y la relación $1/r_1 = f_1(s)$ es también la ecuación intrínseca (§ 73-9) de una curva plana que se puede construir. Si P′ es el punto en esta curva plana correspondiente al punto P de Γ determinados por el mismo valor de s, los radios de curvatura correspondiente serán los mismos. Si llevamos sobre la tangente en P′ a la curva plana una longitud $u = $ P′M′ $=$ PM, se determina en el plano de esta curva un punto M′ correspondiente al punto M de la superficie desarrollable. Ésta es isométrica, pues las diferenciales $d\sigma$ de los arcos de dos curvas correspondientes definidas ambas por la misma ecuación $u = \varphi(s)$ tendrán la misma expresión para las dos curvas.

La demostración anterior falla para el cono y el cilindro (§ 75-3), pero el teorema subsiste en ambos casos como es fácil comprobar directamente.

El teorema anterior es también consecuencia inmediata de un célebre y fundamental teorema de GAUSS según el cual *la curvatura total es la*

misma en los puntos correspondientes de dos superficies aplicables, lo que se prueba (§ 76, ejercicio 9) viendo que la curvatura total (§ 76-3, nota 2) depende sólo de los coeficientes g_{ik} y de sus derivadas parciales primeras y segundas respecto de u y v. Entonces, *una superficie es desarrollable cuando y sólo cuando en todos sus puntos la curvatura total es nula*, es decir, *cuando y sólo cuando todos sus puntos son parabólicos.*

4. Ejemplos: representación de Mercator y estereográfica polar. — a) *Representación cilíndrica.* — Si consideramos un cilindro circunscrito a la superficie terrestre a lo largo del ecuador y proyectamos sobre él los meridianos y paralelos por la intersección de sus respectivos planos sobre el cilindro, al desarrollar éste tendremos una proyección cilíndrica en que la red de meridianos y paralelos de la carta estará formada por dos haces de rectas paralelas, perpendiculares entre sí. Tomando el ecuador rectificado como eje X, y la proyección ortogonal sobre el cilindro del meridiano de Greenwich como eje Y, las ecuaciones [77-22] para la esfera [77-10], serán aquí

[77-30] $$X = a\lambda \quad , \quad Y = a \operatorname{sen} \varphi \quad ,$$

pues la X será la longitud del ecuador rectificado a partir del meridiano de Greenwich y la Y de [77-30] coincide con la z de [77-10].

El elemento de área de la superficie esférica es

[77-31] $$a d\varphi \, . \, r d\lambda = a^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda \quad ,$$

coincidente con el

[77-32] $$dX dY = a^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda \quad ,$$

de su representación [77-30], que es por tanto equivalente.

Recordando [77-11], la condición [77-27] se convierte para [77-30] en

[77-33] $$\frac{a^2 \cos^2\varphi}{a^2} = \frac{a^2}{a^2 \cos^2\varphi} \quad ,$$

sólo verificada en el ecuador $\varphi = 0$; por tanto, la proyección cilíndrica [77-30] de la superficie esférica no es conforme.

Si en lugar de las ecuaciones [77-10] de la superficie esférica, consideramos las [77-16] del elipsoide, las [77-30] se convierten en

[77-34] $$X = a\lambda \quad , \quad Y = a(1 - e_1^2) \operatorname{sen}\varphi/\Delta$$

con Δ dado por [77-17].

Teniendo en cuenta [77-15] el elemento de área del elipsoide de revolución es

[77-35] $$M d\varphi \, r d\lambda = \frac{a^2(1 - e_1^2)\cos\varphi}{(1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^2} d\varphi \, d\lambda \quad ,$$

mientras que el de su representación [77-34] es

[77-36] $$dX dY = \frac{a^2(1 - e_1^2)\cos\varphi}{(1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^{3/2}} d\varphi \, d\lambda$$

dando una dilatación areolar

[77-37] $$\sigma = \frac{dXdY}{Mr\, d\varphi\, d\lambda} = (1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} = \Delta \ ,$$

lo que prueba que la proyección [77-34] no es equivalente para e_1 distinto de cero; en cambio, confirmamos que esta representación es equivalente si suponemos esférica la superficie terrestre.

Recordando [77-18], la condición [77-27] se convierte para [77-34] en

[77-38] $$\frac{a^2(1-e_1^2)^2 \cos^2\varphi/\Delta^6}{a^2(1-e_1^2)^2/\Delta^6} = \frac{a^2}{a^2\cos^2\varphi/\Delta^2} \ ,$$

que se verifica solamente en el ecuador $\varphi = 0$; por tanto esta proyección cilíndrica no es conforme, ni para el elipsoide, ni para la esfera ($e_1 = 0$).

b) Representación de MERCATOR. — Consiste en la anterior representación cilíndrica *a)* modificada. Conservando los meridianos $X = a\lambda$ de la representación [77-30], veamos cómo deben espaciarse los paralelos a partir del ecuador mediante una función $Y = a\,f(\varphi)$ para que se cumpla [77-27].

Por [77-11], la condición [77-27] se convierte en

[77-39] $$m^2 = \frac{a^2[f'(\varphi)]^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2\cos^2\varphi} \ ,$$

o sea $f'(\varphi) = 1/\cos\varphi$. La función buscada es, pues, la primitiva de la $\sec\varphi$ y vale (§ 52-3, ejemplo 3)

$$f(\varphi) = \ln \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Resulta así la proyección de MERCATOR para la superficie esférica

[77-40] $$X = a\lambda, \quad Y = a \ln \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{1}{2} a \ln \frac{1+\operatorname{sen}\varphi}{1-\operatorname{sen}\varphi}$$

con coeficientes de dilatación lineal $m = 1/\cos\varphi$ dado por [77-39]; los paralelos se van espaciando con el crecimiento de la latitud, yéndose los polos al infinito.

Si procedemos en forma análoga para el elipsoide de revolución [77-16], por [77-18], la condición [77-27] es ahora

[77-41] $$m^2 = \frac{a^2[f'(\varphi)]^2}{a^2(1-e_1^2)^2/\Delta^6} = \frac{a^2}{a^2\cos^2\varphi/\Delta^2} \ ,$$

lo que permite calcular

[77-42] $$f(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{(1-e_1^2)\,d\varphi}{(1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi)\cos\varphi} =$$

$$= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{e_1}{2} \ln \frac{1 - e_1\operatorname{sen}\varphi}{1 + e_1\operatorname{sen}\varphi} \ .$$

Así resulta conforme la representación cartográfica.

[77-43] $$X = a\lambda \ , \quad Y = a\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{e_1}{2} \ln \frac{1 - e_1\operatorname{sen}\varphi}{1 + e_1\operatorname{sen}\varphi}\right]$$

del elipsoide de revolución [77-16], con dilatación lineal

[77-44] $$m = \frac{(1 - e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}}{\cos\varphi} \ ,$$

creciente con φ y tendiendo a ∞ en los polos; la dilatación areolar viene dada por m^2.

La [77-40] es caso particular de la [77-43] para $e_1 = 0$.

c) Proyección estereográfica polar. — Supuesta la Tierra esférica (fig. 260) y empleando coordenadas polares

[77-45] $$X = \varrho\cos\lambda, \quad Y = \varrho\operatorname{sen}\lambda$$

la proyección estereográfica del hemisferio desde el polo sobre el plano del ecuador viene dada por

[77-46] $$\varrho = a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta$$

donde $\theta = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ es la colatitud del lugar P. El elemento de arco en la carta, dado en coordenadas polares por

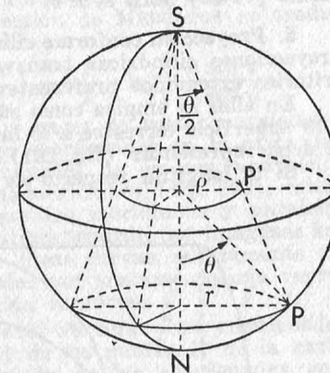


Fig. 260

[77-47] $$ds'^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\lambda^2 \ ,$$

será en virtud de [77-46]

[77-48] $$ds'^2 = a^2\frac{d\theta^2}{4\cos^4\frac{1}{2}\theta} + a^2 . \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\theta\, d\lambda^2 \ ,$$

mientras que por [77-11] el de la esfera es:

[77-49] $$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2\operatorname{sen}^2\theta d\lambda^2 \ ,$$

verificándose idénticamente en θ:

[77-50] $$\frac{1}{4\cos^4\frac{1}{2}\theta} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \ ,$$

al ser $\operatorname{sen}^2\theta = (2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta)^2 = 4\cos^4\frac{1}{2}\theta\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta$. Por tanto es la proyección estereográfica [77-46] de la esfera [77-10] es conforme. Su dilatación lineal

[77-51] $$m = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}$$

vale la unidad en el ecuador y $\frac{1}{2}$ en el polo.

En el elipsoide de revolución, la proyección estereográfica polar sobre el plano del ecuador viene dada mediante

[77-52] $$\frac{\varrho}{r} = \frac{b}{(1-e_1^2)r\operatorname{tg}\varphi + b}$$

por ser $(1-e_1^2)r\operatorname{tg}\varphi$ el valor de la ordenada de la elipse. De [77-52] deducimos

[77-53] $$\varrho = \frac{a\cos\varphi}{(1-e_1^2)^{1/2}\operatorname{sen}\varphi + (1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}} \ ,$$

que da para ϱ una ley distinta a la [XX-52] que encontraremos en la

nota II como necesaria para que en este caso la representación fuese conforme. Por ser el polo centro de proyección, punto umbílico del elipsoide de revolución, con métodos geométricos proyectivos puede fácilmente demostrarse * que las secciones planas (rectas u oblicuas) del elipsoide de revolución se proyectan según círculos, pero como queda dicho, la representación no es conforme. La [77-53] se convierte en la representación conforme [77-46] para $e_1 = 0$.

5. Proyección conforme cilíndrica transversa de Lambert-Gauss. — Las proyecciones cilíndricas transversas son apropiadas para representar territorios extendidos preferentemente en la dirección N-S.

En ellas se emplea como superficie intermediaria un cilindro tangente a la superficie terrestre a lo largo del meridiano central de la región que se deba representar (fig. 261).

Si la longitud respecto de Greenwich del meridiano de tangencia es

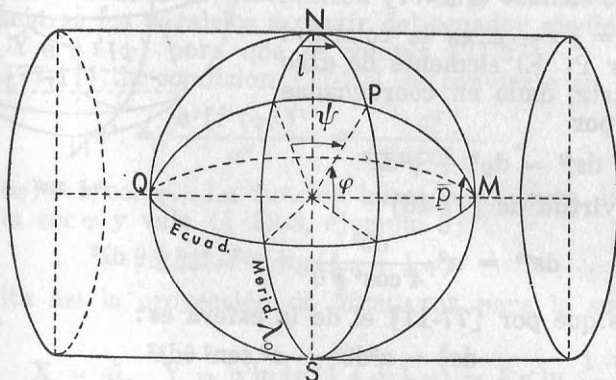


Fig. 261

λ_0, designemos por l la longitud de cualquier meridiano de la región a representar, contada a partir del meridiano de tangencia que llamaremos *principal*, de manera que

[77-54] $$l = \lambda - \lambda_0 .$$

El cilindro será elíptico para meridiano elíptico, pero *suponiendo la Tierra esférica*, dicho cilindro será circular; al primer caso corresponde la proyección de GAUSS-KRÜGER y al segundo la proyección cilíndrica transversa de LAMBERT. Ésta es particularmente sencilla porque entonces pueden aplicarse las consideraciones establecidas al tratar de la proyección de MERCATOR; dada la pequeñez de la excentricidad de la Tierra, el trazado de la carta geográfica de LAMBERT diferirá muy poco de la geodésica de GAUSS-KRÜGER.

Para traducir a esta proyección de LAMBERT lo establecido en la de MERCATOR, el meridiano de tangencia o principal sustituirá al ecuador y los polos M y Q de los hemisferios determinados por dicho meridiano asumirán el papel de los polos terrestres N y S (fig. 261). En vez de los paralelos habremos de considerar círculos menores (que llamaremos seudo-paralelos) cuyos planos son paralelos al del meridiano de tangencia y en vez de los meridianos tendremos círculos máximos (seudo-meridianos) que pasarán por los seudo-polos M y Q.

* Las generatrices de la cuádrica en el punto umbílico son las rectas isótropas, cortadas por cualquier plano de sección en puntos que se proyectan desde dicho polo sobre el plano del ecuador (paralelo al plano tangente en el polo) según los puntos cíclicos.

Las coordenadas que en este caso hacen el papel de latitud φ y de la longitud l son la seudo-latitud ψ contada sobre el arco de seudo-meridiano a partir del meridiano de tangencia o principal y la seudo-longitud p, ángulo que forma el seudo-meridiano con el ecuador tomado como origen de seudo-longitudes.

Tomando como eje X el meridiano de tangencia o principal rectificado, contado positivamente hacia el N, y como eje Y la proyección del ecuador, las ecuaciones [77-40] de la proyección de MERCATOR se traducirán aquí por las

[77-55] $$X = ap \quad , \quad Y = a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = \frac{1}{2} a \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \psi}{1 - \operatorname{sen} \psi} .$$

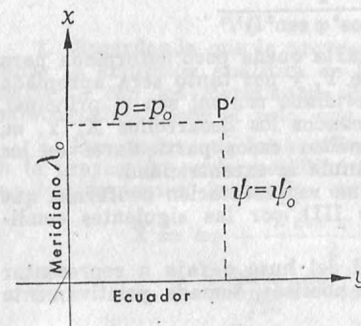


Fig. 262

Los haces de rectas paralelas a los ejes coordenados en la carta, serán imágenes de los seudo-paralelos y seudo-meridianos (fig. 262), mientras que los meridianos y paralelos geográficos tendrán por imágenes haces de líneas curvas, mutuamente ortogonales por tratarse de una representación conforme.

Para obtener las coordenadas (X, Y) de los puntos P' de la carta en función de las coordenadas geográficas (φ, l) del punto P de la superficie terrestre, bastará efectuar el cambio de coordenadas (ψ, p) al (φ, l) mediante el triángulo esférico NPM (fig. 261). Por el teorema del seno (§ 60, ejercicio 28) es

$$\frac{\operatorname{sen} PM}{\operatorname{sen} N} = \frac{\operatorname{sen} PN}{\operatorname{sen} M} ,$$

y entonces

[77-56] $$\cos \psi \cos p = \cos \varphi \cos l ,$$

mientras que por el teorema del coseno (§ 60, ejercicio 11)

$$\cos PN = \cos PM \cos NM + \operatorname{sen} PM \operatorname{sen} NM \cos M$$
$$\cos PM = \cos PN \cos NM + \operatorname{sen} PN \operatorname{sen} NM \cos N$$

y entonces

[77-57] $$\operatorname{sen} \varphi = \cos \psi \operatorname{sen} p$$

[77-58] $$\operatorname{sen} \psi = \cos \varphi \operatorname{sen} l .$$

De las [77-56] y [77-57] deducimos

[77-59] $$\operatorname{tg} p = \operatorname{tg} \varphi \sec l \quad ,$$

y aplicando [77-58] y [77-59] a las [77-55] obtenemos las fórmulas buscadas:

[77-60] $$\operatorname{tg} \frac{X}{a} = \operatorname{tg} \varphi \sec l \quad , \quad Y = \frac{1}{2} a \ln \frac{1 + \cos \varphi \operatorname{sen} l}{1 - \cos \varphi \operatorname{sen} l}$$

que dan las coordenadas de los puntos de la carta en la proyección conforme cilíndrica transversa de LAMBERT.

Si se elimina φ entre ambas ecuaciones [77-60] se obtendrá la ecuación en X, Y de un meridiano $l = l_0$ de la carta, mientras que si eliminamos l entre ambas [77-60] obtendremos la ecuación de un paralelo $\varphi = \varphi_0$. También pueden considerarse las [77-55] como ecuaciones paramétricas de un meridiano $l = l_0$, si los parámetros ψ y p están ligados mediante

[77-61] $$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} l_0 \cos p \quad ,$$

deducida de las [77-58] y [77-56]. Del mismo modo las [77-55] son ecuaciones paramétricas de un paralelo $\varphi = \varphi_0$, si los parámetros ψ y p están ligados mediante

[77-62] $$\cos\psi \operatorname{sen} p = \operatorname{sen} \varphi_0$$

que es la misma [77-57].

Obsérvese que las fórmulas de MERCATOR [77-43] para el elipsoide de revolución no son útiles para ser aplicadas directamente a una proyección transversa debido a que en este caso los seudo-paralelos son elípticos.

La dilatación lineal m, dada en la proyección de MERCATOR por [77-39], será aquí, teniendo en cuenta [77-58]:

[77-63] $$m = \frac{1}{\cos\psi} = \frac{1}{(1 - \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2 l)^{1/2}} .$$

La fórmula [77-63] nos dice que la carta queda poco deformada para pequeños valores de ψ, es decir de l o de Y, y por tanto será apropiada para representar husos esféricos cuyo meridiano central sea el principal.

Para pequeños valores de l son adecuados los desarrollos X, Y, m, en series de potencias de l, debiendo resultar casos particulares de los de GAUSS-KRÜGER (Nota IV) cuando se anula la excentricidad.

La proyección de GAUSS-KRÜGER es una representación conforme, que queda completamente determinada (Nota III) por las siguientes condiciones:

1º) La imagen del meridiano central del huso o faja a representar adoptado como principal es el eje de las abscisas, tomado positivamente hacia el Norte.

2º) Cada segmento del eje de las abscisas es igual al arco elíptico del meridiano que representa.

La representación de GAUSS-KRÜGER, como generalización de la de LAMBERT es una proyección cilíndrica modificada.

NOTA. El Instituto Geográfico Militar, que tiene a su cargo la ejecución de los trabajos geodésicos fundamentales en Argentina, adoptó en 1925 el elipsoide de HAYFORD, cuyos parámetros se han dado en [77-12], [77-13] y [77-14]. Se toma además como punto de arranque para el cálculo de las coordenadas geodésicas el Observatorio de Córdoba y como azimut de orientación el de un lado de la triangulación principal emergente de este punto.

Las mediciones horizontales se representan en coordenadas rectangulares mediante la proyección conforme de GAUSS-KRÜGER de cada una de las siete fajas meridianas de 3º de ancho en que se divide la República, con meridianos centrales en las longitudes 72º, 69º, 66º, 63º, 60º, 57º y 54º al Oeste de Greenwich. Las abscisas se cuentan desde el polo Sur hacia el Norte y las ordenadas de Oeste a Este. Para distinguir por sus ordenadas las siete fajas entre sí y emplear sólo números positivos se atribuye a los meridianos centrales las siguientes ordenadas:

Al meridiano	72º, central de la	1ª	faja, la ordenada	1 500 000
„	69º	2ª	„	2 500 000
„	66º „	3ª	„	3 500 000
„	63º „	4ª	„	4 500 000
„	60º „	5ª	„	5 500 000
„	57º „	6ª	„	6 500 000
„	54º „	7ª	„	7 500 000

La longitud l en *medida radial*, se cuenta para cada huso a partir del meridiano principal, de acuerdo con lo establecido en [77-54]. El valor definitivo de la ordenada Y de la carta se obtendrá sumando al dado por las fórmulas el que corresponda al meridiano central de la faja respectiva.

El ancho de 3º adoptado para los husos hace que en sus bordes y en el caso más desfavorable, la dilatación lineal sea

[77-64] $$m < 1{,}000\,53 \; ,$$

es decir la máxima dilatación areolar no llega a 11 m² por hectárea. Para conseguir la necesaria conexión entre los husos contiguos, se establecen zonas de superposición en los bordes de los mismos para determinar allí coordenadas en los sistemas correspondientes a ambos husos.

EJERCICIOS

1. Recordando que la proyección estereográfica conserva los ángulos, hallar la expresión analítica de la *loxodrómica*, curva que forma ángulo constante con los meridianos. Puede obtenerse mediante su proyección estereográfica desde el polo, que es una espiral logarítmica.

2. Demostrar que las coordenadas [77-60] de los puntos de la carta en la proyección conforme cilíndrica transversa de LAMBERT-GAUSS admiten los siguientes desarrollos en potencias de l:

$$X = a\varphi + \frac{l^2\cos^2\varphi \, . \, at}{2} + \frac{l^4\cos^4\varphi \, . \, at}{24}(5 - t^2) +$$
$$+ \frac{l^6\cos^6\varphi \, . \, at}{720}(61 - 58t^2 + t^4) + O(l^8) \; ;$$
$$Y = l\cos\varphi \, . \, a + \frac{l^3\cos^3\varphi \, . \, a}{6}(1 - t^2) +$$
$$+ \frac{l^5\cos^5\varphi \, . \, a}{120}(5 - 18t^2 + t^4) + O(l^7)$$

con $t = \operatorname{tg}\varphi$.

3. La dilatación lineal [77-63] de la proyección de LAMBERT-GAUSS admite el desarrollo en potencias de l:

$$m = 1 + \frac{l^2\cos^2\varphi}{2} + \frac{l^4\cos^4\varphi}{24}(5 - 4t^2) + O(l^6)$$

con $t = \operatorname{tg}\varphi$.

4. La dilatación lineal [77-63] de la proyección LAMBERT-GAUSS admite el desarrollo en potencias de la coordenada Y de la carta:

$$m = 1 + \frac{Y^2}{2a^2} + \frac{Y^4}{24a^4} + O\left(\frac{Y^6}{a^6}\right).$$

5. En la proyección de LAMBERT-GAUSS se llama *convergencia del meridiano* al ángulo γ que forma la curva con la paralela al eje X. Demostrar que es

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{sen}\varphi \, . \operatorname{tg} l \; ,$$

con desarrollo en potencias de l dado por:

$$\operatorname{tg}\gamma = l\cos\varphi \, . \, t + \frac{l^3\cos^3\varphi \, . \, t}{3}(1 + t^2) +$$
$$+ \frac{2l^5\cos^5\varphi \, . \, t}{15}(1 + 2t^2 + t^4) + O(l^7)$$

donde $t = \operatorname{tg}\varphi$.

NOTAS AL CAPÍTULO XX

I. La elipse indicatriz de Tissot. — La figura resultante de suponer prolongada la superficie de los océanos por debajo de los continentes recibe el nombre de *geoide*. Para su precisa representación cartográfica se necesita un estudio más profundo del realizado en § 77. En aras de su mejor comprensión, nos limitaremos a explicar los puntos fundamentales de dicho estudio en forma geométrica y sintética; supuestas conocidas las propiedades y condiciones que rigen la continuidad de funciones, los infinitésimos y el paso al límite, dicha forma de tratar la cuestión podrá alcanzar todo el rigor deseado.

Para cualquier forma del geoide, supondremos siempre que sobre éste los paralelos constituyen el haz de trayectorias ortogonales al haz de meridianos.

Si la superficie [77-1] y su representación cartográfica [77-23] cumplen las condiciones de diferenciabilidad y de correspondencia biunívoca establecidas al formular dichas ecuaciones [77-1] y [77-23], en puntos correspondientes P de la superficie y P′ de la carta, las direcciones y arcos infinitesimales se corresponderán en la forma vista en [77-25]. Además, en esas condiciones, existen a partir de P dos direcciones ortogonales ξ, η de la superficie a las que corresponden a partir de P′ dos direcciones de la carta ξ', η', también ortogonales, cualquiera que sea la naturaleza de la superficie y su modo de representación. En efecto, supongamos que en la superficie a las tangentes ortogonales CE y PD les corresponden las C′E′ y P′D′ en la carta (fig. 263). Si el ángulo C′P′D′

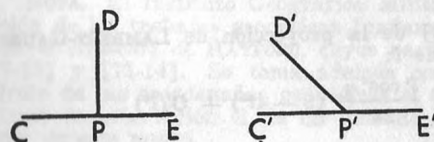


Fig. 263

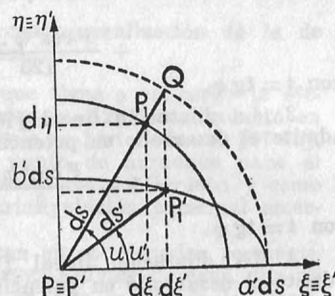


Fig. 264

es agudo y el D′P′E′ es obtuso, imaginemos que el ángulo recto CPD gira en sentido retrógrado hasta coincidir con el DPE; por la continuidad de la representación, su imagen en la carta variará con continuidad desde C′P′D′ a D′P′E′ y por tanto existirá al menos una posición intermedia formada por dos direcciones ortogonales ξ', η' correspondientes a otras dos ξ, η de la superficie, también ortogonales. Sean a' y b' las dilataciones lineales [77-25] referentes a esos pares de direcciones correspondientes llamadas *direcciones principales*, es decir, sea

[XX-1] $$d\xi' = a'\,d\xi \quad , \quad d\eta' = b'\,d\eta .$$

Supongamos la carta sobre el plano tangente a la superficie de manera que $P'\xi'$ coincida con $P\xi$ y $P'\eta'$ con $P\eta$, por lo que a todo rectángulo infinitesimal de diagonal $PP_1 = ds$ le corresponderá en la carta un rectángulo infinitesimal de diagonal $PP'_1 = ds'$ (fig. 264). Consideremos en la dirección PP_1 un punto Q tal que

[XX-2] $$PQ = a'\,ds .$$

Si se tiene en cuenta la primera de las [XX-1], de [XX-2] se deduce que la abscisa de Q es $d\xi'$, es decir, la misma que la de P_1'.

Si u es el ángulo que $P\xi$ forma con PP_1 y u' es su correspondiente $\xi'P'P'_1$, se ve en la fig. 264 que la razón de las ordenadas de los puntos P_1' y Q es la misma que la de las pendientes

[XX-3] $$\operatorname{tg} u' = \frac{d\eta'}{d\xi'} \ , \quad \operatorname{tg} u = \frac{d\eta}{d\xi}$$

entre las direcciones correspondientes ds y ds', es decir, teniendo en cuenta las [XX-1], dicha razón vale

[XX-4] $$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{b'}{a'} \ ,$$

independiente de la posición particular de P_1. Suponiendo ahora que el plano tangente a la superficie se levanta sobre el de la carta, girando alrededor del eje $P\xi$ un ángulo igual al $\operatorname{arc}\cos(b'/a')$, los puntos P_1' podrán considerarse proyecciones ortogonales de los puntos Q así enderezados y por tanto la circunferencia del plano tangente de radio $a'ds$ se proyectará ortogonalmente en una elipse de semiejes $a'ds$ y $b'ds$. De [XX-4] se deduce también analíticamente que las coordenadas de Q son $(d\xi', (a'/b')d\eta')$ las que verificarán la ecuación de la circunferencia de centro P y radio $a'ds$, es decir, se cumple

$$\frac{1}{a'^2}\left(\frac{d\xi'}{ds}\right)^2 + \frac{1}{b'^2}\left(\frac{d\eta'}{ds}\right)^2 = 1 \ ,$$

lo que prueba que P_1' está en la elipse de semiejes $a'ds$ y $b'ds$. Por tanto, a una circunferencia infinitesimal de centro P y radio ds constante tomado como unidad ($ds = 1$) en la superficie, le corresponde en la carta la llamada *elipse indicatriz de* TISSOT de centro P′ y semiejes a' y b' (con $ds = 1$). Dicha elipse da la *alteración longitudinal* de la carta en P′, es decir, la ley de variación de la dilatación lineal m [71-25] desde un máximo a' hasta un mínimo b', valores extremos que corresponden a las direcciones principales.

La alteración del ángulo u viene dada por $u - u'$, deduciéndose fácilmente de [XX-4] la

[XX-5] $$\operatorname{sen}(u - u') = \frac{a' - b'}{a' + b'}\operatorname{sen}(u + u') \ ,$$

produciéndose la máxima alteración

[XX-6] $$U - U' = \omega \quad \text{para} \quad U + U' = \tfrac{1}{2}\pi .$$

De [XX-5] obtenemos para ω

[XX-7] $$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sen}\omega = \frac{a' - b'}{a' + b'} \ , \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{a' - b'}{2\sqrt{a'b'}} \ , \\ &\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\omega = \frac{\sqrt{a'} - \sqrt{b'}}{\sqrt{a'} + \sqrt{b'}} \end{aligned}\right.$$

y también

[XX-8] $$\operatorname{tg} U = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{a'}{b'}} \ , \quad \operatorname{tg} U' = \sqrt{\frac{b'}{a'}}$$

que da en la superficie la dirección $U = \pi/4 + \omega/2$ a la que corresponde en la carta la dirección $U' = \pi/4 - \omega/2$ en que la alteración $u - u'$ alcanza su máximo ω. Esta máxima alteración corresponde a ángulos contados a partir del eje $\xi \equiv \xi'$. Si consideramos ángulos cualesquiera APB, refiriéndolos a dicho eje

$$APB = AP\xi + \xi PB = \xi PB - \xi PA \ ,$$

como a uno y otro lado del eje $\xi \equiv \xi'$ los ángulos se alteran simétricamente, la *máxima alteración angular* vendrá dada por 2ω.

Si consideramos a partir de P dos direcciones perpendiculares cualesquiera de la superficie, las direcciones correspondientes en la carta a partir de P' vendrán dadas por dos diámetros conjugados de la elipse indicatriz de TISSOT, cuyas longitudes serán las respectivas dilataciones lineales m y m_1 (en virtud de [77-25] para $ds = 1$) y formando entre sí un ángulo $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, si ε es la alteración sufrida en la representación por el ángulo $\frac{1}{2}\pi$ de ambas direcciones ortogonales de la superficie. Los conocidos teoremas de APOLONIO referentes a la elipse dan las fórmulas

[XX-9] $$m^2 + m_1^2 = a'^2 + b'^2 \quad , \quad m m_1 \cos \varepsilon = a'b'.$$

Al elemento de superficie de área πds^2 dado por el círculo infinitesimal de centro P y radio ds, corresponde en la carta al elemento de área $\pi a'b'ds^2$ dado por la elipse infinitesimal de centro P' y semiejes $a'ds$ y $b'ds$. Por tanto, la *dilatación areolar* σ vendrá dada por

[XX-10] $$\sigma = \frac{\text{Elemento área carta}}{\text{Elemento área superficie}} = a'b'.$$

Si M designa el radio de curvatura del meridiano y r el del paralelo, en la superficie terrestre, el elemento de arco infinitesimal viene dado por

[XX-11] $$ds = +\sqrt{M^2\, d\varphi^2 + r^2\, d\lambda^2}\ ,$$

en que $M d\varphi$ es el elemento de arco de meridiano y $r d\lambda$ el elemento de arco de paralelo.

Designemos por $d\mu$ el elemento de arco de la imagen del meridiano y por $d\tau$ el elemento de arco de la imagen del paralelo en una representación cartográfica cualquiera dada por las ecuaciones [77-22]. Las proyecciones sobre los ejes X, Y del elemento de meridiano $d\mu$ serán

$$X_\varphi \cdot d\varphi = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} d\varphi \quad , \quad Y_\varphi \cdot d\varphi = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} d\varphi$$

y análogamente las correspondientes proyecciones del elemento de paralelo $d\tau$ serán

$$X_\lambda \cdot d\lambda = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} d\lambda \quad , \quad Y_\lambda \cdot d\lambda = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Por tanto

[XX-12] $$\begin{cases} d\mu = \left[\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{1/2} d\varphi\ , \\ d\tau = \left[\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right)^2\right]^{1/2} d\lambda. \end{cases}$$

Designemos por h y k las dilataciones lineales correspondientes respectivamente al meridiano y paralelo que pasen por P, es decir

[XX-13] $$h = \frac{d\mu}{M\, d\varphi} \quad , \quad k = \frac{d\tau}{r\, d\lambda}$$

y teniendo en cuenta [XX-12], se obtiene

[XX-14] $$\begin{cases} h = \dfrac{1}{M}\left[\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{1/2}, \\ k = \dfrac{1}{r}\left[\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right)^2\right]^{1/2}. \end{cases}$$

Si designamos por ε_0 la alteración del ángulo que en la carta sufre

el ángulo $\frac{1}{2}\pi$ que forman entre sí meridiano y paralelo en la superficie terrestre, las fórmulas [XX-9] para este caso particular serán

[XX-15] $$h^2 + k^2 = a'^2 + b'^2 \quad , \quad hk \cos \varepsilon_0 = a'b'.$$

Al rectángulo elemental de la superficie terrestre cuyos lados son los elementos de meridiano y paralelo, de área infinitesimal $M d\varphi \cdot r d\lambda$, corresponde en la carta el paralelogramo infinitesimal abarcado por los segmentos dirigidos $d\mu$ y $d\tau$, cuya área infinitesimal en función de las componentes de estos segmentos dirigidos es (§ 60-6, *e*):

[XX-16] $$\begin{vmatrix} X_\varphi\, d\varphi & Y_\varphi\, d\varphi \\ X_\lambda\, d\lambda & Y_\lambda\, d\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\right) d\varphi\, d\lambda.$$

Por tanto, la dilatación areolar [XX-10] valdrá:

[XX-17] $$\sigma = \frac{1}{M \cdot r}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\right) = a'b'.$$

Conocidas las funciones $f_1(\varphi, \lambda)$ y $f_2(\varphi, \lambda)$, es decir, dada la representación cartográfica [77-22], las fórmulas [XX-14], [XX-15] y [XX-17] permiten hallar los semiejes a' y b' de la elipse indicatriz de TISSOT, la máxima alteración angular 2ω mediante [XX-7], la dilatación areolar σ y la variación angular ε_0 experimentada en la carta por el ángulo recto que en la superficie terrestre forman entre sí el meridiano y paralelo.

Así, por ejemplo, de [XX-15] y [XX-17] deducimos la suma y diferencia $a' + b'$ y $a' - b'$ mediante

[XX-18] $$(a' + b')^2 = h^2 + k^2 + 2\sigma = \left(\frac{1}{M}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{M}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)^2$$

[XX-19] $$(a' - b')^2 = h^2 + k^2 - 2\sigma = \left(\frac{1}{M}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{M}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)^2,$$

y también de [XX-15], [XX-14] y [XX-17] obtenemos

[XX-20] $$\cos \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{hk} \quad , \quad \operatorname{tg} \varepsilon_0 = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial \varphi} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial f_2}{\partial \varphi} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial \varphi} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial \varphi}}.$$

Estas fórmulas se aplicarán al elipsoide de revolución recordando las [77-15] y en particular a la esfera de radio a con excentricidad $e_1 = 0$.

II. Caracterización de las representaciones: ejemplos. — La condición necesaria y suficiente para que la dilatación lineal m sea la misma en cualquier dirección a partir de P, es que la indicatriz de TISSOT se convierta en una circunferencia. Por tanto, la representación es *conforme* cuando y sólo cuando para todo punto P se cumple

[XX-21] $$\frac{a'}{b'} = 1.$$

En cambio, recordando el valor [XX-10] de la dilatación areolar, la representación es *equivalente* cuando y sólo cuando para todo punto P se cumple

[XX-22] $$a'b' = 1.$$

En una representación conforme [XX-21], todo par rectangular de

direcciones es principal, la dilatación lineal en cualquier dirección a partir de P es constante

[XX-23] $$m = a' = b' = h = k$$

(aun cuando varíe con P), la dilatación areolar σ vale

[XX-24] $$\sigma = m^2 ,$$

y las alteraciones angulares ε, ε_0, $u - u'$ y ω son nulas, es decir

[XX-25] $$\varepsilon = \varepsilon_0 = u - u' = \omega = 0 ,$$

deducidas fácilmente al aplicar [XX-21] y [XX-23] a [XX-9], [XX-5] y [XX-7]. Volvemos, pues, a encontrar la isogonalidad característica de las representaciones conformes.

Para profundizar el estudio de las representaciones conformes, es muy útil sustituir la latitud φ por una nueva variable q, contada también a partir del ecuador y tal que el elemento de meridiano se exprese mediante

[XX-26] $$r\,dq = \mathrm{M}\,d\varphi ,$$

es decir, la nueva variable viene dada por

[XX-27] $$q = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{M}}{r}\,d\varphi ,$$

En las antiguas variables paramétricas φ, λ, a la subdivisión del plano paramétrico en cuadrados elementales $d\varphi = d\lambda$ correspondía una subdivisión de la superficie terrestre en rectángulos elementales $\mathrm{M}d\varphi \neq \neq r d\lambda$, mientras que con las nuevas variables paramétricas q, λ, a la subdivisión del plano paramétrico en cuadrados elementales $dq = d\lambda$, corresponde una subdivisión de la superficie terrestre en *cuadrados elementales* $r dq = r d\lambda$.

Con la nueva variable q, las fórmulas [XX-13] se convierten en

[XX-28] $$h = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\mu}{dq} , \quad k = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\tau}{d\lambda} ,$$

de manera que las representaciones conformes se caracterizan por las fórmulas (igualdad de diámetros conjugados perpendiculares para la elipse indicatriz de TISSOT)

[XX-29] $$\varepsilon_0 = 0 , \quad \frac{d\mu}{dq} = \frac{d\tau}{d\lambda} .$$

En estas [XX-29] no figuran explícitamente M y r y son válidas *cualquiera que sea la forma del meridiano terrestre*. Según sea esta forma, así se obtendrá una u otra expresión [XX-27] para la nueva variable q en función de la latitud φ. En particular, si la superficie de la Tierra se supone esférica, la [XX-27] da

[XX-30] $$q = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

De ahí, que resuelto el problema de la representación conforme en determinadas condiciones para la forma esférica de la Tierra, para pasar de ella a la que corresponde a la hipótesis de una cierta forma atribuída a los meridianos terrestres, bastará reemplazar en los resultados obtenidos el

$$\ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) ,$$

por la expresión de q que convenga a la hipótesis adoptada.

Así, para el elipsoide revolución, de [XX-27] y [77-15] deducimos

[XX-31] $$q = \int_0^{\varphi} \frac{(1 - e_1^2)\,d\varphi}{(1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi)\cos\varphi} = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{e_1}{2} \ln \frac{1 - e_1 \operatorname{sen}\varphi}{1 + e_1 \operatorname{sen}\varphi}$$

y desarrollando el último miembro en potencias de e_1 mediante

[XX-32] $$q = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - e_1^2 \operatorname{sen}\varphi + \mathrm{O}(e_1^4) ,$$

podremos darnos cuenta de la corrección atribuible a [XX-30] para pasar a [XX-31].

La variable [XX-30], muy empleada en Náutica, recibe el nombre de *latitud ampliada* y bajo el nombre de *función Lambda* de φ ha sido tabulada por GUYOU.

Las proyecciones cilíndricas más sencillas son aquellas en que la familia de meridianos tiene por imagen un haz de rectas paralelas y la familia de paralelos se representa por otro haz de rectas paralelas perpendiculares a las primeras. Los desarrollos cilíndricos son caso particular de ellas; por ejemplo, puede considerarse un cilindro circunscripto a la superficie terrestre a lo largo del ecuador, cuya imagen se tomará como eje X, mientras que la imagen del meridiano de Greenwich se tomará por eje Y; entonces es

[XX-33] $$d\mu = d\mathrm{Y} , \quad d\tau = d\mathrm{X} .$$

Por ser principales las direcciones de meridianos y paralelos, se cumple

[XX-34] $$\varepsilon_0 = 0 ,$$

es decir, los ejes de la elipse indicatriz son paralelos a los ejes coordenados X, Y.

Si suponemos además que el ecuador se rectifica sobre el eje X, será

[XX-35] $$\mathrm{X} = a\lambda ,$$

y entonces las [XX-28] se convierten en

[XX-36] $$h = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\mathrm{Y}}{dq} , \quad k = \frac{1}{r} \cdot a .$$

En particular, para la esfera, en virtud de [XX-26], la [XX-36] se convierte en

[XX-36'] $$h = \frac{1}{a} \cdot \frac{d\mathrm{Y}}{d\varphi} , \quad k = \frac{1}{\cos\varphi} .$$

Las dilataciones lineales máxima a' y mínima b' serán la mayor y menor de [XX-36] o en el caso esférico, de [XX-36'].

Si ahora suponemos que la anterior proyección cilíndrica ecuatorial ha de ser además conforme, será necesario y suficiente se cumpla

[XX-37] $$h = k ,$$

por lo que teniendo en cuenta [XX-36] y [XX-35] resulta para ecuaciones de la proyección conforme cilíndrica ecuatorial

[XX-38] $$\mathrm{X} = a\lambda , \quad \mathrm{Y} = aq ,$$

por haber tomado el eje X como imagen del ecuador rectificado ($\mathrm{Y} = 0$ para $q = 0$).

La dilatación lineal, constante respecto de las direcciones que parten de P', pero variando con el punto P', según [XX-36] vale

[XX-39] $$m = a/r$$

y la dilatación areolar

$$[XX\text{-}40] \qquad \sigma = m^2 = a^2/r^2 .$$

Las fórmulas [XX-38], [XX-39] y [XX-40] son válidas cualquiera que sea la forma atribuída a los meridianos terrestres. Si suponemos la Tierra esférica, la expresión de q será la [XX-30] que convierte la [XX-38] en la proyección de MERCATOR [77-40], así como la [XX-39] se convierte en la [77-39]. Si suponemos que la Tierra es un elipsoide de revolución [77-16], la expresión de q vendrá dada por [XX-31] que convierte la [XX-38] en la proyección [77-43], así como, en virtud de las [77-15], la [XX-39] se convierte en la [77-44].

La representación [77-43] es adecuada para representar una región ecuatorial y entonces para pequeños valores de φ, podremos utilizar el desarrollo en serie

$$[XX\text{-}41] \qquad \begin{cases} X = a\lambda \\ \dfrac{Y}{a} = \varphi(1-e_1^2) + \dfrac{\varphi^3}{6}(1-e_1^2-2e_1^4) + \\ \qquad + \dfrac{\varphi^5}{120}(5-e_1^2+20e_1^4-24e_1^6) + O(\varphi^7) \end{cases}$$

obtenido desarrollando $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\operatorname{sen}\varphi}{1-\operatorname{sen}\varphi}$ en forma análoga a la vista en § 77, ejercicio 4, y $\dfrac{1}{2}e_1\ln\dfrac{1-e_1\operatorname{sen}\varphi}{1+e_1\operatorname{sen}\varphi}$ en forma análoga a § 77, ejercicio 2

La dilatación lineal [77-44] tendrá un desarrollo en serie

$$[XX\text{-}42] \qquad m = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2(1-e_1^2) + \frac{\varphi^4}{24}(5-e_1^2-3e_1^4) + O(\varphi^6) \quad ,$$

pues basta aplicar el teorema de las series dobles de WEIERSTRASS a la serie binómica

$$[XX\text{-}43] \qquad m = \frac{1}{\cos\varphi}\Big(1 - \frac{1}{2}e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{1}{8}e_1^4\operatorname{sen}^4\varphi - \\ - \frac{1}{16}e_1^6\operatorname{sen}^6\varphi - \ldots\Big).$$

La [XX-42] da el desarrollo de [77-39] para $e_1 = 0$, análogo al encontrado en § 77, ejercicio 3.

Supongamos ahora que deseamos imponer la condición de que la carta tenga circunferencias concéntricas para imagen de los paralelos y sus radios comunes para imagen de los meridianos, formando estos últimos entre sí el mismo ángulo λ que en la superficie terrestre. Utilizando para la carta coordenadas polares ϱ, λ mediante las fórmulas de transformación [77-45], los elementos de meridiano $d\mu$ y de paralelo $d\tau$ serán ahora

$$[XX\text{-}44] \qquad d\mu = -\,d\varrho \quad , \quad d\tau = \varrho\, d\lambda \quad ,$$

siendo también

$$[XX\text{-}45] \qquad \varepsilon_0 = 0 \quad ,$$

lo que nos dice que los ejes de la elipse indicatriz de TISSOT se dan sobre las imágenes de los meridianos y paralelos. Las [XX-28] se convierten ahora en

$$[XX\text{-}46] \qquad h = -\frac{1}{r}\cdot\frac{d\varrho}{dq} \quad , \quad k = \frac{\varrho}{r} \quad .$$

longitud de los semiejes de la elipse indicatriz de TISSOT.

Esta representación será conforme cuando y sólo cuando dichos semiejes sean iguales, es decir, para

$$[XX\text{-}47] \qquad d\varrho/\varrho = -\,dq \quad ,$$

y si tomamos para representar el ecuador la circunferencia de radio a, es decir, hacemos corresponder

$$[XX\text{-}48] \qquad \varrho = a \quad \text{para} \quad q = 0$$

la integración de [XX-47] da

$$[XX\text{-}49] \qquad \ln(\varrho/a) = -\,q \quad ,$$

siendo según [XX-46] la dilatación lineal

$$[XX\text{-}50] \qquad m = \varrho/r \quad ,$$

fórmulas válidas cualquiera que sea la forma atribuída a los meridianos terrestres. Si suponemos la Tierra esférica, la expresión de q será la [XX-30], convirtiéndose la [XX-49] en la

$$[XX\text{-}51] \qquad \varrho = a\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) \quad ,$$

es decir, en la proyección estereográfica [77-46], para la que la [XX-50] pasa a ser la [77-51]. Si en cambio, suponemos que la Tierra es un elipsoide de revolución [77-16], la expresión de q viene dada por la [XX-31] que sustituída en [XX-49] proporciona la ecuación que en este caso corresponde a una representación conforme, es decir la

$$[XX\text{-}52] \qquad \varrho = a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+e_1\operatorname{sen}\varphi}{1-e_1\operatorname{sen}\varphi}\right)^{\frac{1}{2}e_1}$$

no coincidente con la [77-53] para e_1 distinto de cero o de uno; así se confirma que la [77-53] no sea en este caso conforme. La dilatación lineal de la representación conforme [XX-52], en virtud de [XX-50] y [77-15] vale

$$[XX\text{-}53] \qquad m = \frac{(1+e_1\operatorname{sen}\varphi)^{\frac{1}{2}(1+e_1)}\cdot(1-e_1\operatorname{sen}\varphi)^{\frac{1}{2}(1-e_1)}}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)} \quad ,$$

que para $e_1 = 0$ se convierte en la [77-51].

Para profundizar el estudio de las representaciones equivalentes, también será útil sustituir la latitud φ por una nueva variable ζ, contada desde el ecuador y tal que el elemento de meridiano se exprese mediante

$$[XX\text{-}54] \qquad \frac{d\zeta}{r} = M\, d\varphi \quad ,$$

es decir, la nueva variable viene dada por

$$[XX\text{-}55] \qquad \zeta = \int_0^{\varphi} Mr\, d\varphi .$$

En las antiguas variables φ, λ, al rectángulo elemental de área $d\varphi\, d\lambda$ del plano paramétrico, correspondía en la superficie terrestre el rectángulo elemental de área variable $M d\varphi \cdot r d\lambda$, mientras que con las nuevas variables ζ, λ, al rectángulo elemental paramétrico $d\zeta\, d\lambda$ corresponde en la superficie terrestre un rectángulo elemental de la *misma área* $d\zeta\, d\lambda$.

Con la nueva variable ζ, las fórmulas [XX-13] se convierten en

$$[XX\text{-}56] \qquad h = r\frac{d\mu}{d\zeta} \quad , \quad k = \frac{1}{r}\cdot\frac{d\tau}{d\lambda} \quad ,$$

de manera que recordando [XX-15] y [XX-22], las representaciones equivalentes se caracterizan por la condición

$$\text{[XX-57]} \qquad \frac{d\mu}{d\zeta} \cdot \frac{d\tau}{d\lambda} \cos \varepsilon_0 = 1.$$

En ésta [XX-57] no figuran explícitamente M y r y son válidas cualquiera que sea la forma de los meridianos terrestres. Según sea esta forma, así se obtendrá una u otra expresión [XX-55] para la nueva variable ζ en función de la latitud φ. En particular, si la superficie de la Tierra se supone esférica, la [XX-55] se convierte en

$$\text{[XX-58]} \qquad \zeta = \int_0^{\varphi} a^2 \cos\varphi \, d\varphi = a^2 \operatorname{sen}\varphi.$$

De ahí, que resuelta la cuestión de hallar una determinada representación equivalente para la forma esférica de la Tierra, para pasar de ella a la que corresponde a la hipótesis de una cierta forma atribuída a los meridianos terrestres, bastará reemplazar en los resultados alcanzados $a^2 \operatorname{sen}\varphi$ por la expresión de ζ que corresponda a la hipótesis adoptada. Así, para el elipsoide de revolución, de [XX-55] y [77-15] se deduce

$$\text{[XX-59]} \qquad \zeta = \int_0^{\varphi} \frac{a^2(1-e_1^2)\cos\varphi}{(1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2(1-e_1^2)}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi} + \frac{1}{2e_1}\ln\frac{1+e_1\operatorname{sen}\varphi}{1-e_1\operatorname{sen}\varphi}\right)$$

y desarrollando el último miembro en potencias de e_1, mediante

$$\text{[XX-60]} \qquad \zeta = a^2 \operatorname{sen}\varphi - \frac{a^2 e_1^2}{3}(2+\cos^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi + O(e_1^4)$$

podremos darnos cuenta de la corrección atribuíble a [XX-58] para pasar a [XX-59].

Las proyecciones cilíndricas que cumplen las condiciones [XX-33] y [XX-34], convierten la condición de equivalencia [XX-57] en la

$$\text{[XX-61]} \qquad \frac{dY}{d\zeta} \cdot \frac{dX}{d\lambda} = 1,$$

siendo según [XX-56] los semiejes a' y b' de la elipse indicatriz de Tissot, el mayor y menor de los números

$$\text{[XX-62]} \qquad h = r \cdot \frac{dY}{d\zeta}, \quad k = \frac{1}{r} \cdot \frac{dX}{d\lambda}.$$

Si suponemos además que el ecuador se rectifica sobre el eje X según la [XX-35], de [XX-61] obtendremos $dY/d\zeta = 1/a$ y por lo tanto, las ecuaciones de la proyección equivalente cilíndrica ecuatorial serán

$$\text{[XX-63]} \qquad X = a\lambda \;, \quad Y = \frac{1}{a}\zeta$$

por haber tomado el eje X como imagen del ecuador rectificado ($Y = 0$ para $\zeta = 0$). Los semiejes b' y a' de la elipse indicatrtiz de Tissot vendrán dados respectivamente, según [XX-62], por

$$\text{[XX-64]} \qquad h = r/a \;, \quad k = a/r \;,$$

y la máxima alteración angular 2ω, en virtud de [XX-8], se obtendrá mediante

$$\text{[XX-65]} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = \frac{a}{r}.$$

Las fórmulas [XX-63], [XX-64] y [XX-65] son válidas cualquiera que sea la forma atribuída a los meridianos terrestres. Así, por ejemplo, en la esfera [77-10], la variable ζ dada por [XX-58] convierte las [XX-63] en [77-30], es decir:

$$\text{[XX-66]} \qquad X = a\lambda \;, \quad Y = a \operatorname{sen}\varphi \;,$$

caso particular de [77-34] para $e_1 = 0$, confirmando que entonces la representación es equivalente. Para este caso esférico, las [XX-64] se convierten en

$$\text{[XX-67]} \qquad b' = h = \cos\varphi \;, \quad a' = k = \sec\varphi$$

y la máxima alteración angular 2ω se podrá obtener también mediante la segunda de las [XX-7] dando

$$\text{[XX-68]} \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi \operatorname{tg}\varphi.$$

Si en cambio suponemos que la Tierra es el elipsoide de revolución [77-16], la variable ζ dada por [XX-59] convierte las [XX-63] en

$$\text{[XX-69]} \qquad X = a\lambda \;, \quad Y = \frac{1}{2}a(1-e_1^2)\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2e_1}\ln\frac{1+e_1\operatorname{sen}\varphi}{1-e_1\operatorname{sen}\varphi}\right)$$

no coincidente con la [77-34] para e_1 distinto de cero o de uno, lo que confirma que la [77-34] no fuese en este caso equivalente. La representación equivalente [XX-69], recordando [XX-64] y [77-15], tiene como semiejes de la elipse indicatriz de Tissot

$$\text{[XX-70]} \qquad b' = h = \frac{\cos\varphi}{(1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \;. \quad a' = k = \frac{(1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos\varphi}.$$

Mediante [XX-7], la máxima alteración angular 2ω podrá obtenerse de

$$\text{[XX-71]} \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{(1-e_1^2)\operatorname{sen}\varphi\operatorname{tg}\varphi}{2(1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Las [XX-69], [XX-70] y [XX-71] se convierten respectivamente en las [XX-66], [XX-67] y [XX-68] para $e_1 = 0$.

III. **Fórmulas generales para las representaciones conformes.** — La condición necesaria y suficiente [XX-21] para que una representación sea conforme, aplicada a [XX-19], mediante la introducción de la variable q, definida en [XX-27], convierte en virtud de [XX-26] a las [XX-19] y [XX-21] en

$$\text{[XX-72]} \qquad (a'-b')^2 = \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial q} - \frac{\partial f_2}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial\lambda}\right)^2\right] = 0.$$

La condición necesaria y suficiente para que se cumpla [XX-72] es que las funciones *reales* [77-22] que determinan la representación cartográfica conforme cumplan

$$\text{[XX-73]} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial f_2}{\partial\lambda} \;, \quad \frac{\partial f_1}{\partial\lambda} = -\frac{\partial f_2}{\partial q}.$$

Estas son las ecuaciones características de Cauchy-Riemann (§ 114-2), cuyo cumplimiento da la condición necesaria y suficiente para que las funciones [77-22] con derivadas parciales continuas sean la parte real e imaginaria de una función analítica de la variable compleja $q + i\lambda$ (§ 114-2). Entonces será

$$\text{[XX-74]} \qquad X + iY = f_1(\varphi,\lambda) + if_2(\varphi,\lambda) = F(q+i\lambda) \;,$$

en que la función compleja F de variable compleja $q + i\lambda$ es monógena (tiene derivada única en cualquier dirección) en los puntos del recinto en que se cumplan las [XX-73].

Si se cumple [XX-73], las funciones [77-22] serán armónicas, es decir, verificarán la ecuación diferencial de LAPLACE (§ 91-6, *d*)

[XX-75] $$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Recíprocamente, toda solución de esta ecuación [XX-75] puede tomarse como función f_1 ó f_2, pues entonces las [XX-73] son compatibles de manera que adoptada por ejemplo aquella solución como parte real f_1, la integración de una diferencial exacta

[XX-76] $$f_2 = \int_{(q_0,\lambda_0)}^{(q,\lambda)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q} d\lambda - \frac{\partial f_1}{d\lambda} dq \right) + C$$

determina, a menos de la constante C, la función conjugada f_2.

La integral general de la ecuación [XX-75] es

[XX-77] $$X = f(q + i\lambda) + g(q - i\lambda) \quad ,$$

con f y g funciones arbitrarias, a la que se asocia su conjugada armónica

[XX-78] $$Y = \frac{f(q + i\lambda) - g(q - i\lambda)}{i}$$

para que se cumplan las [XX-73].

De [XX-77] y [XX-78] deducimos

[XX-79] $$2f(q + i\lambda) = X + iY = F(q + i\lambda)$$

[XX-80] $$2g(q - i\lambda) = X - iY = \overline{F}(q - i\lambda) \quad ,$$

y por tanto para que X é Y sean reales, las funciones f y g deben tomar en puntos imaginario-conjugados valores imaginario-conjugados y en particular *deben coincidir en el campo real.*

En esta forma obtendremos todas las representaciones conformes que se deseen. En particular, supongamos que se imponga la condición de que un cierto meridiano λ_0 tomado como principal tenga imagen rectilínea en la carta, imagen que tomaremos como eje X en ella. Contemos como en el § 77-5 las longitudes de los demás meridianos por el ángulo l que formen con el principal, es decir, introduzcamos

[XX-81] $$l = \lambda - \lambda_0 \quad ,$$

escribiendo en vez de [XX-74]

[XX-82] $$X(q, l) + iY(q, l) = F(q + il).$$

Entonces, para $l = 0$ debe ser $Y = 0$, por lo que de [XX-82] y [XX-79] deducimos

[XX-83] $$X(q, 0) = F(q) = 2f(q) \quad ,$$

es decir, *la representación conforme estará completamente determinada* mediante la función $F(q) = 2f(q)$, que da el modo de desarrollar sobre el eje X el meridiano principal. Es lógico que así ocurra, si se tienen en cuenta las condiciones que determinan una función analítica [XX-82].

Por ejemplo, supongamos que la abscisa de cada punto del eje X correspondiente a un punto de latitud φ deba ser igual a la variable q introducida en [XX-27] multiplicada por el radio ecuatorial a. Será por [XX-83], [XX-79] y [XX-80]

[XX-84] $$aq = 2f(q) = 2g(q) = F(q) \quad ,$$

es decir, la [XX-82] se convierte en

[XX-85] $$X + iY = a(q + il) \quad ,$$

y separando variables, se obtiene la representación conforme cilíndrica ecuatorial

[XX-86] $$X = aq \quad , \quad Y = al \quad ,$$

vista ya en [XX-38], salvo que allí figuran los ejes X, Y intercambiados y se cuenta la longitud a partir de Greenwich. Si además suponemos la Tierra esférica, dicha proyección [XX-86] es la de MERCATOR, como ya se vió en Nota II.

Supongamos ahora que el meridiano principal se *rectifique* sobre el eje X y se cuenten las abscisas a partir del ecuador positivamente hacia el N. La representación conforme, ya completamente determinada por estas condiciones, es la cilíndrica transversa de LAMBERT si se supone la Tierra esférica prescindiendo del achatamiento en los polos, o la de GAUSS-KRÜGER si se tiene en cuenta la excentricidad e_1 del elipsoide terrestre de revolución.

Para la Tierra esférica, la rectificación $a\varphi$ del meridiano principal da por [XX-83] y [XX-30] la función

[XX-87] $$X(q, 0) = F(q) = a\varphi = a(2 \operatorname{arc\,tg} e^q - \tfrac{1}{2}\pi) \quad ,$$

en que e es la base de los logaritmos neperianos. Pasando de [XX-83] a [XX-82], por [XX-87] estableceremos

[XX-88] $$X + iY = a(2 \operatorname{arc\,tg} e^{q+il} - \tfrac{1}{2}\pi) \quad ,$$

o bien, refiriéndola a la latitud

[XX-89] $$X + iY = a\left[2 \operatorname{arc\,tg} \left(e^{il} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) - \frac{1}{2}\pi \right].$$

Las funciones X, Y pueden separarse mediante las [XX-77] y [XX-78] utilizando [XX-83], [XX-79] y [XX-80], por lo que

[XX-90] $$\begin{cases} X = a(\operatorname{arc\,tg} e^{q+il} + \operatorname{arc\,tg} e^{q-il} - \tfrac{1}{2}\pi) \quad , \\ Y = \dfrac{a}{i}(\operatorname{arc\,tg} e^{q+il} - \operatorname{arc\,tg} e^{q-il}) \quad , \end{cases}$$

en que es fácil probar directamente por consideraciones sobre valores imaginario-conjugados que los segundos miembros son *reales*. Las ecuaciones [XX-90] no son otras que las [77-60] ya obtenidas para la proyección conforme cilíndrica transversa de LAMBERT. En efecto, de la primera de [XX-90] deducimos

[XX-91] $$\operatorname{tg}\frac{X}{a} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} e^{q+il} + \operatorname{arc\,tg} e^{q-il})} =$$
$$= \frac{e^{2q} - 1}{e^{q+il} + e^{q-il}} = \frac{e^q - e^{-q}}{2} \cdot \frac{2}{e^{il} + e^{-il}} = \operatorname{tg}\varphi \sec l \quad ,$$

por ser

[XX-92] $$e^q - e^{-q} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 2\operatorname{tg}\varphi.$$

La segunda de las [XX-90] se transforma fácilmente mediante las funciones hiperbólicas

[XX-93] $$\operatorname{sen} i\alpha = i \operatorname{sh}\alpha \quad , \quad \cos i\alpha = \operatorname{ch}\alpha \quad , \quad \operatorname{tg} i\alpha = i \operatorname{th}\alpha \quad ,$$

por lo que

[XX-94] $$\operatorname{tg}\left(i\frac{Y}{a} \right) = i \operatorname{th}\frac{Y}{a} = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} e^{q+il} - \operatorname{arc\,tg} e^{q-il}) =$$
$$= \frac{e^{2+il} - e^{q-il}}{1 + e^{2q}} = \frac{2i}{e^q + e^{-q}} \cdot \frac{e^{il} - e^{-il}}{2i} =$$
$$= \frac{2i \operatorname{sen} l}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

De ésta obtenemos

[XX-95] $$\operatorname{th}\frac{\mathrm{Y}}{a}=\frac{e^{2\mathrm{Y}/a}-1}{e^{2\mathrm{Y}/a}+1}=$$

$$=\frac{2\operatorname{sen} l}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}=\cos\varphi\operatorname{sen} l$$

de donde

[XX-96] $$e^{2\mathrm{Y}/a}=\frac{1+\cos\varphi\operatorname{sen} l}{1-\cos\varphi\operatorname{sen} l}$$

y tomando logaritmos neperianos llegamos a la segunda de las [77-60].

De modo análogo se podrían obtener las ecuaciones de las representaciones conformes que cumplan otras condiciones particulares.

IV. **Representación conforme de Gauss-Krüger. — La representación** de GAUSS-KRÜGER viene dada por la ecuación

[XX-97] $$\mathrm{X}+i\mathrm{Y}=\mathrm{F}(q+il),$$

la que para $l=0$ dará la función F de acuerdo con lo visto en [XX-83].

Según la segunda condición que determina la proyección y el valor M del radio de curvatura del meridiano elíptico visto en [77-15], se obtendrá por

[XX-98] $$\mathrm{X}(\varphi,0)=\mathrm{F}(q)=\int_0^{\varphi}\mathrm{M}\,d\varphi=$$

$$=a(1-e_1^2)\int_0^{\varphi}(1-e_1^2\operatorname{sen}\varphi)^{-3/2}\,d\varphi$$

es decir, rectificando el meridiano principal a partir del ecuador. La integral elíptica del último miembro puede calcularse con mucha exactitud mediante el desarrollo en serie binómica de su integrando

[XX-99] $$(1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-3/2}=1+\frac{3}{2}e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi+\frac{15}{8}e_1^4\operatorname{sen}^4\varphi+$$

$$+\frac{35}{16}e_1^6\operatorname{sen}^6\varphi+\mathrm{O}(e_1^8).$$

Si en [XX-99] sustituimos

[XX-100] $$\begin{cases}\operatorname{sen}^2\varphi=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\\ \operatorname{sen}^4\varphi=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi\\ \operatorname{sen}^6\varphi=\frac{5}{16}-\frac{15}{32}\cos 2\varphi+\frac{3}{16}\cos 4\varphi-\frac{1}{32}\cos 6\varphi\end{cases}$$

e integramos, se obtiene

[XX-101] $$\mathrm{X}(\varphi,0)=\alpha\varphi+\beta\operatorname{sen}2\varphi+\gamma\operatorname{sen}4\varphi+\delta\operatorname{sen}6\varphi+\mathrm{O}(e_1^8)$$

con

[XX-102] $$\begin{cases}\alpha=a(1-e_1^2)\left(1+\frac{3}{4}e_1^2+\frac{45}{64}e_1^4+\frac{175}{256}e_1^6+\mathrm{O}(e_1^8)\right)\\ \beta=\frac{1}{2}a(1-e_1^2)\left(-\frac{3}{4}e_1^2-\frac{15}{16}e_1^4-\frac{525}{512}e_1^6-\mathrm{O}(e_1^8)\right),\\ \gamma=\frac{1}{4}a(1-e_1^2)\left(\frac{15}{64}e_1^4+\frac{105}{256}e_1^6+\mathrm{O}(e_1^8)\right)\\ \delta=\frac{1}{6}a(1-e_1^2)\left(-\frac{35}{512}e_1^6-\mathrm{O}(e_1^8)\right).\end{cases}$$

Desarrollando [XX-97] por la fórmula de TAYLOR

[XX-103] $$\mathrm{F}(q+il)=\mathrm{F}(q)+il\mathrm{F}'(q)+\frac{i^2l^2}{2!}\mathrm{F}''(q)+\dots+$$

$$+\frac{i^7l^7}{7!}\mathrm{F}^{\mathrm{VII}}(q)+\mathrm{O}(l^8)$$

al separar partes real e imaginaria, queda:

[XX-104] $$\begin{cases}\mathrm{X}=\mathrm{F}(q)-\frac{1}{2}l^2\mathrm{F}''(q)+\\ \qquad+\frac{l^4}{24}\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(q)-\frac{l^6}{720}\mathrm{F}^{\mathrm{VI}}(q)+\mathrm{O}(l^8)\\ \mathrm{Y}=l\mathrm{F}'(q)-\frac{l^3}{6}\mathrm{F}'''(q)+\frac{l^5}{120}\mathrm{F}^{\mathrm{V}}(q)-\mathrm{O}(l^7).\end{cases}$$

De [XX-98], [XX-26] y [77-15] deducimos

[XX-105] $$\mathrm{F}'(q)=\frac{d\mathrm{F}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dq}=\mathrm{M}\frac{r}{\mathrm{M}}=\cos\varphi\,.\,\mathrm{N}.$$

Seguiremos derivando como función de función los segundos miembros, haciéndolo primero respecto de la variable φ y multiplicando luego por

[XX-106] $$\frac{d\varphi}{dq}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\cos\varphi=\frac{1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi}{1-e_1^2}\cos\varphi=(1+\eta^2)\cos\varphi,$$

en que el último miembro se deduce de la segunda excentricidad e' dada en [77-13], al introducir

[XX-107] $$\eta=e'\cos\varphi.$$

De [77-15] deducimos

[XX-108] $$\frac{d\mathrm{N}}{d\varphi}=a(1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-3/2}e_1^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=\frac{\mathrm{N}e_1^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{1-e_1^2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

y por tanto, la derivada logarítmica de [XX-105] será

[XX-109] $$\frac{\mathrm{F}''}{\mathrm{F}'}=\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{N}}{d\varphi}-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dq}=$$

$$=\frac{e_1^2\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi-\operatorname{sen}\varphi+e_1^2\operatorname{sen}^3\varphi}{1-e_1^2}=-\operatorname{sen}\varphi$$

es decir

[XX-110] $$\mathrm{F}''(q)=-\cos^2\varphi\,.\,\mathrm{N}t$$

si introducimos

[XX-111] $$t=\operatorname{tg}\varphi\quad,\quad 1/\cos^2\varphi=1+t^2.$$

Derivando respecto de q los miembros extremos de [XX-109] y teniendo en cuenta [XX-106] resulta

[XX-112] $$\frac{F'''}{F'} - \frac{F''^2}{F'^2} = - \cos^2\varphi\,(1 + \eta^2) \ ,$$

de la que por [XX-109], [XX-105] y [XX-111] deducimos:

[XX-113] $$F'''(q) = - \cos^3\varphi \,.\, N\,(1 - t^2 + \eta^2).$$

De ésta y la [XX-105] se obtiene

[XX-114] $$\frac{F'''}{F'} = - \cos^2\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2) = \\ = - \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi - e'^2\cos^4\varphi$$

y derivando ambos miembros respecto de q, recordando [XX-106], se obtiene

[XX-115] $$\frac{F^{IV}}{F'} - \frac{F''F'''}{F'^2} = \\ = (4\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + 4e'^2\cos^3\varphi\operatorname{sen}\varphi)\,(1 + \eta^2)\cos\varphi \ ,$$

es decir, por [XX-109], [XX-114] y [XX-107] será

[XX-116] $$\frac{F^{IV}}{F'} = \operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2) + \\ + (4 + 4\eta^2)\,(1 + \eta^2)\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi \ ,$$

y al aplicar [XX-105] y [XX-111] resulta

[XX-117] $$F^{IV}(q) = \cos^4\varphi \,.\, Nt\,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4).$$

De [XX-117] y [XX-110] deducimos

[XX-118] $$\frac{F^{IV}}{F''} = - \cos^2\varphi\,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) = \\ = - 5\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi - 9e'^2\cos^4\varphi - 4e'^4\cos^6\varphi.$$

Si derivamos ambos miembros respecto de q y tenemos en cuenta [XX-106] se obtiene

[XX-119] $$\frac{F^{V}}{F''} = \frac{F^{IV}F'''}{F''^2} + (10\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \\ + 36e'^2\cos^3\varphi\operatorname{sen}\varphi + 24e'^4\cos^5\varphi\operatorname{sen}\varphi)\,.\,(1 + \eta^2)\cos\varphi.$$

Teniendo en cuenta [XX-118], [XX-113], [XX-110], [XX-107] y [XX-111], de la anterior se deduce

[XX-120] $$\frac{F^{V}}{F''} = \frac{- \cos^2\varphi\,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)\cos^3\varphi \,.\, N\,(1 - t^2 + \eta^2)}{\cos^2\varphi \,.\, Nt} + \\ + (12 + 36\eta^2 + 24\eta^4)\,(1 + \eta^2)\,t \,.\cos^3\varphi \ ,$$

de la que por [XX-110] resulta

[XX-121] $$F^{V}(q) = \cos^5\varphi \,.\, N\,(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + \\ + 13\eta^4 - 64t^2\eta^4 + 4\eta^6 - 24t^2\eta^6).$$

De [XX-121] y [XX-105] con [XX-111] y [XX-107] se deduce

[XX-122] $$\frac{F^{V}(q)}{F'(q)} = \cos^4\varphi\,(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + 13\eta^4 - \\ - 64t^2\eta^4 + 4\eta^6 - 24t^2\eta^6) = 1 - 20\cos^2\varphi + (24 - 58e'^2)\cos^4\varphi + \\ + (72e'^2 - 64e'^4)\cos^6\varphi + (77e'^4 - 24e'^6)\cos^8\varphi + 28e'^6\cos^{10}\varphi.$$

Derivando ambos miembros respecto de q y teniendo en cuenta [XX-106] se obtiene

[XX-123] $$\frac{F^{VI}}{F'} = \frac{F^{V}F''}{F'^2} + [40\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \\ - (96 - 232e'^2)\cos^3\varphi\operatorname{sen}\varphi - (432e'^2 - 384e'^4)\cos^5\varphi\operatorname{sen}\varphi - \\ - (616e'^4 - 192e'^6)\cos^7\varphi\operatorname{sen}\varphi - 280e'^6\cos^9\varphi\operatorname{sen}\varphi]\,(1 + \eta^2)\cos\varphi.$$

De ésta, al aplicar [XX-105], [XX-122], [XX-109], [XX-107] y [XX-111] se deduce:

[XX-124] $$\frac{F^{VI}}{N\cos\varphi} = - \operatorname{sen}\varphi\cos^4\varphi\,(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + \\ + 13\eta^4 - 64t^2\eta^4 + 4\eta^6 - 24t^2\eta^6) + \operatorname{sen}\varphi\cos^4\varphi\,(1 + \eta^2)\,(40 + 40t^2 - 96 + \\ + 232\eta^2 + 232t^2\eta^2 - 432\eta^2 + 384\eta^4 + 384t^2\eta^4 - 616\eta^4 + 192\eta^6 + \\ + 192t^2\eta^6 - 280\eta^6).$$

De la [XX-124] y [XX-111] resulta

[XX-125] $$F^{VI}(q) = - \cos^6\varphi \,.\, Nt\,(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2 + \\ + 445\eta^4 - 680t^2\eta^4 + 44\eta^6 - 600t^2\eta^6 + 88\eta^8 - 192t^2\eta^8).$$

Si para el punto de latitud φ situado sobre el meridiano principal, se expresa su abscisa contada desde el polo Sur mediante S, para lo que se sumará al segundo miembro de la primera de [XX-104] un cuarto de meridiano, de manera que

[XX-126] $$S = F(q) + \text{Cuarto de meridiano},$$

la aplicación de [XX-105], [XX-110], [XX-113], [XX-117], [XX-121] y [XX-125] a [XX-104] nos dará las coordenadas de los puntos de la carta con las ordenadas contadas a partir del meridiano principal del huso en cuestión:

[XX-127] $$\begin{cases} X = S + \dfrac{l^2\cos^2\varphi \,.\, Nt}{2} + \dfrac{l^4\cos^4\varphi \,.\, Nt}{24}\,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\ \quad + \dfrac{l^6\cos^6\varphi \,.\, Nt}{720}\,(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2 + \\ \quad + 445\eta^4 - 680t^2\eta^4 + 44\eta^6 - 600t^2\eta^6 + 88\eta^8 - 192t^2\eta^8) + \\ \quad + O(l^8). \\ Y = l\cos\varphi \,.\, N + \dfrac{l^3\cos^3\varphi \,.\, N}{6}\,(1 - t^2 + \eta^2) + \\ \quad + \dfrac{l^5\cos^5\varphi \,.\, N}{120}\,(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + \\ \quad + 13\eta^4 - 64t^2\eta^4 + 4\eta^6 - 24t^2\eta^6) + O(l^7). \end{cases}$$

Si en [XX-127] hacemos $e_1 = e' = \eta = 0$ obtenemos las coordenadas de la proyección cilíndrica transversa de LAMBERT para la esfera, en que $N = a$ (§ 77, ejercicio 2).

La dilatación lineal m la calcularemos mediante [XX-14], al tener en cuenta las [XX-127] y [77-15]. Así se obtiene, al despreciar términos de orden superior a η^2 y l^4:

[XX-128] $$m = k = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N\,.\cos\varphi}\left[\left(l\cos^2\varphi \,.\, Nt + \right.\right. \\ \left. + \frac{l^3\cos^4\varphi \,.\, Nt}{6}\,(5 - t^2 + 9\eta^2) + O(l^5)\right)^2 + \left(\cos\varphi \,.\, N + \right. \\ + \frac{l^2\cos^3\varphi \,.\, N}{2}\,(1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^4\cos^5\varphi \,.\, N}{24}\,(5 - 18t^2 + \\ \left.\left. + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) + O(l^6)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \left[1 + l^2\cos^2\varphi\,(1 + \eta^2) + l^4\cos^4\varphi \,.\, \frac{2 - t^2 + 5\eta^2 - 7t^2\eta^2}{3} + O(l^6)\right]^{1/2}$$

y desarrollando en serie binómica resulta

[XX-129] $$m = 1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{2} (1 + \eta^2) + \frac{l^4 \cos^4 \varphi}{24} (5 - 4t^2 + 14\eta^2 - 28t^2\eta^2) + O(l^6).$$

Esta dilatación lineal coincide con la de LAMBERT (§ 77, ejercicio 3) para excentricidad nula $e_1 = e' = \eta = 0$.

Si queremos calcularla en función de la ordenada Y, de la segunda de [XX-127] deducimos

[XX-130] $$\frac{Y}{N} = l \cos \varphi + \frac{l^3 \cos^3 \varphi}{6} (1 - t^2 + \eta^2) + O(l^5) ,$$

y elevando sucesivamente al cuadrado

[XX-131] $$\frac{Y^2}{N^2} = l^2 \cos^2 \varphi + \frac{l^4 \cos^4 \varphi}{3} (1 - t^2 + \eta^2) + O(l^6)$$

[XX-132] $$Y^4/N^4 = l^4 \cos^4 \varphi + O(l^6).$$

Combinando adecuadamente [XX-132] y [XX-131] para sustituir en [XX-129], resulta

[XX-133] $$m = 1 + \frac{Y^2}{2N^2} (1 + \eta^2) + \frac{Y^4}{24N^4} (1 + 6\eta^2 - 24t^2\eta^2) + O\left(\frac{Y^6}{N^6}\right).$$

Esta dilatación lineal, coincide con la de LAMBERT para el caso de la esfera en que $e_1 = e' = \eta = 0$ y $N = a$, (§ 77, ejercicio 4).

Para obtener la convergencia del meridiano definida en § 77, ejercicio 5, en la que $l = l_0$ constante, será más cómodo referirse al paralelo $\varphi = \varphi_0$ que pase por el punto que se considere y que en la carta continúa siendo ortogonal al meridiano, pues entonces se deduce fácilmente de las [XX-127] la pendiente

[XX-134] $$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} : \frac{\partial X}{\partial \varphi} = \frac{\partial X}{\partial l} : \frac{\partial Y}{\partial l} = \Big[l \cos \varphi . t + \frac{l^3 \cos^3 \varphi . t}{6} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \frac{l^5 \cos^5 \varphi . t}{120} (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2 + 445\eta^4 - 680t^2\eta^4 + 44\eta^6 - 600t^2\eta^6 + 88\eta^8 - 192t^2\eta^8) + O(l^7) \Big] : \Big[1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{2} (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^4 \cos^4 \varphi}{24} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + 13\eta^4 - 64t^2\eta^4 + 4\eta^6 - 24t^2\eta^6) + O(l^6) \Big] =$$
$$= l \cos \varphi . t a_1 + l^3 \cos^3 \varphi . t a_3 + l^5 \cos^5 \varphi . t a_5 + O(l^7) ,$$

en que los coeficientes indeterminados a_1, a_3, a_5 se calculan fácilmente. resultando finalmente

[XX-135] $$\operatorname{tg} \gamma = l \cos \varphi . t + \frac{l^3 \cos^3 \varphi . t}{3} (1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{2l^5 \cos^5 \varphi . t}{15} \left(1 + 2t^2 + t^4 + \frac{15}{2} \eta^2 + \frac{35}{2} \eta^4 - 20t^2\eta^4 + \frac{3}{2} \eta^6 - 30t^2\eta^6 + \frac{11}{2} \eta^8 - 12t^2\eta^8 \right) + O(l^7).$$

Esta convergencia del meridiano coincide con la de LAMBERT (§ 77, ejercicio 5) para el caso esférico $e_1 = e' = \eta = 0$.

Las fórmulas [XX-127], [XX-129] y [XX-135] han sido preparadas para el cálculo con máquina y tabuladas en la publicación técnica número 9 del Instituto Geográfico Militar: *Coordenadas planas rectangulares* GAUSS-KRÜGER. *Nuevas fórmulas y tablas para cálculo con máquina* (Buenos Aires, 1946).

V. Bibliografía. — 1. Los tratados generales de Análisis matemático (citados en Cap. XVIII, nota III, 2), en particular los franceses, suelen dedicar extensos capítulos a la Geometría diferencial. Son por ejemplo, notables los de GOURSAT, VALLÉE POUSSIN y en forma vectorial, las exposiciones de VALIRON y SEVERI (citados en Cap. VI, nota VI-2, 4 y 5).

2. Los textos de cálculo y análisis vectorial y tensorial (citados en Cap. XVII, nota V-1, 2 y 5) tratan preferentemente la aplicación del tema a la Geometría diferencial. El citado de BIEBERBACH es una breve y excelente introducción de rico contenido.

Existe también como curso didáctico excelente para ingenieros el de G. JUVET: *Leçons d'Analyse vectorielle*: 1re. Partie: *Géométrie différentielle des courbes et des surfaces. Théorie mathématique des champs* (reimpr. 1945); 2e. Partie: *Applications de l'Analyse vectorielle. Introduction à la Physique mathématique* (1935; Rouge, Lausanne).

3. Exposición parcial, dedicada sobre todo a las teorías de contacto y envolventes, seguidas del estudio de curvas y superficies es:

G. JULIA: *Éléments de Géométrie infinitésimale* (Gauthier-Villars, París; 2ª ed., 1936).

Más extensas y modernamente concebidas son

W. C. GRAUSTEIN: *Differential Geometry* (Macmillan, Nueva York, 1947).

D. J. STRUIK: *Lectures on classical Differential Geometry* (Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1950); traducción española: *Geometría diferencial clásica* (Aguilar, Madrid, 1955);

L. P. EISENHART: *An Introduction to Differential Geometry* (Univ. Princeton, 1940);

G. JULIA: *Cours de Géométrie infinitésimale* (2ª ed., en fascículos, Gauthier-Villars, París, 1953-1955).

Moderna y excelente obra, incluyendo la diferenciación exterior, es

E. VIDAL ABASCAL: *Introducción a la Geometría diferencial* (Dossat, Madrid, 1956).

Amplio uso de métodos vectoriales y tensoriales en la presentación de material clásico, se hace en:

V. HLAVATY: *Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensor-Rechnung* (Noordhoff, Groningen).

4. La obra fundamental que responde al estado actual de la Geometría, tratando en el primer volumen la teoría métrica de curvas y superficies, en el segundo la Geometría afín y en el tercero las Geometrías especiales, es la de

W. BLASCHKE: *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (3 vols., Springer, Berlín, 4ª ed., 1945; 1923; 1929).

Un tratamiento más breve del primer volumen de la obra anterior, debido a la introducción del método de CARTAN y a la omisión de algunos tópicos, está en

W. BLASCHKE: *Einführung in die Differentialgeometrie* (Springer, Berlín, 2ª ed., 1960).

Tomadas en estos libros, están las conferencias en castellano:

W. BLASCHKE: *Geometría diferencial moderna* (Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", Madrid, 1950).

Obras clásicas de consulta son

G. DARBOUX: *Leçons sur la théorie générale de surfaces*; vol. I: *Généralités. Coordenades curvilignes. Surfaces minima*; vol. II: *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces*; vol. III: *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces*; vol. IV: *Déformation infiniment petite et représentation sphérique* (2ª ed., Gauthier-Villars, 1925),
y la primera en introducir el cálculo diferencial absoluto:
L. BIANCHI: *Lezioni di geometria differenziale* (2ª ed., 2 vols., Spoerri, Pisa, 1902-3).
Sobre este método, aparte las ya citadas en Cap. XVII, nota V, 5, está la extensa obra:
J. A. SCHOUTEN y D. J. STRUIK: *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* (2 vols., Noordhoff, Groningen, 1938), así como el valioso libro:
J. A. SCHOUTEN: RICCI-*calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications* (Springer, Berlín, 2ª ed., 1954).
Un método directo original contiene el segundo volumen de la obra de BOULIGAND (citada en Cap. XVII, nota V, 2), y con nuevos resultados siguiendo el camino trazado por éste y MENGER, los fascículos de:
C. PAUC: *Les méthodes directes en Calcul des variations et en Géométrie différentielle* (Actualités Scient. et Ind., nos. 885-6, Hermann, París, 1941).

5. Sobre la Geometría de RIEMANN existen importantes libros, tales como:
C. E. WEATHERBURN: *An introduction to Riemannian Geometry and the tensor calculus* (Univ. Cambridge, 1938),
L. P. EISENHART: *Riemannian Geometry* (Univ. Princeton, 2ª ed., 1949),
E. CARTAN: *Leçons sur la Géométrie des espaces de* RIEMANN (Gauthier-Villars, París; 2ª ed., 1951).
Un didáctico y moderno tratado de temas superiores de Geometría diferencial es
G. VRANCEANU: *Leçons de Géométrie différentielle*. Vol. I: *Congruences. Formes de* PFAFF. *Groupes continus. Invariants et équivalence. Espaces à connexion affine. Espaces de* RIEMANN. *Espaces à connexion projective* (Bucarest, 1947).
El mejor libro sobre la generalización de los espacios de RIEMANN, con una investigación sistemática del papel que juega la diferenciación en la fundamentación de la teoría y la introducción de una clase de problemas naturales (la mayoría no resueltos en n dimensiones) como guía para desarrollos futuros es:
H. BUSEMANN: *Metric methods in* FINSLER *spaces and the foundations of Geometry* (Annals of Math. St. nº 8, Univ. Princeton, 1942).
El libro anterior trata con métodos modernos las fecundas ideas que originó en su tesis:
P. FINSLER: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (Göttingen, 1918; reimpresa con bibliografía adicional por H. SCHUBERT, Birkhäuser, Basilea, 1951).

6. La obra clásica de Geometría diferencial proyectiva es
G. FUBINI y E. CECH: *Geometria proiettiva differentiale* (2 vols., Zanichelli, Bolonia, 1936).
Contiene métodos y resultados nuevos, con bibliografía a partir de la anterior, la obra:
G. BOL: *Projektive Differentialgeometrie*. I Teil. (Vandenhoeck y Ruprecht, Göttingen, 1950).
Otras importantes obras, la segunda continuación de la primera, son:
E. P. LANE: *Projective differential Geometry of curves and surfaces* (1932); *A treatise on projective differential Geometry* (1942; Univ. Chicago, Ill.).

7. Sobre representación de superficies y su aplicación a la cartografía terrestre, es admirable y fundamental la clásica obra:
M. A. TISSOT: *Mémoire sur la répresentation des surfaces* (París, 1881).
Excelente folleto de divulgación es
F. AGUILAR: *Nociones sobre proyecciones cartográficas* (*Lecciones de Geodesia*, 3ª parte, C. Est. Ing.; Ser. A, nº 3, La Plata, 1941; reimpr. Asoc. Prof. Fac. Ciencias Fisicomat., 1954).
Una síntesis didáctica extraída de la obra de TISSOT y de publicaciones técnicas del Instituto Geográfico Militar de la Argentina es:
P. PI CALLEJA: *La proyección conforme cilíndrica transversa de* LAMBERT *como introducción a las coordenadas de* GAUSS-KRÜGER (Centro Est. de Ing., San Juan, 1946).
En general, los tratados de Geodesia contienen exposiciones más o menos extensas sobre la cuestión. Una obra monográfica moderna con los preliminares matemáticos necesarios para la formulación de las relaciones características de las transformaciones generales discutidas, con introducción de coordenadas vectoriales generales complejas para el esferoide que permitan la aplicación de los métodos funcionales de variable compleja, es:
R. KÖNIG y K. H. WEISE: *Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie*. Erster Band: *Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen* (Springer, Berlín, 1951).
Puede considerarse como un resumen de la anterior la obra:
P. D. THOMAS: *Conformal projections in geodesy and cartography* (U. S. Dep. of Commerce, Coast and Geodetic Survey, Publ. nº 251, Wáshington, 1952).

8. El estudio de la Geometría reglada, aparte los capítulos anteriores en las obras generales de Geometría diferencial antes citadas, puede iniciarse en:
L. WEISS: *Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik* (Teubner Leitfäden, Leipzig, 1935).
R. SAUER: *Projektive Liniengeometrie* (Göschen, Leipzig, 1937).
Es clásica la obra más extensa
G. KOENIGS: *La Géométrie réglée et ses applications* (Gauthier-Villars, París, 1895),
modernamente continuada y profundizada en
A. CHARRUEAU: *Complexes linéaires. Faisceaux de complexes linéaires. Suites et cycles de complexes linéaires conjugués* (Mém. Sci. Math. nº 120, Gauthier-Villars, París, 1952).
Mediante el uso de coordenadas plückerianas, transporta el estudio de las multiplicidades regladas al de la geometría diferencial de una cuádrica de 4 dimensiones en un espacio proyectivo de 5 dimensiones, la extensa obra
V. HLAVATY: *Differentielle Liniengeometrie* (1945; trad. inglesa: *Differential linie geometry*, 1953; Noordhoff, Groningen).



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
BIBLIOTECA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO XXI

INTEGRALES GENERALIZADAS. SERIES E INTEGRALES MÚLTIPLES

§ 78. INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

1. Definición como límite en un conjunto dirigido. — En Geometría analítica se aprecia la ventaja de introducir sistemas de abscisas distintos del cartesiano. Si x es la abscisa cartesiana, o sea la distancia al origen O, tomemos como abscisa cualquier función *creciente* $g(x)$ y veamos cómo se modifica el concepto de integral de RIEMANN al adoptar estas abscisas generales.

Dividiendo el intervalo $[a, b]$ por puntos intermedios $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ los incrementos de abscisas son $\delta_r = g(x_r) - g(x_{r-1}) \geqslant 0$ y formadas (cfr. § 48-2 y 3) las sumas

$$s = \Sigma m_r \delta_r \quad , \quad S = \Sigma M_r \delta_r \quad ,$$

es $s \leqslant S$. Como las demostraciones dadas en § 48 son generales para todo sistema de abscisas, resulta para la suma s' formada con cualquier partición π', que $s' \leqslant S''$, cualquiera que sea la partición π''.

Si las clases s y S son contiguas, el número frontera se llama (según STIELTJES) *integral de* $f(x)$ *respecto de la métrica* $g(x)$ y se designa con la misma notación

$$(g) \int_a^b f(x)\,dx$$

anotando a la izquierda la métrica adoptada; o más claramente así:

$$[78\text{-}1] \qquad \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Como las s crecen al subdividir y las S decrecen, unas y otras llegan a diferir del número frontera menos de ε desde una partición en adelante, y lo mismo toda suma intermedia, resulta

$$[78\text{-}2] \qquad \int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\pi} \Sigma\, \eta_r\, \delta_r\,, \quad \text{con} \quad m_r \leqslant \eta_r \leqslant M_r \,,$$

donde el límite se toma según el conjunto dirigido de las particiones π (nota 1) pudiendo tomarse en particular $\eta_r = f(\xi_r)$, si es ξ_r un punto cualquiera del intervalo (x_{r-1}, x_r).

Si las clases s y S no son contiguas, resultan como extremos la integral *inferior* y la *superior*.

NOTAS: 1. En [78-2] hemos utilizado el concepto de *límite según el conjunto dirigido de particiones* (§ 2-7, nota 2, y § 48-3, *a*).

La integral de STIELTJES es ejemplo de la fecundidad de los llamados límites dirigidos o generales. Consideremos en general un conjunto de números reales $\{u_\alpha\}$ (tal el de sumas inferiores s) en correspondencia con sus índices α (no necesariamente números), índices ordenados según un criterio de dirección (§ 2-7, nota 2) (tal las particiones dirigidas según el criterio de subdivisión (§ 48-3) y a cada una de las cuales corresponde una suma inferior s).

Entonces, la definición de límite de una sucesión (§ 20-1) puede generalizarse al conjunto $\{u_\alpha\}$ dirigido según índices, así:

DEF. 1. *El conjunto dirigido u_α tiene límite l si a todo número positivo ε corresponde un índice α_0 tal que para todo índice $\alpha[\geqslant]\alpha_0$ se cumpla $|u_\alpha - l| < \varepsilon$.*

Respecto de la existencia del límite l vamos a demostrar el teorema análogo al criterio general de convergencia de BOLZANO-CAUCHY (§ 20-6), es decir:

TEOR. 1. *Condición necesaria y suficiente para la existencia del límite de un conjunto dirigido $\{u_\alpha\}$ es que a todo número positivo ε corresponda un índice α_0 tal que para todo par de índices $\alpha'[\geqslant]\alpha_0$, $\alpha''[\geqslant]\alpha_0$ se cumpla $|u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| < \varepsilon$.*

En efecto, la condición es *necesaria*, porque si existe límite l, según la definición 1 sea α_0 el índice correspondiente a $\varepsilon/2$. Entonces, para cualquier par $\alpha'[\geqslant]\alpha_0$, $\alpha''[\geqslant]\alpha_0$ será

$$|u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| \leqslant |u_{\alpha'} - l| + |l - u_{\alpha''}| < \varepsilon.$$

La condición es también *suficiente*, pues de la misma se deduce por el absurdo que es

$$0 \leqslant \underset{\alpha[\geqslant]\alpha_0}{\text{extr sup}}\, u_\alpha - \underset{\alpha[\geqslant]\alpha_0}{\text{extr inf}}\, u_\alpha \leqslant \varepsilon\,,$$

de donde sigue la igualdad

$$\underset{\alpha_0}{\text{extr inf}}\,(\underset{\alpha[\geqslant]\alpha_0}{\text{extr sup}}\, u_\alpha) = \underset{\alpha_0}{\text{extr sup}}\,(\underset{\alpha[\geqslant]\alpha_0}{\text{extr inf}}\, u_\alpha).$$

Este último valor común l es el límite que cumple la definición 1, pues por ser igual al primer miembro, existe un índice α_1, tal que para todo $\alpha[\geqslant]\alpha_1$, es $u_\alpha < l + \varepsilon$, y por ser igual al segundo miembro, existe otro índice α_2 tal que para todo $\alpha[\geqslant]\alpha_2$ es $u_\alpha > l - \varepsilon$. Un índice α_0 que sea a la vez $\alpha_0[\geqslant]\alpha_1$, $\alpha_0[\geqslant]\alpha_2$ verifica la definición 1.

Un conjunto dirigido $\{u_\alpha\}$ puede ser *monótono* según sus índices. Así definiremos:

DEF. 2. *El conjunto dirigido $\{u_\alpha\}$ se llama creciente (decreciente) si la condición $\alpha'[\geqslant]\alpha''$ implica*

$$u_{\alpha'} \geqslant u_{\alpha''} \qquad (u_{\alpha'} \leqslant u_{\alpha''}).$$

Por ejemplo, las sumas inferiores s forman un conjunto creciente y las sumas superiores S un conjunto decreciente, ambos dirigidos según las particiones ordenadas por el criterio de subdivisión (§ 48-3).

Entonces, demostremos (cfr. § 20-4):

TEOR. 2. *Todo conjunto dirigido creciente $\{u_\alpha\}$ tiene límite finito o infinito (§ 20-1) coincidente con el extremo superior (§ 23-14) de los números u_α.*

En efecto, si dicho extremo superior es l (*infinito*), respecto de todo número $l - \varepsilon < l$ ($H < +\infty$) existe algún índice α_0 tal que

$$l \geqslant u_{\alpha_0} > l - \varepsilon \quad (u_{\alpha_0} > H)$$

y para $\alpha[\geqslant]\alpha_0$, por monotonía, será también

$$l \geqslant u_\alpha > l - \varepsilon \quad (u_\alpha > H)\,,$$

cumpliéndose la definición 1.

Teorema análogo se cumple para todo conjunto dirigido decreciente con extremo inferior en lugar de extremo superior.

Estos teoremas demuestran rigurosamente la igualdad [78-2].

2. Acabamos de ver que la existencia de la integral implica la convergencia, hacia un mismo límite, de las sumas [78-2] para $\pi \to \infty$, es decir, con error $< \varepsilon$, desde una partición en adelante, pero caben tipos especiales de partición, con norma $h \to 0$, que no dan sumas convergentes hacia el valor de la integral. He aquí un ejemplo, muy sencillo (fig. 265):

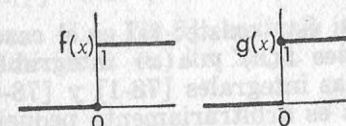


Fig. 265

$$f(x) = \begin{cases} = 0 & \text{si es} \quad x \leqslant 0 \\ = 1 & \text{,, ,,} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} = 0 & \text{,, ,,} \quad x < 0 \\ = 1 & \text{,, ,,} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

En las particiones que *no* tengan el origen como punto de división, es $s_\pi = 0$ y $S_\pi = 1$, por pequeña que sea la norma. Sin embargo, eligiendo O como punto de división es $s = 0$, $S = 0$, luego existe la integral y vale $I = 0$.

Salta, pues, a la vista la ventaja del método de las *clases* y el del límite según las *particiones* π, sobre el método de la *igualdad* de límites ordinarios para las diversas sucesiones y sobre el método del límite según la norma (ver ejercicios).

En algunos textos (por ejemplo HOBSON, citado en Cap. IX, nota VIII, 3) la integral definida según [78-2] suele llamarse integral *generalizada* de RIEMANN-STIELTJES. Caso particular de ésta es la integral *restringida* de RIEMANN-STIELTJES (sólo considerada en muchos textos clásicos, por ejemplo LEBESGUE, citado en Cap. XIII, nota V, 3), definida cuando existe límite *según la norma* y que expresaremos así:

$$[78\text{-}3] \qquad (\text{R-St}) \int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{h \to 0} \Sigma \eta_r \delta_r\,.$$

2. Relación con la integral de Riemann.

— Entiéndase bien que en la notación [78-1] significa $dg(x) = \Delta g(x)$, esto es, *incremento* y no diferencial, pues la función $g(x)$ puede no ser diferenciable ni siquiera *continua* y, por tanto, esta notación es más general que la de LEIBNIZ. Este nuevo concepto

coincide con el clásico de integral (R) cuando $g(x)$ tiene derivada integrable (R).

En efecto, si es $g'(x) = \alpha(x)$, es (§ 35-1):

$$[78\text{-}4] \qquad g(x_r) - g(x_{r-1}) = \alpha(\xi_r)\Delta x \quad ,$$

y las sumas:

$$[78\text{-}5] \qquad \Sigma f(\xi_r)[g(x_r) - g(x_{r-1})] = \Sigma f(\xi_r)\alpha(\xi_r)\Delta x \quad ,$$

que están comprendidas entre s y S, llegan a diferir de [78-1] menos de ε, desde una partición π'; pero esas mismas sumas, desde una partición π posterior a π', llegan a diferir menos de ε de la integral de RIEMANN:

$$[78\text{-}6] \qquad \int_a^b f(x)\alpha(x)\,dx$$

si ésta existe: tal es el caso cuando se suponen ambas funciones $f(x)$ y $\alpha(x)$ integrables (R) (§ 49, ejercicio 2); luego las integrales [78-1] y [78-6] difieren en menos de 2ε, y como ε es arbitrariamente pequeño, deben ser iguales.

Más general: aunque $g(x)$ no sea derivable, si es *integral indefinida* de una función $\alpha(x)$ (continua o discontinua), es decir:

$$[78\text{-}7] \qquad g(x) = \int_a^x \alpha(x)\,dx \quad ,$$

subsiste [78-4] sustituyendo $\alpha(\xi_r)$ por un valor μ_r comprendido entre los extremos m_r y M_r de $\alpha(x)$ en el intervalo parcial; y al multiplicar por $f(\xi_r)$ se obtiene una suma intermedia entre las s y S que conducen a la integral [78-6] si es $f(\xi_r) \geqslant 0$, y por tanto, la integral (St) coincide con la [78-6] si ambas existen. Cualquier caso se reduce al $f(x) \geqslant 0$, por la propiedad aditiva, expresando f como diferencia de dos funciones no negativas: $f = |f| - [|f| - f]$.

En particular, si $\alpha(x)$ es continua, es $g'(x) = \alpha(x)$ y recaemos en el caso anterior.

La integral de tipo (St) es, pues, una generalización de la (R); y es legítimo usar la notación [78-1].

NOTAS: 1. No basta que $f(x)$ sea integrable (R), ni aun continua, y $g(x)$ derivable, para que exista [78-6]. Por ejemplo, si se toma $f(x) \equiv 1$ y como $g(x)$ la función de VOLTERRA (Cap. XIII, nota IV), que tiene derivada acotada no integrable (R), entonces no existe la integral [78-6], mientras que existe la integral de STIELTJES:

$$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a) \quad ,$$

donde $g(x)$ es de variación acotada (§ 78-6), según se comprueba al aplicar [78-4] (cfr. § 55-9, nota 1).

2. Se puede considerar a $g(x)$ como medida de una masa repartida en el intervalo (a, b) y entonces $\Delta g(x)$ será la masa en $[x_{r-1}, x_r]$. Si $g(x)$ es continua, la masa de cada punto es nula;pero cabe que existan masas puntuales aisladas, y si σ es la masa del punto x_0, la función $g(x)$ recibe un incremento o *salto* σ al pasar de la izquierda a la derecha de x_0.

Por esta interpretación, en que reside la importancia de la integral de STIELTJES en Física, se llama $g(x)$ *función de repartición* (o *de distribución*); y cuando existe $\alpha(x)$, ésta es la *densidad* (*lineal*).

3. **Condiciones de integrabilidad.** — Son las mismas ya estudiadas en la integral (R), consecuencias inmediatas del criterio general:

Condición necesaria y suficiente para la existencia de la integral [78-1] *es que para cada* $\varepsilon > 0$ *exista una partición tal que sea*

$$[78\text{-}8] \qquad \Sigma\omega_r[g(x_r) - g(x_{r-1})] < \varepsilon \quad ,$$

donde como siempre es $\omega_r = M_r - m_r$. La [78-8] equivale a poner que el límite según las particiones es $\lim_{\pi} \Sigma\omega_r\,\delta_r = 0$ (§ 78-1, nota 1, definición 1).

En cambio para la existencia de [78-1] no es necesario (cfr. ejemplo § 78-1, nota 2) que sea nulo el límite según la norma

$$[78\text{-}9] \qquad \lim_{h \to 0} \Sigma\, \omega_r\delta_r = 0;$$

dicha condición [78-9] es necesaria y suficiente para la existencia de la integral restringida [78-3]. Ésta permite formular la condición análoga a la de LEBESGUE (Cap. XIII, nota III, *c*). Diremos que un conjunto de puntos es *de medida* (g) *nula* si puede encerrarse en un número finito o *infinito-numerable* de intervalos abiertos de medida δ_r, tales que $\Sigma\delta_r < \varepsilon$. Entonces, la misma demostración del Cap. XIII, nota III, prueba que *para la existencia de la integral restringida* [78-3] *de* RIEMANN-STIELTJES, *es condición necesaria y suficiente que el conjunto de puntos de discontinuidad de* $f(x)$ *sea de medida* (g) *nula*. Pero *esta condición no es necesaria para la existencia de la integral* (*generalizada*) [78-1] de RIEMANN-STIELTJES. Así, en el ejemplo de la nota 2 del § 78-1, aunque $f(x)$ tenga un solo punto de discontinuidad, éste no es de medida (g) nula.

En particular, se obtienen los dos casos capitales, suficientes de integrabilidad, para [78-1]:

I. $f(x)$ *continua*. Siendo $\omega_r < \omega$ desde una partición, es:

$$S - s = \Sigma\,\omega_r\,\delta_r < \omega\,\Sigma\,\delta_r = \omega[g(b) - g(a)] < \varepsilon \quad ,$$

eligiendo ω suficientemente pequeño; luego existe la integral [78-1] de STIELTJES, aunque $g(x)$ sea *discontinua*, si es *monótona*.

II. $f(x)$ *monótona*. Suponiéndola, por ejemplo, creciente, es:

$$S - s = \Sigma\,\omega_r\,\delta_r < h\,\Sigma\,\omega_r = h[f(b) - f(a)]$$

si son todos los $\delta_r < h$, o sea $g(x_r) - g(x_{r-1}) < h$; y esto se verifica desde una partición en adelante si $g(x)$ es *continua*.

En § 78-6 generalizaremos estos dos tipos para funciones de variación acotada.

NOTA. Ambos casos: I, $f(x)$ continua y $g(x)$ monótona, y II, $f(x)$ monótona y $g(x)$ continua, son suficientes para la existencia de la integral restringida [78-3], pues los razonamientos subsisten para una norma $h \to 0$ en adelante (§ 49-1).

4. **Propiedades fundamentales.** — Basta repasar § 48-5 (que ya fué desarrollado con miras a esta generalización) para ver que subsisten sin modificación las propiedades siguientes con sólo interpretar ahora $\delta_r = g(x_r) - g(x_{r-1})$.

a) Teorema del valor medio:

$$[78\text{-}10] \quad \int_a^b f(x)\,dg(x) = \mu[g(b) - g(a)] \quad , \quad (m < \mu < M)$$

siendo m y M los extremos de $f(x)$ en (a, b)

b) Permutación de extremos:

$$[78\text{-}11] \quad \int_b^a f(x)\,dg(x) = -\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

$$[78\text{-}12] \quad \int_a^a f(x)\,dg(x) = 0.$$

c) Aditividad respecto del intervalo:

$$[78\text{-}13] \quad \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \quad , \quad \int_a^c + \int_c^b + \int_b^a = 0.$$

NOTA 1. En conexión con la 1ª [78-13] observemos que para la integral *restringida* (R-St) (§ 78-1, nota 2), la existencia de las dos integrales del 2º miembro no implica la del 1º. Por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ 0 , & (1 < x \leqslant 2) \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0 , & (0 \leqslant x < 1) \\ 1 , & (1 \leqslant x \leqslant 2) \end{cases} \quad ,$$

se tiene

$$(\text{R-St}) \int_0^1 f(x)\,dg(x) = 1 \quad , \quad (\text{R-St}) \int_1^2 f(x)\,dg(x) = 0 \quad ,$$

pero

$$(\text{R-St}) \int_0^2 f(x)\,dg(x)$$

no existe.

d) Linealidad respecto del integrando:

$$[78\text{-}14] \quad \int_a^b kf(x)\,dg(x) = k\int_a^b f(x)\,dg(x) \quad ;$$

$$[78\text{-}15] \quad \int_a^b \left[\sum_1^p f_n(x) \right] dg(x) = \sum_1^p \int_a^b f_n(x)\,dg(x).$$

e) Linealidad respecto de la distribución $g(x)$:

$$[78\text{-}16] \quad \int_a^b f(x)\,d\left[kg(x) \right] = k\int_a^b f(x)\,dg(x) \quad ;$$

$$[78\text{-}17] \quad \int_a^b f(x)\,d\left[\sum_1^p g_n(x) \right] = \sum_1^p \int_a^b f(x)\,dg_n(x).$$

f) Propiedades de monotonía. — Para $g(x)$ creciente la integral de una función $\geqslant 0$ es $\geqslant 0$; resulta entonces de *d)* por sustracción:

$$[78\text{-}18] \quad \text{Si} \quad f(x) \leqslant \varphi(x) \quad , \int_a^b f(x)\,dg(x) \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dg(x) \quad ,$$
$$[g(x) \text{ crec.}].$$

De aquí resulta, observando que $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dg(x) \leqslant \int_a^b f(x)\,dg(x) \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dg(x) \quad ,$$
$$[g(x) \text{ crec.}] \quad ,$$

o sea (cfr. [48-29]):

$$[78\text{-}19] \quad \left| \int_a^b f(x)\,dg(x) \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dg(x) \quad , \quad [g(x) \text{ crec.}].$$

También resulta de *a)*, o bien de [78-18], por ser $|f(x)| \leqslant \leqslant \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, que

$$[78\text{-}20] \quad \int_a^b |f(x)|\,dg(x) \leqslant \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \,.\, [g(b) - g(a)] \quad ,$$
$$[g(x) \text{ crec.}].$$

g) Continuidad de la función integral:

$$[78\text{-}21] \quad F(x) = \int_a^x f(x)\,dg(x).$$

Su incremento, según [78-13] y [78-10], puede expresarse así:

$$[78\text{-}22] \quad F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dg(x) =$$
$$= \mu[g(x+h) - g(x)] \quad ,$$

siendo $m \leqslant \mu \leqslant M$ si $g(x)$ es *creciente*; si además es *continua*, este incremento es arbitrariamente pequeño tomando h suficientemente pequeño; luego $F(x)$ es *continua* si lo es $g(x)$, y $f(x)$ es acotada. En cambio, es importante hacer notar que la función integral de STIELTJES es *discontinua* en los puntos donde $f(x)$ es continua y no nula, si en ellos es $g(x)$ discontinua.

NOTA 2. El cociente $\Delta F/h$ tiene límite para $h \to 0$, si existe $g'(x)$ y $f(x)$ es continua; pero este caso especial, que da $F'(x) = f(x)g'(x)$ ha sido tratado en § 78-2.

5. **Distribución discontinua de 1ª especie.** — Consideremos el caso más sencillo, con salto σ en ξ:

$$g(x) = \eta \quad \text{para} \quad x \leqslant \xi \ ,$$
$$g(x) = \eta + \sigma \quad \text{para} \quad x > \xi \ .$$

Cualesquiera que sean los puntos x_r de partición, el salto se presenta en un solo intervalo y en él es $\Delta g = \sigma$, mientras en los restantes es $\Delta g = 0$, luego las sumas por defecto y por exceso son $s = m_r\sigma$, $S = M_r\sigma$, y si $f(x)$ es continua tienden m_r y M_r hacia $f(\xi)$; por tanto, existe la integral, y vale:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sigma f(\xi).$$

En general, si son varios los puntos ξ_r de discontinuidad de la función escalonada $g(x)$ con saltos σ_r, en número finito, resulta análogamente:

$$[78\text{-}23] \quad \int_a^b f(x)\,dg(x) = \sigma_1 f(\xi_1) + \sigma_2 f(\xi_2) + \ldots + \sigma_n f(\xi_n).$$

La integral de STIELTJES permite, pues, expresar sumas finitas; y cuando estudiemos intervalos infinitos veremos que funde en un solo algoritmo las series y las integrales convergentes (§ 80).

6. **Funciones $f(x)$ ó $g(x)$ de variación acotada.** — *a*) Aunque hemos supuesto $g(x)$ creciente, la descomposición de JORDAN (§ 55-9, *d*) permite generalizar la integral (St) al caso en que $g(x)$ sea de *variación acotada*, es decir, *diferencia de dos funciones crecientes*: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$, pues basta definir:

$$[78\text{-}24] \quad \int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg_1(x) - \int_a^b f(x)\,dg_2(x) \ ,$$

o bien llegar a ella partiendo de las sumas [78-2], que se descomponen en diferencias de dos, cuyos límites son estas integrales, si existen. Tal sucede, por ejemplo (criterio I), si $f(x)$ es *continua*; pero cabe también, como en la integral (R), que exista la integral (St) de función $f(x)$ muy discontinua.

Escribiendo las fórmulas [78-10] a [78-17] para g_1 y para g_2, y, restando las de cada par, quedan generalizadas las propiedades del § 78-4 para distribuciones g de variación acotada.

También el tipo II ($f(x)$ monótona y $g(x)$ *continua*) admite análoga generalización, expresando $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, como diferencia de funciones crecientes, si es de variación acotada.

Resumen: Los dos tipos fundamentales de existencia de la integral (St) son éstos: $f(x)$ *continua* y $g(x)$ *de variación acotada*, o viceversa. Como de uno se pasa al otro mediante integración por partes, como veremos en § 79-1, ambos son equivalentes, y tienen todas las propiedades *a*)-*f*) demostradas en § 78-4 como inmediata generalización de la integral de RIEMANN.

b) En cambio, las propiedades de monotonía (§ 78-4, *f*), que exigían $g(x)$ creciente, se generalizan así:

TEOR. 1. *Llamando* $V(x)$ *a la variación total* (§ 55-9, *a*) *de* $g(t)$ *en* $[a, x]$: $V(x) = V_a^x g(t)$ es:

$$[78\text{-}25] \quad \left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dV(x) \leqslant \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\text{Máx}} |f(x)|.V(b).$$

En efecto, si $P(x)$ y $N(x)$ son las variaciones positiva y negativa de $g(t)$ en $[a, x]$, de $g(x) = g(a) + P(x) - N(x)$, resulta por § 78-4, *e* y la definicación [78-24]

$$[78\text{-}26] \quad \int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dP(x) - \int_a^b f(x)\,dN(x) \ ,$$

de donde, por [78-19] y [78-17] con $P(x) + N(x) = V(x)$:

$$\left|\int_a^b f dg\right| \leqslant \left|\int_a^b f dP\right| + \left|\int_a^b f dN\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dP + \int_a^b |f|\,dN = \int_a^b |f|\,dV.$$

La segunda parte de [78-25] resulta de [78-20], pues
$$V(a) = V_a^a g(t) = 0.$$

NOTA. La 1ª desigualdad [78-25] suele escribirse, con otra notación para su 2º miembro, así:

$$[78\text{-}27] \quad \left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|.|dg(x)|.$$

Aplicando [78-27] a cada intervalo de una partición cualquiera de $[a, x]$ y sumando las desigualdades se demuestra:

TEOR. 2. *Si* $f(x)$ *es continua y* $g(x)$ *de variación acotada en* $[a, b]$, *entonces*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dg(t)$$

es también de variación acotada en $[a, b]$ *y*

$$V_F(x) \equiv V_a^x F(t) \leqslant \int_a^x |f(t)|\,|dg(t)|.$$

c) En muchas cuestiones es de interés investigar hasta qué punto las definiciones de $f(x)$ y de $g(x)$ pueden modificarse sin alterar el carácter y valor de

$$\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

TEOR. 3. *Si* $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$, $g(x)$ *de variación acotada en* $[a, b]$ *y toma un valor constante* k *en un conjunto* C *que incluye* a *y* b *y es denso en* $[a, b]$, *es*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = 0.$$

Por tanto, si $g_1(x)$ *y* $g_2(x)$, *de variación acotada, difieren en una constante* k *en el conjunto* C, *es*

$$[78\text{-}28] \qquad \int_a^b f(x)\,dg_1(x) = \int_a^b f(x)\,dg_2(x).$$

DEM. Basta aplicar la definición de integral restringida (R-St) (que existe § 78-3, nota), usando particiones con puntos de C.

Como consecuencia del teor. 3, el valor de la integral no cambia al modificar $g(x)$ en un conjunto numerable, con tal que siga siendo de variación acotada.

TEOR. 4. *Si es* $g(x)$ *creciente en* $[a, b]$, *y estrictamente creciente en* $n+1$, *puntos por lo menos, y* $f(x) \geqslant 0$ *es continua y tiene a lo más* n *ceros en* (a, b) *es*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) > 0.$$

DEM. Existe al menos un punto x_0 donde $g(x)$ es estrictamente creciente y $f(x)$ no se anula. Entonces existe un entorno E de x_0 [semientorno si $x_0 = a$ ó $x_0 = b$], de extremos α, β, tal que

$$m_E = \min_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x) > 0 \ , \ \Delta g(x) = g(\beta) - g(\alpha) > 0 \ , \ y$$

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) > \int_\alpha^\beta f(x)\,dg(x) > m_E \,.\, \Delta g(x) > 0.$$

DEF. Llamaremos *normalizada de una función de variación acotada* $g(x)$ *en un intervalo* $[a, b]$, a la función $g^*(x)$ definida *así*:

$$g^*(a) = 0 \ ; \ g^*(x) = \tfrac{1}{2}[g(x+0) + g(x-0)] - g(a) \ ;$$
$$(a < x < b) \ ; \ g^*(b) = g(b) - g(a).$$

La normalización de una distribución $g(x)$ no altera el valor de la integral de una función *continua*, pues por teor. 3 se tiene

$$\int_a^b f(x)\,d[g(x) - g(a) - g^*(x)] = 0$$

y entonces:

TEOR. 5. *Si* $f(x)$ *es continua*, $g(x)$ *de variación acotada en* $[a, b]$ *y* $g^*(x)$ *su función normalizada, es*:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg^*(x).$$

7. Nota sobre las funcionales lineales continuas. — **El área del** trapezoide determinado por $f(t)$ sobre (a, b) es un número que depende de la función f, como también la longitud del arco, los momentos de uno y otra, etc.; tales variables dependientes de una función, se llaman *funcionales*. El área varía muy poco si f se incrementa muy poco *, y se llama funcional *continua*, como lo son los momentos de la masa $f(t)$, el volumen engendrado al girar la curva alrededor del eje de abscisas, etc.; en cambio, es *discontinua* la longitud del arco (no se confunda con Cap. XV, nota I, *c*), como salta a la vista en el ejemplo 3 de § 55-1, multiplicando la función por el coeficiente k; pues, por pequeño que sea k, la longitud es infinita; o bien en la familia $x = (\mathrm{sen}\, n\pi t) : n$; pues el arco sobre $(0, 1)$ tiene longitud mayor que su proyección vertical igual a 2 para todo n.

Si la funcional $\Phi[f]$ está definida en el campo de las funciones continuas en $(0, 1)$, y de las discontinuas de 1ª especie, sus valores para las funciones $\alpha(t) = 1$ para $0 < t < x$, $\alpha(t) = 0$ para $x < t \leqslant 1$ dependen del número x; es decir, forman una función $g(x)$.

Si para cada partición finita por puntos x_r llamamos f_r a la función $\alpha_r(t)$ que corresponde al punto x_r, la función $f_{r+1} - f_r$, es la escalonada elemental o función característica del intervalo (x_r, x_{r+1}), en el cual toma el valor 1, siendo nula fuera de él. Si la funcional es *lineal*, su valor para esa función será:

$$\Phi[f_{r+1} - f_r] = \Phi[f_{r+1}] - \Phi[f_r] = g(x_{r+1}) - g(x_r) \ ;$$

y por la linealidad supuesta, el valor de Φ para cada escalonada que aproxima a la función continua $f(x)$, será: $\Sigma f(\xi_r)[g(x_{r+1}) - g(x_r)]$. Si además es Φ *continua*, el valor que toma para la función $f(x)$ será el límite de estos valores, es decir: la integral [78-1]. Tal es, pues, la expresión de *todas las funcionales lineales y continuas* (Teorema de F. RIESZ). La demostración está más minuciosamente desarrollada en los libros de Ríos (Cap. XXII, nota IV, 2), PERRON (Cap. V, nota IV, 4), LEBESGUE (Cap. XIII, nota V, 3), BANACH (Cap. XVIII, nota III, 3).

EJERCICIOS

1. Comprobar que, aun siendo $g(x)$ creciente, puede haber sucesiones convergentes de sumas $\Sigma f(x_r)\Delta g(x_r)$ al tender a 0 la norma, sin existir

$$\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

* En el sentido de la convergencia uniforme, es decir $|f_1(t) - f(t)| < t$ para todo t.

Utilizar, por ejemplo, las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}, \quad g(x) = 0, \quad \text{si es} \quad x \leqslant 0,$$
$$f(0) = 1 \qquad g(x) = 1, \quad ,, \quad x > 0.$$

2. En el ejemplo anterior (integral inexistente), fórmense sucesiones de sumas s y S convergentes hacia 0, hacia 1 y, en general, hacia cualquier número prefijado entre -1 y $+1$.

3. Si sobre un segmento (a, b) hay una carga continua y cargas aisladas, la carga total en (a, x) es una función discontinua $g(x)$. Demostrar que el momento con respecto al punto 0 es la integral

$$\int_a^b f(x)\, dg(x),$$

poniendo $f(x) = x^n$.

4. Calcular $F(1 \pm 0)$ para

$$F(x) = \int_1^x e^t\, d(t + [t]),$$

donde $[t]$ = parte entera de t.

5. Calcular

$$\int_{-1}^{+1} x\, d|x|.$$

6. Calcular

$$\int_0^5 (x^2 + 1)\, d[x].$$

§ 79. INTEGRACIÓN POR PARTES Y SEGUNDO TEOREMA DEL VALOR MEDIO

1. Integración por partes. *a*) El significado geométrico de la integración por partes

$$[79\text{-}1] \qquad \int_a^b y\, .\, dx = \Big[\, Bb - Aa \,\Big] - \int_A^B x\, .\, dy$$

es inmediato cuando y es función continua y estrictamente creciente de x, en cuyo caso es x función continua y estrictamente creciente de y: *la suma de los dos trapezoides es igual a la diferencia de los dos rectángulos* Bb *y* Aa (fig. 266).

Aun dentro de este caso tan sencillo la segunda integral

$$\int_a^b x\, .\, dy(x)$$

carece de significado si se adopta, como de costumbre, la variable independiente x, salvo el caso en que la función $y(x)$ tenga derivada integrable (R), y esta condición muy restrictiva priva al Análisis clásico del fecundo recurso de la integración por partes en cuanto se omite esa condición que es artificiosa y completamente ajena al concepto de área.

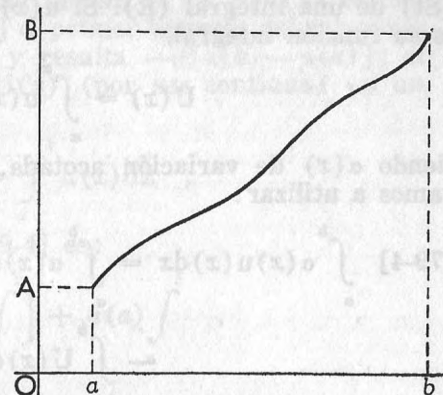


Fig. 266

b) Es obvio que la sencilla relación geométrica arriba indicada es independiente de que la curva tenga o no tangentes. Tan grave inconveniente de la teoría riemanniana de la integral queda subsanado muy sencillamente con el concepto de STIELTJES sin necesidad de presuponer la teoría desarrollada en § 78 *.

Llamando por brevedad $f_r = f(x_r)$, $g_r = g(x_r)$ y sumando las dos sumas:

$$F_n = f_1(g_1 - g_0) + f_2(g_2 - g_1) + \ldots + f_n\ (g_n - g_{n-1}),$$
$$G_n = g_0(f_1 - f_0) + g_1(f_2 - f_1) + \ldots + g_{n-1}(f_n - f_{n-1}),$$

que conducen a las integrales

$$\int f\, .\, dg, \quad \int g\, .\, df,$$

sale simplificando

$$[79\text{-}2] \quad F_n + G_n = f_n g_n - f_0 g_0 = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

luego pasando al límite resulta:

$$[79\text{-}3] \qquad \int_a^b f(x)\, .\, dg(x) + \int_a^b g(x)\, .\, df(x) = $$
$$= f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

que es la misma fórmula básica de integración por partes generalizada para integrales (St).

En [79-3] se presupone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones de variación acotada y que ambas integrales (St) existen.

He aquí un caso importante en que se utiliza la expresión

* La hemos desarrollado, sin embargo, con más extensión de lo necesario, por su importancia en muchas cuestiones de Análisis y de Física.

(St) de una integral (R). Si $u(x)$ es integrable (R) y $U(x)$ es su función integral,

$$U(x) = \int_a^x u(x)dx ,$$

siendo $\alpha(x)$ de variación acotada, resulta esta fórmula, que vamos a utilizar:

$$[79\text{-}4] \quad \int_a^b \alpha(x)u(x)dx = \int_a^b \alpha(x)dU(x) = \alpha(b)U(b) - \int_a^b U(x)d\alpha(x).$$

NOTA. Para deducir [79-3] hemos presupuesto la existencia de ambas integrales; pero la relación [79-2] muestra que la existencia de una implica la de la otra, estando ligadas por la sencilla relación [79-3].

Sin necesidad del artificio usado en § 78-6, queda así demostrada la equivalencia de los dos tipos fundamentales de integral (St), en que una de las funciones es *continua* y la otra de *variación acotada.*

c) *Lema de* ABEL. — Aunque no lo vamos a utilizar (pues preferimos su equivalente, llamado 2º teorema del valor medio, que ahora demostraremos), he aquí una de las aplicaciones de la integración por partes (St) en Cálculo elemental, para demostrar la proposición correlativa del lema de ABEL (§ 22-4, c) en las integrales de RIEMANN:

Si la función integral de función real

$$\int_a^x u(x)dx$$

está acotada entre los números fijos m y M para $a \leqslant x \leqslant b$, y el integrando se multiplica por la función positiva decreciente $\alpha(x)$, se verifica:

$$[79\text{-}5] \qquad \alpha(a)m \leqslant \int_a^b \alpha(x)u(x)dx \leqslant \alpha(a)M.$$

Efectuando la integración por partes [79-4], análoga a la sumación por partes que hicimos en [22-55], por ser decreciente y positiva $\alpha(x)$, son positivos los coeficientes $\alpha(b)$ y $-d\alpha(x)$; y, por la ley de monotonía, el valor del binomio aumenta si se sustituyen $U(x)$ y $U(b)$ por su cota superior M, mientras que decrecen si se sustituyen por la cota inferior m; luego la integral del primer miembro está comprendida entre las cotas:

$$\alpha(b)m + m[\alpha(a) - \alpha(b)] = \alpha(a)m ,$$
$$\alpha(b)M + M[\alpha(a) - \alpha(b)] = \alpha(a)M ,$$

quedando así probada la acotación [79-5], cuya demostración mediante integrales de RIEMANN sería mucho más complicada, pues $\alpha(x)$ puede carecer de diferencial, y lo mismo $U(x)$, si $u(x)$ es discontinua.

2. **Segundo teorema del valor medio.** — *a*) Si $\alpha(x)$ es monótona *, es aplicable en [79-4] el primer teorema del valor medio a la integral sustraendo, y resulta $-\mu[\alpha(b) - \alpha(a)]$; el valor intermedio μ lo toma $U(x)$ (por ser continua) en un punto intermedio ξ:

$$\mu = U(\xi) = \int_a^\xi u(x)dx ,$$

luego el tercer miembro de [79-4] es:

$$\alpha(b)\left[\int_a^b - \int_a^\xi\right] + \alpha(a)\int_a^\xi ,$$

y simplificando, resulta:

$$[79\text{-}6] \quad \int_a^b \alpha(x)u(x)dx = \alpha(a)\int_a^\xi u(x)dx + \alpha(b)\int_\xi^b u(x)dx$$

[$u(x)$ integrable; $\alpha(x)$ monótona *].

Vemos, pues, que este *segundo teorema del valor medio*, es el mismo primero, aplicado a la integral transformada por partes.

Se puede dar a la fórmula anterior apariencia de mayor generalidad designando por A y B dos cotas de $\alpha(x)$ en el intervalo, es decir, dos números cualesquiera tales que $A \leqslant \alpha(x) \leqslant B$, si $\alpha(x)$ es creciente; o bien, $A \geqslant \alpha(x) \geqslant B$ si es decreciente. Como la función $\alpha(x)$ conserva su monotonía al disminuir su mínimo y aumentar su máximo, cambiando en los extremos el valor $\alpha(x)$ por A y el $\alpha(b)$ por B, resulta esta fórmula, que suele preferirse:

$$[79\text{-}7] \quad \int_a^b \alpha(x)u(x)dx = A\int_a^\xi u(x)dx + B\int_\xi^b u(x)dx$$

[$u(x)$ integrable; $\alpha(x)$ monótona * de cotas A, B].

Al elegir los números A y B varía también el número ξ.

CASOS PARTICULARES:

1º Si $\alpha(x)$ es decreciente positiva, puede adoptarse $\alpha(b) = 0$ sin modificar las integrales, y en [79-6] desaparece el segundo término. Obsérvese que esta fórmula coincide con el lema de ABEL, cuya demostración puede omitirse, por tanto **.

* Y aún de variación acotada.

** El lema de ABEL y el segundo teorema del valor medio pueden usarse indistintamente para deducciones posteriores. El lema de ABEL, que, por ser correlativo del análogo de las series (mientras el teorema del valor medio no), será quizás preferido por algún lector.

2º Si $\alpha(x)$ es creciente positiva, se puede tomar $\alpha(a) = 0$ y desaparece el primer término.

b) Aunque la función integrable $\alpha(x)$ no sea monótona *, si está acotada y son A y B sus cotas en $[a, b]$, se verifica la fórmula [79-7] (o su equivalente [79-6]) cuando $u(x)$ tiene *signo constante* en todo el intervalo.

En efecto, formemos la función continua:

$$\int_a^b \alpha(x)\,u(x)\,dx - A\int_a^x u(x)\,dx - B\int_x^b u(x)\,dx \quad ,$$

que para $x = a$ y para $x = b$, toma los valores:

$$\int_a^b u(x)\,[\alpha(x) - B]\,dx \quad , \quad \int_a^b u(x)\,[\alpha(x) - A]\,dx \quad ,$$

cuyos signos son opuestos; luego existe algún punto intermedio en que se anula esta diferencia; y, por tanto, se verifica la igualdad [79-7], siendo indiferente permutar las dos cotas A y B.

Como se ve, éste es un caso trivial análogo al expresado por la primera fórmula del valor medio y la fórmula [79-7] o su equivalente [79-6] vale con las mismas hipótesis que aquélla; a veces puede convenir, sin embargo, adoptar la forma [79-7] en lugar de la dada por el primer teorema de § 48-6, *c*, que expresa:

$$\int_a^b \alpha(x)\,u(x)\,dx = \mu\int_a^b u(x)\,dx$$

$$(A \leqslant \mu \leqslant B, \quad \text{o bien} \quad A \geqslant \mu \geqslant B)$$

[$u(x)$ integrable de signo constante; $\alpha(x)$ acotada entre A y B].

NOTAS: 1. *Demostración directa del segundo teorema del valor medio.* Sin necesidad de utilizar la teoría de integral de STIELTJES, puede obtenerse la propiedad del § 79-2, correlativa del lema de ABEL (§ 22-4, *c*), por paso al límite de éste, y luego al lema de ABEL para integrales se le puede dar la forma equivalente constituída por el segundo teorema del valor medio.

La función continua $U(x) = \int_a^x u(x)\,dx$ tiene en $a \leqslant x \leqslant b$ extremos inferior m y superior M tales que para $\varepsilon > 0$ arbitrario, corresponde una norma h de una partición todas cuyas sumas parciales a partir de a cumplan

$$m - \varepsilon \leqslant \sum_{r=1}^{p} u(x_r)\,.\,\delta_r \leqslant M + \varepsilon \quad , \quad (p = 1, 2, \ldots, n) \quad ,$$

supuesto dividido $[a, b]$ en n subintervalos parciales.

* Ni de variación acotada.

Si $\alpha(x)$ es *decreciente positiva*, al cumplir

$$\alpha(a) \geqslant \alpha(x_1) \geqslant \alpha(x_2) \geqslant \ldots \geqslant \alpha(x_n) \geqslant 0$$

basta aplicar el primitivo lema de ABEL (§ 22-4, *c*) para obtener:

$$(m - \varepsilon)\,\alpha(a) \leqslant \sum_{r=1}^{n} u(x_r)\,\alpha(x_r)\,\delta_r \leqslant (M + \varepsilon)\,\alpha(a).$$

Para $\varepsilon \to 0$, $h \to 0$, resulta [79-5]. Por ser continua la función $U(x)$, todo valor comprendido entre su máximo M y su mínimo m es alcanzado en algún punto ξ del intervalo $[a, b]$, deduciéndose de [79-5] el caso particular 1º del segundo teorema del valor medio:

$$[79\text{-}8] \qquad \int_a^b \alpha(x)\,u(x)\,dx = \alpha(a)\int_a^\xi u(x)\,dx \quad , \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

[$u(x)$ integrable; $\alpha(x)$ positiva decreciente].

El caso general [79-7] se deduce también de [79-8], porque si $\alpha(x)$ monótona es creciente, será $B - \alpha(x) \geqslant 0$ decreciente y por [79-8] es

$$\int_a^b u(x)\,[B - \alpha(x)]\,dx = [B - \alpha(a)]\int_a^\xi u(x)\,dx \quad ;$$

asignando el valor A a la función $\alpha(x)$ en $x = a$, queda así obtenida [79-7]. Si $\alpha(x)$ monótona es decreciente, será $\alpha(x) - B \geqslant 0$ decreciente y por [79-8] es

$$\int_a^b u(x)\,[\alpha(x) - B]\,dx = [\alpha(a) - B]\int_a^\xi u(x)\,dx \quad ,$$

que es la misma [79-7], haciendo como antes $\alpha(a) = A$.

2. *Interpretaciones gráficas.* La figura 267 da la interpretación gráfica de la forma restringida [79-8].

La fig. 268 da la interpretación gráfica * de la forma [79-6].

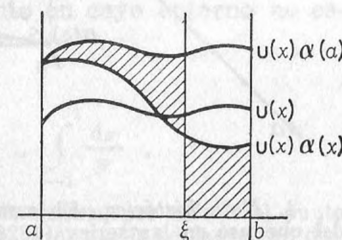


Fig. 267. — Las áreas rayadas se compensan.

Los prismas

$$A'A_1H_1C_1C'H'A' \quad y \quad B'B_1H_2C_1C'H''B'$$

se compensan.

$$\begin{cases} \alpha(a)\displaystyle\int_a^\xi u(x)\,dx = \text{Vol. } aAA'A_1H_1H'H'\xi a. \\ \alpha(b)\displaystyle\int_\xi^b u(x)\,dx = \text{Vol. } bBB'B_1H_2H''H''\xi b. \\ \displaystyle\int_a^b \alpha(x)\,u(x)\,dx = \text{Vol. } aAA'A_1C_1B_1B'Bba. \end{cases}$$

* Debida a G. FERRARI-POZZOLO, Bull. Un. Mat. Ital., *15*, pág. 12-14, 1936.

3. *Generalización* (St) *del lema de* ABEL *y del segundo teorema del valor medio.* Con levísimos cambios de escritura quedan generalizados para integrales (St) en esta forma

$$[79\text{-}9] \qquad \alpha(a)m \leqslant \int_a^b \alpha(x)\,dU(x) \leqslant \alpha(b)M$$

[$\alpha(x)$ positiva decreciente; $U(x)$ de variación acotada; $m < U(x) < M$].

$$[79\text{-}10] \qquad \int_a^b \alpha(x)\,dU(x) = [\alpha(b)U(b) - \alpha(a)U(a)] +$$

$$+ [\alpha(a) - \alpha(b)]U(\xi) = [B\,.\,U(b) - A\,.\,U(a)] + (A - B)U(\xi).$$

[$\alpha(x)$ monótona acotada; $U(x)$ continua de variación acotada].

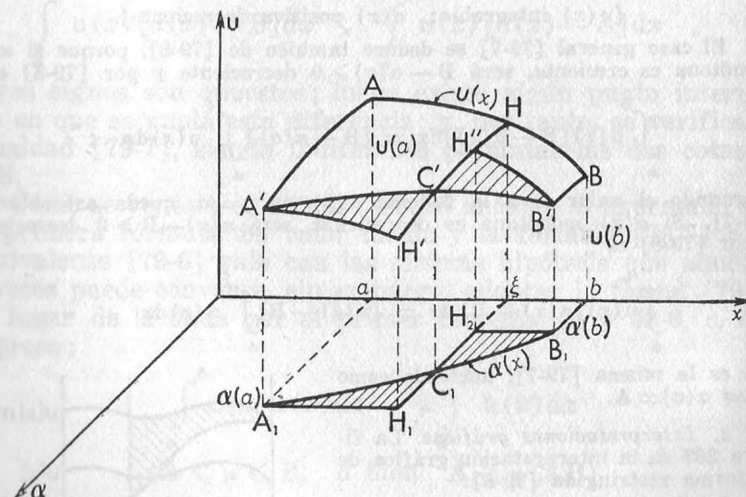


Fig. 268

4. *Nota histórica.* El lema [79-5] no es de ABEL, pero es correlativo del que usó en las series (1826).

El segundo teorema de la media es de BONNET (1849) en su forma restringida [79-8] y de WEIERSTRASS y DU BOIS REYMOND (1875) en su forma general [79-7].

Por no disponer del sencillo recurso de la integración por partes (que exige la noción de integral de STIELTJES) necesitan VALLÉE POUSSIN, BROMWICH, PRINGSHEIM, y otros, laboriosas deducciones del segundo teorema del valor medio, y HARDY se ve obligado a reducir considerablemente el alcance del teorema exigiendo que $\alpha(x)$ tenga derivada, lo que ya es mucho, y además que ésta sea *continua.*

EJERCICIOS

1. Resolver el ejercicio 5 de § 78 mediante previa integración por partes.

2. Lo mismo respecto del ejercicio 6 de § 78.

3. ¿Cuál es la hipótesis restrictiva que debe cumplir $\alpha(x)$ monótona para poder aplicar el mismo razonamiento que lleva a [79-6], sin utilizar el concepto de integral de STIELTJES?

4. Demostrar que

$$\left| \int_p^q \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \right| < \frac{2}{p}\,, \quad \text{si} \quad q > p > 0.$$

§ 80. INTEGRALES SIMPLES IMPROPIAS

1. **Definiciones. Integral (R-C) para extremo singular único.** — Las integrales impropias definidas en un intervalo infinito, $\int_a^\infty u(x)\,dx$, son análogas a las series $\sum_a^\infty u_r$, con la única diferencia esencial de ser *necesaria* para la convergencia de la serie la condición $u_r \to 0$, mientras que para las integrales sólo puede decirse que "en caso de existir límite" de $u(x)$ para $x \to \infty$, este límite es nulo; pero cabe la convergencia no existiendo límite del integrando y aun teniendo éste oscilación *infinita,* para $x \to \infty$. (Ejemplo en § 80-2, Nota).

Otra novedad se presenta en la teoría de las integrales respecto de las series. Como la definición (R) de la integral en $[a, b]$ exige la *acotación* de $u(x)$ en él, es preciso extender el concepto de integral al caso en que existan en $[a, b]$ puntos *singulares.* Llamamos así a todo punto en cuyo entorno no está acotada la función.

EJEMPLOS: 1.

$$\int_0^\pi \operatorname{tg} x\,dx\,, \qquad \int_0^1 \ln x\,dx\,, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}\,,$$

carecen de sentido según la definición de RIEMANN, por existir el punto de infinitud $x = \pi/2$ de la primera función, y el $x = 0$ de las otras dos.

2. Tampoco tienen sentido

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\frac{dx}{x}\,, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}\,,$$

(singular, $x = 0$) (singulares, $x = 1/n$).

En estos casos, como en los anteriores, no está definida la función en los puntos singulares, ni interesa el valor que en ellos se le asigne.

En el ejemplo 1 el integrando tiene el límite infinito en uno de los extremos a, b o en un punto interior; y en el ejemplo 2 carece de límite.

Obsérvese que en el segundo caso del ejemplo 2 hay infinitos puntos singulares y quedará, por tanto, incluído en la teoría más general que esbozaremos después.

Como el extremo inferior a se transforma en el superior mediante el cambio de variable $-x$, supondremos casi siempre que sea b el punto singular, siendo $f(x)$ acotada e integrable en cada intervalo parcial $[a, b-\delta]$.

Para dar unidad a los teoremas llamaremos también *singular* al punto impropio $+\infty$ o bien $-\infty$, cuando el intervalo tenga algunos de estos extremos, cualquiera que sea la función. Dentro del caso que estamos estudiando, en que hay punto singular *único*, quedan incluídas las integrales en intervalo infinito, cuando $f(x)$ es acotada e integrable en cada intervalo finito $[a, b]$.

DEF. 1. Puntos *singulares* de una integral son los extremos $\pm\infty$ y todo punto en cuyo entorno no esté acotado el integrando $f(x)$.

Diremos que el extremo b es *singular único* (sea finito o infinito) si $f(x)$ es integrable en todo intervalo parcial de $[a, b)$ que excluya al punto b; y definiremos la integral (R-C) según RIEMANN, con este artificio de CAUCHY:

$$\int_a^b = \lim_{x \uparrow b} \int_a^x f(x)\,dx \quad , \qquad \int_a^b = \lim_{x \downarrow a} \int_x^b f(x)\,dx$$

(si es singular único $b \leqslant +\infty$) (si es singular único $a \geqslant -\infty$)

Si existe este límite finito, la integral se llama *convergente*; si tiene límite infinito, *divergente*; y si no tiene límite, finito ni infinito, *oscilante*.

NOTAS: 1. En la teoría clásica de la convergencia carece de significado numérico toda integral divergente u oscilante. Decir que *existe* una integral expresa que es una integral *propia* según la definición dada en § 49-1, o es convergente según Def. 1 (o según definiciones más generales que daremos en § 80-9), en cuyo caso suele llamarse *impropia*.

2. Nótese que toda integral sobre intervalo infinito puede reducirse a otra de intervalo finito cambiando $x = 1/t$, pero a costa de introducir la infinitud en el origen, por causa del factor $1/t^2$. También cabe hacer desaparecer la infinitud de $f(x)$ en a, adoptando como variable t un factor $g(x)$ del integrando, que es infinito en a; pero, en lugar del extremo $x = a$, aparecerá el $t = g(a)$, que es infinito. Resulta, pues, la equivalencia de ambos tipos de singularidad, que cabe transformar, pero no eludir en general. No así en particular, según sea el integrando. Tal $\int_1^{+\infty} x^{-3}\,dx$ que por el cambio $x = 1/t$ se transforma en la integral propia $\int_0^1 t\,dt$.

2. Criterio general de convergencia. — Puesto que la integral en $[a, b]$, cuando es singular uno de sus extremos, está definida como límite funcional y lo mismo la integral en intervalo infinito (a, ∞), son aplicables las propiedades generales de los límites, demostradas en § 24.

La más importante es el criterio de convergencia de BOLZANO-CAUCHY, que conduce a estos dos resultados:

TEOR. 1. *La condición necesaria y suficiente para la convergencia de la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$, *con un extremo singular único (finito o infinito), es que para cada número* $\varepsilon > 0$ *se verifique*:

$$[80\text{-}1] \qquad \left| \int_p^q f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

para todo par de puntos p, q *de un cierto semientorno del extremo singular.*

NOTA. Como hemos dicho en § 80-1, cabe la convergencia aún no existiendo límite de $f(x)$ para $x \to b$; basta, por ejemplo, formar la gráfica (fig. 269) adosando arbitrariamente sobre el eje x triángulos isósceles no rampantes de bases $1, 1/2^2, 1/3^2, \ldots, 1/n^2, \ldots$ y alturas 1. 2, 3, ..., $n, \ldots$, colocándolos alternativamente encima y debajo del eje.

Si las bases ocupan intervalo finito (por ejemplo, si son adyacentes), resulta un extremo superior finito y, en caso contrario, el punto singular es $+\infty$, pero en ambos casos converge la integral.

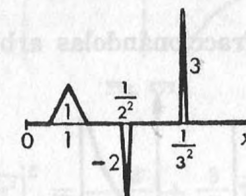


Fig. 269

Lo análogo al término general de la serie es la integral [80-1], la cual tiende a 0 como condición de convergencia; *necesaria* si la amplitud de (p, q) es fija por ejemplo $q - p = 1$, como en las series); *suficiente* si la amplitud es arbitraria, como también es suficiente para las series (§ 22-1, g).

3. Otras singularidades. Regla generalizada de Barrow. — *a*) SI son singulares los dos extremos a y b, finitos o infinitos, cabe definir (fig. 270):

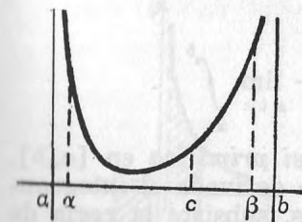


Fig. 270

$$[80\text{-}2] \qquad \int_\alpha^\beta = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_a^\beta \text{ y después } \int_a^b = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta,$$

o viceversa, cabe hacer $\beta \uparrow b$ y después $\alpha \downarrow a$. Si c es un punto interior de $[a, b]$ y se descompone

$$[80\text{-}3] \qquad \int_a^\beta = \int_a^c + \int_c^\beta$$

haciendo variar $\alpha\downarrow a$, $\beta\uparrow b$, ambos métodos conducen al mismo resultado que podemos tomar como definición:

DEF. 2.

[80-4] $$\int_a^b = \lim_{\alpha\downarrow a}\int_\alpha^c + \lim_{\beta\uparrow b}\int_c^\beta = \int_a^c + \int_c^b .$$

Es este el método que preferimos en lo sucesivo, y que puede tomarse como definición de integral de extremos singulares, la cual es independiente del punto c elegido, puesto que [80-3] lo es.

En particular, cualquiera que sea c es

[80-5] $$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{c} + \int_c^{+\infty} = \lim_{\alpha\downarrow-\infty}\int_\alpha^c + \lim_{\beta\uparrow+\infty}\int_c^\beta ,$$

de igual modo que las series $\sum_{-\infty}^{\infty}$ se descomponen en dos series fraccionándolas arbitrariamente.

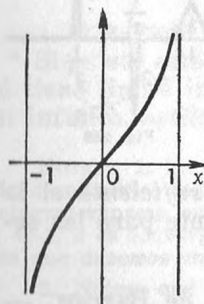


Fig. 271

EJEMPLO 1.

$$\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} = 0 ,$$

como también se ve directamente por ser impar el integrando (fig. 271).

b) Punto singular interior. — El caso en que existe un solo punto singular interior c no difiere esencialmente del anterior, pues se adopta como definición:

DEF. 3.

[80-6] $$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \lim_{x\uparrow c}\int_a^x + \lim_{x\downarrow c}\int_x^b .$$

Si $F(x)$ es una primitiva, o bien *casi primitiva* en $[a, b]$, esto es, función *continua* que tiene como derivada el integrando, salvo en un número *finito* de puntos, subsiste la regla de BARROW

[80-7] $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) ,$$

bien entendido que si a, b son infinitos o, aun siendo finitos, no existen $F(a)$, $F(b)$, pero sí $\lim F(x)$ a la derecha de a

y a la izquierda de b, éstos son los significados convencionales que designamos por $F(a)$ y $F(b)$. Basta, en efecto, tomar límites en la fórmula de BARROW relativa al intervalo $[\alpha, \beta]$ para $\alpha\downarrow a$, $\beta\uparrow b$, y si c es punto singular interior, la def. 3 da

$$[F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a) ,$$

subsistiendo el razonamiento para un número finito de puntos excepcionales, a condición de que $F(x)$ sea *continua*.

EJEMPLOS: 2. Es erróneo este cálculo:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^\pi = $$
$$= \ln(-1) - \ln 1 ,$$

pues la primitiva es ∞ en el punto $\pi/2$. La integral carece de sentido (v. fig. 272).

3. También es erróneo escribir

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_0^\pi = 0 ,$$

pues la integral es divergente.

Fig. 272

3.
$$\int_{-1}^{+2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^{0} + \int_0^2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_0^2 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}.$$

Se observa que habría sido igual aplicar directamente la regla de BARROW al intervalo $[-1, +2]$.

4. **Valor principal en un punto singular.** — La Def. 3, lo mismo que la Def. 2, exige la existencia de las dos integrales sumadas.

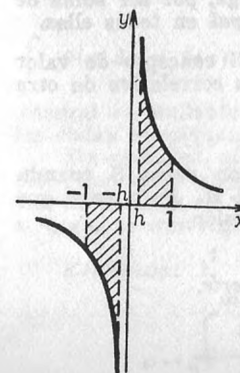


Fig. 273

EJEMPLO 1. (Fig. 273). No es convergente

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} + \int_0^1 = \lim_{x\uparrow 0}\ln|x| - \lim_{x\downarrow 0}\ln x ,$$

pues divergen estas dos integrales. Pero si tomamos *simétricos* los dos intervalos excluídos a uno y otro lado del punto singular $x = 0$, es decir, si consideramos

$$\int_{-1}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^1\frac{dx}{x} = \int_1^h\frac{dx}{x} + \int_h^1\frac{dx}{x} = 0 ,$$

resulta para $h \to 0$ límite nulo.

Este procedimiento nos conduce a la siguiente generalización:

DEF. 4. *Valor principal* (de CAUCHY) de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, que tiene el punto singular único interior c, es:

$$[80\text{-}8] \qquad (\mathrm{VP}) \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0}\left[\int_a^{c-h} + \int_{c+h}^b\right],$$

adoptando el símbolo (VP) antepuesto al signo integral para distinguirlo del valor ordinario, que sólo existe cuando cada sumando tiene límite, en cuyo caso el valor principal es la suma de estos límites, es decir, coincide con el valor ordinario. Análogamente:

DEF. 5.

$$[80\text{-}9] \qquad (\mathrm{VP}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$

EJEMPLOS: 2. He aquí un caso de aplicación de la Def. 5:

$$(\mathrm{VP})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-a}^{+a} = 0.$$

3. Menos trivial que Ej. 1 y Ej. 2 es el siguiente:

$$(\mathrm{VP})\int_0^3\frac{dx}{x-1} = \lim_{h\to 0}\left[\int_0^{1-h}\frac{dx}{x-1} + \int_{1+h}^{3}\frac{dx}{x-1}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\,[(\ln h - \ln 1) + (\ln 2 - \ln h)] = \ln 2.$$

Obsérvese que ninguna de estas integrales converge, por ser suma de dos integrales divergentes, pero existe el *valor principal* en todas ellas.

NOTA. *Valor principal de series bilóteras.* — El concepto de valor principal de una integral, introducido por CAUCHY, es correlativo de otro ya conocido en las series del tipo:

$$\ldots + b_3 + b_2 + b_1 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Diremos que la serie anterior es *convergente* con *suma* S cuando converge cada serie $A = \sum a_i$, $B = \sum b_i$, y es $S = A + B$. Pero cabe que siendo $\sum a_i$ y $\sum b_i$ divergentes, sea convergente la sucesión

$$b_n + \ldots + b_1 + a_1 + \ldots + a_n \;;$$

en tal caso, su límite se llama *valor principal de la serie*.

Así, por ejemplo, no converge

$$\ldots - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots,$$

pero su valor principal es

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2.$$

En general, toda serie alternada condicionalmente convergente puede interpretarse como valor principal de la serie bilátera formada por los términos positivos y los negativos.

5. Transformación de integrales en series. — Hay integrales cuyo cálculo se reduce ventajosamente al de una serie. Sea b finito o $+\infty$, se tiene:

TEOR. 2. *Si* $\int_a^b f(x)\,dx$ *es convergente, y* $a_n \uparrow b$ *entonces converge también con igual suma la serie* Σu_n *llamando*:

$$u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx.$$

Recíprocamente: *si esta serie converge y no solamente tiende a 0 su término general* u_n, *sino también cada integral parcial del mismo, también converge la integral, con igual suma.*

Directo. Las sumas parciales:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx$$

convergen para $n\to\infty$ hacia $\int_a^b f(x)\,dx$, luego converge la serie, y su suma es la integral.

Recíproco. La convergencia de la serie da la convergencia de una sucesión numerable de la función continua $F(x) = \int_a^x$, y no basta para asegurar la convergencia de ésta. Ejemplo: $\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,dx$, o en general, $\int_0^\infty f(x)\,dx$ si $f(x)$ es periódica no nula y su onda tiene área nula; la integral es oscilante mientras que converge la serie de integrales sobre las ondas sucesivas: $0 + 0 + \ldots$

Sin embargo, con la condición complementaria impuesta en el teorema, como cada integral parcial de la integral difiere de una suma parcial de la serie en una integral sobre parte de (a_{n-1}, a_n), la cual tiende a 0, ambas convergen hacia la misma suma.

EJEMPLOS: 1.

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \sum_0^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,,$$

pues esta serie es alternada y de términos decrecientes, ya que las ordenadas de la sinusoide están divididas por la variable creciente x (fig. 274); además, siendo 2 el área de la semionda de sen x, el valor de la integral u_n es:

[80-10] $$|u_n| < \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx < \frac{2}{n\pi} \to 0 ,$$

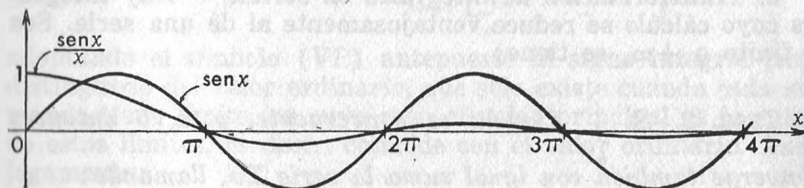


Fig. 274

y también tiende a 0, con mayor razón, cada integral parcial de ésta; luego converge la integral propuesta, con igual suma que la serie.

2. La integral convergente citada como ejemplo en § 80-2, Nota, tiene como suma

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

NOTA. He aquí algunos complementos al Teor. 2:

a) *Si la integral diverge, también diverge la serie*; pues sus sumas forman parte de la sucesión continua de integrales y, por tanto, se conservan superiores a todo número positivo desde un n en adelante. En cambio:

b) *Si la integral es oscilante, la serie puede ser corvergente u oscilante.*

Por ejemplo, es oscilante $\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,dx$, pero converge $\Sigma u_n = 0$ si los puntos de división son $0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$

Recíprocamente: *de la divergencia u oscilación de la serie sólo se deduce la no convergencia de la integral.*

6. Integrando de signo constante. Método de comparación. — Lo mismo que acontece con las series, las integrales de función $u(x) \geqslant 0$ desde un x en adelante, tienen propiedades muy sencillas. Como al ampliar el intervalo $[a, x]$ ó $[x, b]$ crece la integral, siempre existe límite finito o infinito; luego sólo caben dos casos:

TEOR. 3. *Si el integrando* $f(x)$ *tiene signo constante en un semientorno del punto singular, la* $\int_a^b f(x)\,dx$ *es convergente o divergente.*

El problema de la convergencia o divergencia se reduce así

al de la acotación o no acotación de la función integral

$$\int_a^x f(x)\,dx \quad \text{ó} \quad \int_x^b f(x)\,dx ,$$

y para extremo superior ∞ resulta inmediatamente el siguiente criterio de MAC-LAURIN, que suele atribuirse a CAUCHY:

TEOR. 4. *Si* $u(x) \geqslant 0$ *es decreciente en* $(0, \infty)$, *la serie* $\sum_0^\infty u(n)$ *y la integral* $\int_a^\infty u(x)\,dx$ *tienen igual carácter* (MAC-LAURIN).

Sin restringir la generalidad, podemos suponer $a = 0$; y siendo

$$u_{n-1} = u(n-1) \geqslant \int_{n-1}^{n} u(x)\,dx \geqslant u(n) = u_n ,$$

se verifica (fig. 275):

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leqslant \int_0^n u(x)\,dx \leqslant u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} ,$$

luego las integrales parciales están acotadas, si lo están las sumas parciales, y recíprocamente.

Este criterio es útil para asegurar la convergencia de series cuyo término general u_n está dado por una función $u(x)$ decreciente de variable real x, cuya integral se conoce.

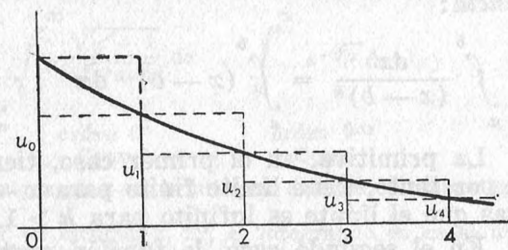


Fig. 275

EJEMPLOS.

$$\Sigma \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} , \quad \int \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} .$$

Poniendo $\ln x = t$ la integral se transforma en

$$\int t^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} ,$$

si es $\alpha \neq 1$; o bien, para $\alpha = 1$, $\int t^{-1}\,dt = \ln t$; luego resulta: si es $\alpha > 1$, convergencia, y divergencia para $\alpha \leqslant 1$.

Otra consecuencia inmediata de Teor. 3 es ésta:

TEOR. 5. *Sea en un cierto semientorno de* b: $0 \leqslant u(x) \leqslant v(x)$, *y sean sus respectivas integrales*

$$\int_a^b \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int_a^b \mathrm{v}(x)\,\mathrm{d}x \quad ;$$

si la segunda converge, también converge la primera, con suma menor o igual que ella; si la primera diverge, también diverge la segunda.

NOTA. La hipótesis del teorema puede sustituirse por esta equivalente: $\mathrm{u}(x) = \mathrm{O}(\mathrm{v}(x))$, que quiere decir, $\mathrm{u}(x) < \mathrm{K}.\mathrm{v}(x)$, $(\mathrm{K} > 0)$, (§ 24-3, *b*).

7. Criterio del orden de infinitud o infinitesimal. — Como corolario de Teor. 5, resulta:

TEOR. 6. *Si las funciones no negativas* $\mathrm{u}(x)$ y $\mathrm{v}(x)$ *en un semientorno de b son equivalentes para* $x \to b$ *(sea b finito, o sea* $+\infty$*), las integrales* $\int_a^b \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b \mathrm{v}(x)\,\mathrm{d}x$ *con el punto singular b, tienen igual carácter.*

Pues siendo desde un x, $1 - \varepsilon < \mathrm{u}(x)/\mathrm{v}(x) < 1 + \varepsilon$, es aplicable el Teor. 5.

He aquí el caso más sencillo en que la función es una *potencia*:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-b)^k} = \int_a^b (x-b)^{-k}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^k} = \int_a^\infty x^{-k}\,\mathrm{d}x.$$

La primitiva, en el primer caso, tiene exponente $-k+1$ y, por tanto, tiene límite finito para $x \to b$, si es $k < 1$; mientras que el límite es infinito para $k > 1$.

En el segundo caso, la función x^{-k+1} tiene para $x \to \infty$ límite finito si es $k > 1$, e infinito para $k < 1$.

En ambos casos, si es $k = 1$, la primitiva es el logaritmo, que tiene límite infinito, luego la integral diverge.

Resulta, pues, esta regla práctica, de uso muy frecuente:

TEOR. 7. *La integral converge en un punto singular finito si el orden potencial de infinitud del integrando es menor que* 1; *diverge si es* $\geqslant 1$; *y en el punto* $x = \infty$ *converge si el orden potencial infinitesimal del integrando es mayor que* 1, *y diverge si es* $\leqslant 1$.

En símbolos: la condición suficiente de convergencia en el punto b es:

$$\mathrm{u}(x) \leqslant \infty^h, \quad (h < 1) \quad \text{si es} \quad b < \infty,$$
$$\mathrm{u}(x) \leqslant 0^k, \quad (k > 1) \quad \text{si es} \quad b = \infty,$$

designando por 0^k los infinitésimos de orden k y por ∞^h los infinitos de orden h *.

NOTAS: 1. La regla no subsiste si el orden no es potencial. Así la función $1/(x \ln x)$ es en $x = 0$ de orden de infinitud menor que 1 y en $x = \infty$ es de orden infinitesimal mayor que 1, siendo sin embargo divergentes las respectivas integrales impropias (§ 80-6, ejemplo).

2. Los dos tipos de punto singular propio e impropio se reducen uno a otro por el cambio de variable $y = \dfrac{1}{x-b}$. Suponiendo, por ejemplo, $b = \infty$, $a \neq 0$, poniendo $y = \dfrac{1}{x}$, se tiene

$$\int_a^\infty \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{a}} \mathrm{u}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Si es $\mathrm{u}(x) \sim x^{-k}$, $(k > 1)$, es $\mathrm{u}(x)x^2 \sim x^{2-k}$, $(2 - k < 1)$, y existe perfecta correspondencia entre ambos criterios.

EJEMPLOS: 1. Punto singular $x = 0$:

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} \quad , \quad \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

orden ∞^3	orden ∞^0	orden $\infty^{\frac{1}{2}}$
Div.	Conv.	Conv.

2. Punto singular $x = \infty$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^5+1}}\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^\infty e^{-\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x.$$

orden 0^1	orden $0^{\frac{3}{2}}$	orden 0^∞
Div.	Conv.	Conv.

3. Si en Ej. 2, 1º el origen es $-\infty$, la integral diverge en ambos extremos.

Tomando el origen -1 en ejemplo 2, 2º, el integrando es en él infinito de orden 5/2, luego hay convergencia.

En Ej. 2, 3º cualquiera que sea el origen finito, no es singular. Para $a = -\infty$ la integral diverge.

De igual modo en Ej. 1, 1º si el extremo superior es $+\infty$ el orden en él es 0^1, luego también diverge.

En el Ej. 1, 2º si el extremo superior es 1 el orden es ∞^1 (pues $\ln x \sim x - 1$), luego hay divergencia; y si es ∞ el orden es 0^ε (ε menor que cualquier número positivo) y también diverge.

4. Sea, finalmente, la integral:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} \quad ;$$

es divergente en los puntos $-\infty$, $+\infty$ (orden 0^1) y convergente en $+1$ (orden $\infty^{\frac{1}{3}}$).

* Expresado con el símbolo de BACHMANN (§ 24-3, *b*) tenemos este criterio de convergencia, que no consideramos ventajoso sobre el dado:

Punto $b < \infty$: $\mathrm{f}(x) = \mathrm{O}(x-b)^{-h}$, $(h < 1)$,
" $b = \infty$: $\mathrm{f}(x) = \mathrm{O}(x^{-k})$, $(k > 1)$.

8. Integrales simples absoluta y condicionalmente convergentes. — *a*) Como el valor absoluto de la integral en cada intervalo no supera a la integral del valor absoluto, resulta del criterio de BOLZANO-CAUCHY:

TEOR. 8. *Si converge*

$$\int_a^b |\,\mathrm{f}(x)\,|\,dx \quad , \quad \textit{también converge} \int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx.$$

DEF. 6. Las integrales convergentes, que tienen también convergente la integral del módulo, se llaman *absolutamente convergentes*; y, las que tienen divergente la integral del módulo, *condicionalmente convergentes.*

EJEMPLOS: 1. Si en el ejemplo de integral convergente dado en § 80-2, nota, se toman valores absolutos, la integral en $(0, x)$, es decir, la suma de las áreas de los triángulos, supera a toda suma

$$\frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

y, por tanto, diverge. He aquí, pues, una integral condicionalmente convergente.

2. La integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge, como se vió en § 80-5, pero

no absolutamente, pues, con acotación análoga, resulta: $|u_n| > \dfrac{2}{(n+1)\pi}$ luego la serie $\Sigma|u_n|$ diverge y también la integral del módulo; la convergencia es *condicional.*

3. Análogamente convergen condicionalmente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx \quad , \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx.$$

La segunda se reduce a la primera adoptando x^2 como variable. En esta segunda integral vemos también (cfr. § 80-2, nota) que el integrando no tiende a cero.

4. Aplíquense § 80-8, *b* y *c* en 0 e ∞ a:

$$\int_0^\infty x^\alpha \operatorname{sen} x\,dx \quad ; \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} x^m\,dx.$$

Convergentes	absolutamente	si es	$-2 < \alpha < -1$;	$m < -1$,
"	condicionalmente	" "	$-1 \leqslant \alpha < 0$;	$m > 1$,
oscilantes		" "	$\alpha = 0$;	$m = 1$,
divergentes		" "	$\alpha \leqslant -2$ ó $\alpha > 0$;	$-1 \leqslant m < 1$.

b) Un criterio de convergencia absoluta para integrales de integrandos de signo no constante, deducido del Teor. 7, es el siguiente:

TEOR. 9. *Si puede determinarse* $\psi(x)$ *tal que*

$m \leqslant \psi(x) = \mathrm{f}(x)\,(x-b)^h \leqslant \mathrm{M}$ || $m \leqslant \psi(x) = \mathrm{f}(x)\,x^k \leqslant \mathrm{M}$

para $b - \varepsilon < x < b$ || $x > \mathrm{X}$,

con ε *suficientemente pequeño* || X *suficientemente grande, entonces*:

1º) *Si es* $\left\{\begin{matrix} h < 1 \\ k > 1 \end{matrix}\right\}$ *la integral impropia es absolutamente convergente.*

2º) *Si es* $\left\{\begin{matrix} h \geqslant 1 \\ k \leqslant 1 \end{matrix}\right\}$ *y* $m\mathrm{M} > 0$, *la integral impropia es divergente.*

3º) *Si es* $\left\{\begin{matrix} h \geqslant 1 \\ k \leqslant 1 \end{matrix}\right\}$ *y* $m\mathrm{M} \leqslant 0$, *nada puede afirmarse y el caso es dudoso.* (Cfr. § 80-5, ejemplo 1, y § 80-9, ejemplo 2).

En efecto, por el primer teorema del valor medio (§ 48-6) es:

$$\int_p^q \frac{\psi(x)\,dx}{(x-b)^h} = \mu \int_p^q \frac{dx}{(x-b)^h} \quad \Big|\Big| \quad \int_p^q \frac{\psi(x)\,dx}{x^k} = \mu \int_p^q \frac{dx}{x^k},$$

si μ se toma adecuadamente en $m \leqslant \mu \leqslant \mathrm{M}$ y basta aplicar el criterio general de convergencia (Teor. 1) y la regla del orden potencial (Teor. 7).

Corolario inmediato de los casos 1º) y 2º) es:

TEOR. 10. *Si existe*

$$\lim_{x \to b} [\mathrm{f}(x)\,(x-b)^h] \neq 0 \quad || \quad \lim_{x \to +\infty} [\mathrm{f}(x) \,.\, x^k] \neq 0 \quad ,$$

(*es decir, ni infinito, ni nulo*), *entonces la integral impropia es absolutamente convergente si* $\left\{\begin{matrix} h < 1 \\ k > 1 \end{matrix}\right\}$ *y divergente si* $\left\{\begin{matrix} h \geqslant 1 \\ k \leqslant 1 \end{matrix}\right\}$.

Para el caso dudoso, es útil la escala de comparación de convergencia absoluta más lenta

$$\frac{1}{(x-b)\,|\ln(b-x)\,|^\alpha} \quad \Big|\Big| \quad \frac{1}{x \ln^\alpha x}$$

dando convergencia si $\alpha > 1$ *y divergencia si* $\alpha \leqslant 1$ (§ 80-6, ejemplo).

c) *Criterio de* ABEL *y* DIRICHLET *para integrales simples condicionalmente convergentes.* — Cuando la integral del mó-

dulo $f(x)$ es divergente en un punto singular $x = b$, es preciso un estudio especial para clasificar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Hay, sin embargo, dos criterios muy generales que permiten asegurar la convergencia en el caso muy frecuente en que el integrando se descompone en dos factores, uno de ellos cuya integral haya sido ya clasificada, y el otro, monótono.

Basta, en efecto, aplicar el criterio general de convergencia, viendo si el resto en (p, q) tiende a 0 para $p \to \infty$, y para ello aplicaremos el 2º teorema del valor medio (§ 79-2):

$$[80\text{-}11] \quad \int_p^q \alpha(x)\,u(x)\,dx = \alpha(p)\int_p^\xi u(x)\,dx + \alpha(q)\int_\xi^q u(x)\,dx \quad ,$$

y resulta inmediatamente:

Criterio de ABEL: *Si converge* $\int_a^b u(x)\,dx$ *en el extremo b (finito ó* $+\infty$*) y la función* $\alpha(x)$ *es monótona acotada, converge*

$$\int_a^b \alpha(x)\,u(x)\,dx.$$

Por la supuesta convergencia, las dos integrales que figuran en el segundo miembro de [80-11] son $<\varepsilon$ desde un p en adelante, y como los coeficientes $\alpha(p)$, $\alpha(q)$ están acotados, resulta que el primer miembro se hace arbitrariamente pequeño; y también, por tanto, el resto $\int_p^\infty \cdot$

Criterio de DIRICHLET: *Si están acotadas las integrales parciales de* $\int_a^b u(x)\,dx$ *en el semientorno de* $b \leqslant \infty$ *y la función monótona* $\alpha(x)$ *tiende a 0 para* $x \to b$, *converge* $\int_a^b \alpha(x)\,u(x)\,dx$.

Pues, en este caso, las dos integrales del segundo miembro están acotadas y los coeficientes $\alpha(p)$, $\alpha(q)$ son arbitrariamente pequeños desde un p en adelante.

NOTAS: 1. Si la función $u(x)$ es compleja, basta descomponerla en sus dos componentes y aplicar los criterios anteriores, los cuales conservan, por tanto, validez para este caso más general.

2. El criterio de DIRICHLET es muy útil para las integrales trigonométricas del tipo

$$\int_a^\infty \alpha(x)\,\text{sen}\,kx\,dx \quad , \quad \int_a^\infty \alpha(x)\cos kx\,dx$$

pues siendo seno o coseno la primitiva de $u(x)$, están acotados sus valores y, por tanto, convergen las integrales si el coeficiente $\alpha(x)$ es decreciente y tiende a 0.

Son, pues, convergentes las integrales del tipo

$$\int_a^\infty \alpha(x)\,e^{ikx}\,dx \quad , \quad (k \neq 0) \quad \text{si} \quad \alpha(x) \downarrow 0.$$

3. *Sobre la equivalencia de integrandos en la convergencia condicional.* — La equivalencia de integrandos *positivos* para $x = \infty$ lleva consigo la igualdad de carácter de ambas integrales; lo mismo sucede cuando ambos integrandos tienen signo constante en un semientorno de ∞, o más general cuando la convergencia es *absoluta*; pero no si es condicional.

EJEMPLO 5. (Fig. 276).

$$f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (n-1 \leqslant x < n).$$

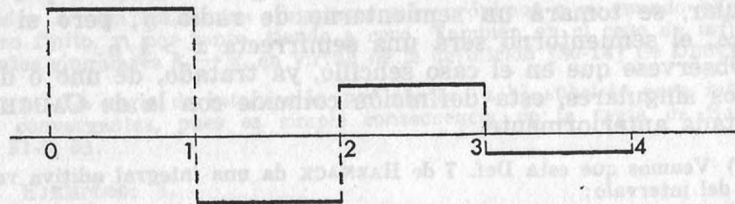


Fig. 276

Si multiplicamos los términos $(m = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$-\frac{1}{2m} \text{ por } \frac{1}{\ln(m+1)} \text{ y los términos } \frac{1}{2m-1} \text{ por } \frac{1}{m}$$

la nueva función $g(x)$ tiene integral divergente, pues la suma equivalente tiene parte positiva (§ 22-6, ejemplo 2, 2º):

$$\Sigma\frac{1}{m(2m-1)} = 2\ln 2 \text{ y parte negativa } \Sigma\frac{-1}{2m\ln(m+1)} = -\infty.$$

Tenemos pues, dos integrales

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \quad , \quad \int_0^\infty [f(x) + g(x)]\,dx \,,$$

la primera convergente, y divergente la segunda. Sin embargo, los integrandos son infinitésimos equivalentes, por ser

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} = 1/m \to 0, \text{ en los intervalos de origen par.} \\ = 1/\ln(m+1) \to 0, \text{ en los intervalos de origen impar.} \end{cases}$$

9. Generalización de las integrales impropias. — Como frecuentemente se presentan integrales que carecen de sentido según la definición de RIEMANN, con singularidades más complicadas que las estudiadas en § 80-1 a 4, veamos qué valor numérico se les puede asignar en tipos muy generales y cómo se generalizan las reglas de cálculo demostradas para las integrales propias en §§ 48 a 51, a fin de poder operar con estas integrales impropias.

La generalización más amplia que cabe por el método de HARNACK (que sigue la pauta de CAUCHY), es ésta:

DEF. 7. Si es C el conjunto cerrado de puntos singulares en el intervalo I, tal que puedan cubrirse con un número finito de entornos de radio ϱ, y es I_ϱ el conjunto de intervalos que queda al suprimir tales entornos, se define la integral

$$\text{[80-12]} \qquad \text{(R-Ha)} \int_I f(x)\,dx = \lim_{\rho\to 0} \int_{I_\rho} f(x)\,dx \ ,$$

donde la convergencia es uniforme respecto de los entornos y éstos contengan algún punto de C; si algún extremo a y b es singular, se tomará un semientorno de radio ϱ; pero si es $b=\infty$, el semientorno será una semirrecta $x > 1/\varrho$.

Obsérvese que en el caso sencillo, ya tratado, de uno o dos puntos singulares, esta definición coincide con la de CAUCHY, adoptada anteriormente.

a) Veamos que esta Def. 7 de HARNACK da una integral aditiva respecto del intervalo:

Si el punto c interior a $[a, b]$ es regular, los puntos singulares quedan repartidos en (a, c) y (c, b), luego I_ϱ se compone de intervalos en (a, c) y (c, b) o solamente en uno de ellos; en ambos casos la integral en I_ϱ es suma de integrales sobre I'_ϱ y sobre I''_ϱ, y el límite de la suma es la suma de límites, o sea $\int_a^c + \int_c^b$.

Si c es singular basta considerar separadamente sus dos semientornos y la conclusión subsiste. En particular, si hay n puntos singulares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, resulta:

$$\text{[80-13]} \qquad \int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \cdots + \int_{a_n}^{b} \ ,$$

quedando así generalizado el método de CAUCHY.

Demostrada [80-13] según la definición general de HARNACK, o adoptada como definición, se pasa a conjuntos más complicados por el método inductivo de DIRICHLET: Si $b \leqslant \infty$ es singular, se define

$$\text{[80-14]} \qquad \int_a^b = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta \ ,$$

suponiendo que ya se ha definido en cada intervalo $[a, \beta]$. Este método permite pasar de n puntos singulares a $n+1$ y por inducción completa a cualquier número finito. Además, si son singulares $b_1 < b_2 < \ldots \to b$ permite pasar del número finito a la sucesión infinita, más el punto b, que por ser límite de puntos singulares lo es también *.

b) La regla de BARROW se ha generalizado en § 50-2, *b*, para las funciones que llamamos (§ 80-3, *b*) casi primitivas.

Veamos que la integral convergente $\int_a^x f(x)\,dx$, cualquiera que sea el número de sus puntos singulares, es casi-primitiva de $f(x)$. En efecto, si x es regular, también lo es todo un entorno de x y el incremento $\int_x^{x+h}$ se hace arbitrariamente pequeño con h. Si x es singular, esta integral es precisamente el resto de una u otra de las sucesiones convergentes:

$$\lim_{h\to 0} \int_{a'}^{x-h} = \int_{a'}^{x} \ , \quad \lim_{h\to 0} \int_{x+h}^{a''} = \int_{x}^{a''}$$

si a' y a'' son los puntos singulares más próximos a x, cuando hay número finito, y, por tanto, tiende a cero. También en el caso de infinitos puntos singulares $b_n \to x$, en virtud de la definición [80-14] de DIRICHLET.

c) La regla de integración por partes $[a, b]$ subsiste para integrales convergentes, pues es simple consecuencia de la regla de BARROW (§ 51-5, *b*).

EJEMPLOS: 1.

$$\text{[80-15]} \qquad \int_0^\infty |\,\text{sen}\, x\,|^\alpha\, dx \ ;$$

cualquiera que sea α, como el integrando es periódico, no converge la integral; si es $\alpha \geqslant 0$ el integrandc es continuo y el área de cada onda es finita ($\leqslant 2$), y si $\alpha < 0$ pero $|\,\alpha\,| < 1$, en los extremos $0, \pi$, es infinito (fig. 277), de orden menor que 1, luego converge; pero en $(0, \infty)$ diverge.

Si α es entero impar o fracción de términos impares, tiene $(\text{sen}\, x)^\alpha$ signos alternados; y si es A el valor de su integral en $(0, \pi)$, en cualquier intervalo es un número entre $-A$ y $+A$, siendo oscilante la integral en $(0, \infty)$.

Para $\alpha \leqslant -1$ diverge en $(0, \pi)$ y carece de sentido en $(0\ \infty)$.

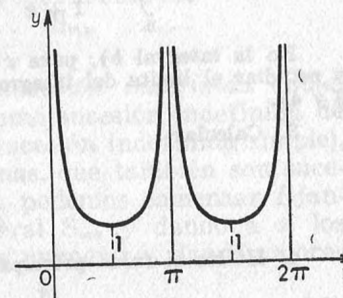


Fig. 277

2. Supongamos, como en ejemplo 1,

* Con el símbolo de la Aritmética trasfinita el número ordinal de b es ω, primer número trasfinito. Utilizando la inducción trasfinita se llega a extender la integral para conjuntos singulares más complicados.

que α sea entero impar o fraccionario de términos impares en la integral

$$[80\text{-}16] \quad \int_0^x \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)^\alpha x^\beta \, dx \quad ; \quad \text{o bien} \quad \int_{1/t}^\infty (\operatorname{sen} t)^\alpha \frac{dt}{t^{\beta+2}} .$$

Si $\alpha > -1$ las integrales parciales de $(\operatorname{sen} t)^\alpha$ están acotadas como ya se vió; y si es $\beta > -2$ el otro factor tiende monótonamente a cero, luego, por el criterio de DIRICHLET, la integral [80-16] *converge*, mientras que para $\beta = -2$ la integral es *oscilante* y para $\beta < -2$ el segundo factor crece infinitamente y la serie, de signos alternados, y términos infinitamente crecientes, *diverge*.

Si es $\alpha \leqslant -1$ en cada punto $t = n\pi$ el integrando es infinito de orden mayor o igual que uno, luego la integral es infinita en cada intervalo $[n\pi, (n+1)\pi]$ y en (t, ∞) carece de sentido.

NOTA. La regla de BARROW conserva su validez cuando el conjunto de puntos singulares es numerable (§ 50-2, nota 2), pero si el conjunto no es numerable, aunque tenga longitud nula (Cap. XIII, nota III, *c*) se presentan delicados problemas que corresponden mejor a la teoría de la integral infinitamente aditiva (§ 95). Baste recordar (Cap. IX, nota VI) que dos casi-primitivas con tal conjunto excepcional pueden no tener diferencia constante (ejemplo: la función de CANTOR y la función $y = 0$), y tampoco subsiste el teorema si las dos funciones tienen igual derivada (finita o infinita) en todo punto sin excepción.

EJERCICIOS

1. Aplicando $\lim \sqrt[n]{n!}/n = e^{-1}$ para $n \to \infty$, calcular directamente la integral impropia $\int_0^1 \ln x \, dx$.

2. Hallar los valores de s para los que son convergentes absoluta o condicionalmente las integrales

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x} \, dx \quad ; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^s} \, dx .$$

En la integral *b*), para $s = \frac{1}{2}$, efectuar el cambio de variable $x = y^2$ y estudiar el límite del integrando para $y \to +\infty$ (cfr. § 80-8, ejemplos 3 y 4).

3. Calcular

$$\int_0^2 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

4. Hallar el valor principal de las integrales

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos x} , \quad \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^3 x}$$

y observar que coincide con el valor obtenido aplicando directamente la regla de BARROW. ¿Cuándo sucederá esto?

5. Estudiar la convergencia de las integrales de

$$\frac{\operatorname{sen} kx}{x^\alpha} , \quad \frac{\cos kx}{x^\alpha} ,$$

en el intervalo $(0, \infty)$, según sea el valor de α.

6. Demostrar que la integral de la derivada de toda función continua que admita derivada finita integrable (R) en un intervalo finito, excepto en un número finito de puntos interiores, es convergente (cfr. § 50-2, nota 4).

7. El laborioso estudio hecho por BEPPO LEVI en su prestigioso tratado (citado en Cap. VI, nota VI-2; págs. 256 a 258 y 275 a 278) de la integral

$$\int_0^x \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)^\alpha x^\beta \, dx , \quad \text{o bien} \quad \int_{1/t}^\infty (\operatorname{sen} t)^\alpha \frac{dt}{t^{\beta+2}} ,$$

le conduce a los coeficientes de acotación -2π y $+2\pi$. Dedúzcanse, transformando la integral por partes, las cotas más aproximadas -2 y $+2$.

8. Generalizar los criterios de convergencia de integrales que hemos llamado de ABEL y DIRICHLET, al caso en que la función $\alpha(x)$ es de variación acotada en (a, b).

9. Demostrar que el conjunto de puntos *singulares* (R) de una integral es *cerrado*. Aplíquese el teorema de BOREL para simplificar el método de HARNACK (§ 80-9).

10. Constrúyanse funciones integrables (R) con conjunto *no cerrado* de puntos de *discontinuidad*.

§ 81. SERIES MÚLTIPLES

1. Sucesiones doblemente indefinidas. — Una sucesión indefinida de sucesiones indefinidas de números reales o complejos

$$[81\text{-}1] \quad \left\{ \begin{array}{llllll} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \ldots\ldots & S_{1n} & \ldots\ldots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \ldots\ldots & S_{2n} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m1} & S_{m2} & S_{m3} & \ldots\ldots & S_{mn} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right.$$

se llama doblemente indefinida o *sucesión indefinida doble.* Puede engendrarse de dos modos: como sucesión indefinida de filas (cada una de las cuales es una sucesión indefinida simple), o como sucesión indefinida de columnas, que también son sucesiones indefinidas simples. Es decir: podemos comenzar fijando el índice m en el elemento general S_{mn} y dando a n los valores 1, 2, 3, ... ; o bien fijamos primero n, dando valores sucesivos a m.

Se dice que la sucesión $\{S_{m,n}\}$ o la variable S_{mn} *tiene el límite doble finito* S, o *tiende al límite doble* S, si para cada valor de $\varepsilon > 0$ corresponde un número natural ν tal que sea:

$$[81\text{-}2] \quad | S_{mn} - S | < \varepsilon, \quad \text{para} \quad m > \nu \quad \text{y} \quad n > \nu .$$

Si se verifica $|S_{mn}| > K$, cualquiera que sea K, la sucesión se llama *divergente*. Escribiremos, respectivamente:

[81-3] $$\lim_{m,\,n\to\infty} S_{mn} = S \quad , \quad \lim_{m,\,n\to\infty} S_{mn} = \infty .$$

Si la sucesión doble no tiene límite, finito ni infinito, se llama *oscilante, indeterminada* o *discrepante.*

No debe confundirse el límite doble [81-3] con el *límite sucesivo*:

[81-4] $$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{mn}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} S_{mn}\right),$$

(por filas) (por columnas)

en las cuales se hace crecer infinitamente primero un índice y luego el otro mientras que en [81-3] crecen ambos simultáneamente.

NOTAS: 1. En [81-2] es equivalente en lugar de ν poner en correspondencia de $\varepsilon > 0$ números naturales $m_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon)$ tales que sea:

[81-5] $$|S_{mn} - S| < \varepsilon \quad , \quad \text{para} \quad m > m_0(\varepsilon) \quad \text{y} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

Si *dirigimos* (§ 2-7, nota 2) el conjunto de pares de índices $\alpha = (m, n)$ de manera que $\alpha[\geqslant]\alpha_0$ si se cumple simultáneamente $m > m_0$ y $n > n_0$, la definición [81-5] es caso particular de la correspondiente a un conjunto dirigido cualquiera dado en § 78-1, nota 1, def. 1.

También [81-5] expresa que tachando en [81-1] las m primeras filas y las n primeras columnas, los elementos que queden (en el ángulo inferior derecho) difieren en valor absoluto de S en menos de ε.

2. Los límites [81-3] y [81-4] pueden considerarse respectivamente como límite doble y sucesivo en el infinito (§ 65-1, nota 1. y § 65-2), donde las variables independientes x, y tomen sólo valores naturales.

3. Muchos autores engloban con el calificativo de "divergentes" a las sucesiones dobles "no convergentes".

EJEMPLOS: 1. Sea la sucesión doble $S_{mn} = m/(m+n)$, dando el cuadro

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \ldots\ldots, \ \frac{1}{1+n}, & \ldots\ldots \\
\frac{2}{3}, & \frac{2}{4}, & \frac{2}{5}, & \ldots\ldots, \ \frac{2}{2+n}, & \ldots\ldots \\
\frac{3}{4}, & \frac{3}{5}, & \frac{3}{6}, & \ldots\ldots, \ \frac{3}{3+n}, & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{m}{m+1}, & \frac{m}{m+2}, & \frac{m}{m+3}, & \ldots\ldots, \ \frac{m}{m+n}, & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

El límite de cada fila es cero y el límite de cada columna es 1; luego:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{mn}\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} S_{mn}\right) = 1,$$

y, sin embargo, no existe $\lim_{m,\,n\to\infty} \frac{m}{m+n}$, es decir la sucesión *doble* es oscilante.

2. Para $S_{mn} = m - n$, compruébese que el límite sucesivo por filas es $-\infty$, por columnas es $+\infty$ y el límite doble no existe. La sucesión doble puede ser oscilante, aún teniendo términos tan grandes en valor absoluto como se quiera.

3. Para $S_{mn} = (-1)^{mn}(1/m + 1/n)$ no existen ni el $\lim_{n\to\infty} S_{mn}$ (oscilante entre $\mp 1/m$), ni tampoco existe el $\lim_{m\to\infty} S_{mn}$, es decir no hay límites sucesivos, ni por filas, ni por columnas. Sin embargo, existe el límite doble $S = 0$.

4. Para $S_{mn} = mn/(m+n)^2$, ambos límites sucesivos existen y son iguales a 0. Sin embargo, no existe el límite doble, como se comprueba viendo que $S_{2m,\,m} = 2/9$, $S_{m,\,m} = 1/4$ para todo m.

TEOR. 1. (PRINGSHEIM). *Si existe el límite doble finito o infinito y existe el límite de cada fila* (columna), *entonces existe el límite por filas* (columnas) *con valor igual al límite doble.*

De [81-2], al *suponer existente* $\lim_{n\to\infty} S_{mn}$, será también $|\lim_{n\to\infty} S_{mn} - S| < \varepsilon$ para $m > \nu$, lo que prueba que existe el límite por filas y es $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} S_{mn}) = S$. Demostración análoga para el caso de divergencia, sin que para m fijo, $\lim_{n\to\infty} S_{mn}$ necesite ser infinito.

NOTAS: 4. Compárese este teorema con el ejemplo 3.

5. Para variables continuas este teorema es el visto en § 65-2, nota 1.

TEOR. 2. (STOLZ). *Condición necesaria y suficiente para que una sucesión doble* [81-1] *sea convergente, es decir, tenga límite doble finito, es que para todo* $\varepsilon > 0$ *existan números naturales* $m_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon)$ *tales que*

$$|S_{m+p,\,n+q} - S_{mn}| < \varepsilon \quad para \quad m > m_0 \quad y \quad n > n_0 ,$$

con p *y* q *números naturales cualesquiera.*

Es corolario inmediato del teor. 1 de § 78-1 dado en general para límites dirigidos (nota 1).

NOTAS: 6. Así pues, este criterio llamado de STOLZ en el caso de sucesiones dobles, no es sino el criterio general de convergencia de BOLZANO-CAUCHY (§ 65-1, nota 2).

7. Si los elementos del cuadro [81-1] son reales existen siempre los límites superior e inferior de oscilación finitos o infinitos (§ 20-5) respecto del conjunto dirigido de sus pares de índices según criterio dado en nota 1. Ambos límites superior e inferior coincidirán cuando y sólo cuando todos los límites de oscilación del conjunto dirigido según $\alpha = (m, n)$ (nota 1) coincidan en un número S de módulo finito (cfr. § 21-6, b).

2. Series dobles y múltiples. — *a*) Dada una sucesión doblemente indefinida de números reales o complejos:

$$[81\text{-}6]\qquad \left\{\begin{array}{llllll} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots\ldots & u_{1n} & \ldots\ldots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \ldots\ldots & u_{2n} & \ldots\ldots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \ldots\ldots & u_{3n} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m1} & u_{m2} & u_{m3} & \ldots\ldots & u_{mn} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

se llama *serie doble* al algoritmo que resulta de combinar la adición con el paso al límite, del modo siguiente: de la sucesión doble [81-6] deducimos otra sucesión doble [81-6] de elementos (§ 4-8, *b*):

$$[81\text{-}7]\qquad S_{mn} = \sum_{i=1,\, j=1}^{m,\, n} u_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} u_{ij}\ ,$$

donde cada uno es entonces la suma que llamaremos *suma parcial* de la serie doble, de todos los *términos* [81-6] cuyos índices no excedan a m y n, respectivamente.

De otro modo: S_{mn} es la suma de los $m\,.\,n$ términos en el rectángulo de diagonal $u_{11}\,u_{mn}$. Según se verifique:

$$\lim_{m,\, n\to\infty} S_{mn} = S \quad , \quad \lim_{m,\, n\to\infty} S_{mn} = \infty \ ,$$

o que no exista límite, la serie se llama *convergente, divergente* u *oscilante*, y en el primer caso, el número se llama S *suma de la serie*, y suele escribirse (induciendo a falsa interpretación):

$$[81\text{-}8]\qquad \begin{aligned} S = \sum_{i,\, j=1}^{\infty} u_{ij} = {} & u_{11} + u_{12} + u_{13} + \ldots + u_{1n} + \ldots \\ & + u_{21} + u_{22} + u_{23} + \ldots + u_{2n} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_{m1} + u_{m2} + u_{m3} + \ldots + u_{mn} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

pero entiéndase bien que no se ha de sumar por filas, y luego éstas entre sí, como pudiera creerse por la estructura de este esquema; ha de entenderse solamente que S es el límite de S_{mn}, como se ha dicho antes.

NOTAS: 1. Al efectuar los pasos al límite doble y sucesivos por filas o por columnas, en [81-7] se obtendrá respectivamente (cfr. b_2)

$$\sum_{i,\, j=1}^{\infty} u_{ij} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} \right\} \quad ; \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \quad ;$$

de modo que no se conservarán en general las equivalencias de los tres últimos miembros de [81-7] al reemplazar m y n por ∞.

2. Recíprocamente, de toda sucesión doble de sumas parciales [81-1], se deduce [81-6] mediante

$$[81\text{-}9]\qquad u_{mn} = S_{mn} - S_{m,\, n-1} - S_{m-1,\, n} + S_{m-1,\, n-1}.$$

DEF. Una serie doble se llama *absolutamente convergente* si es convergente la serie *doble* formada por los valores absolutos $|\, u_{mn} \,|$ de sus términos.

TEOR. *Una serie doble absolutamente convergente es convergente.*

Para demostrarlo, basta aplicar la desigualdad triangular (§ 9-5, ejercicio) al criterio de STOLZ (§ 81-1, teor. 2; cfr. § 22-1, *h*).

b) *Series simples deducidas de una serie doble.* — b_1) Por ser numerable el conjunto de términos u_{mn} dado en [81-8], se lo podrá (§ 2-11) ordenar en serie simple de muy diversas maneras, de las que al estudiar el producto de series numéricas (§ 22-6, *b*) ya hemos visto dos importantes:

Serie principal. Se recorre el esquema [81-8] por ángulos rectos sucesivos de lados verticales y horizontales con vértices en la *diagonal principal* $\{u_{ii}\}$, así:

$$[81\text{-}10]\qquad u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{21} + u_{13} + u_{23} + u_{33} + u_{32} + u_{31} + \ldots$$

Serie diagonal. Se recorre [81-8] por diagonales sucesivas perpendiculares a la principal, esto es, ordenando los términos por la suma de sus índices, así:

$$[81\text{-}11]\qquad \begin{aligned} & u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{13} + u_{22} + u_{31} + u_{14} + u_{23} + \\ & \qquad + u_{32} + u_{41} + \ldots \end{aligned}$$

NOTA 3. Con el mismo nombre se designan las series análogas, pero *distintas* de las anteriores que se obtienen recorriendo los índices en forma ascendente, en lugar de descendente.

Asociando los términos en las series anteriores se obtienen las siguientes:

Serie por cuadrados. Sus sucesivas sumas parciales son las que completan los cuadrados correspondientes a la ordenación principal, dando la serie de términos:

$$q_1 = u_{11} \quad , \quad q_2 = u_{12} + u_{22} + u_{21} \quad ,$$
$$q_3 = u_{13} + u_{23} + u_{33} + u_{32} + u_{31} \quad ,$$

y en general

$$[81\text{-}12]\qquad \begin{aligned} q_n = {} & u_{1n} + u_{2n} + \ldots + u_{n-1,\, n} + u_{n,\, n} + u_{n,\, n-1} + \ldots + \\ & + u_{n2} + u_{n1}\,. \end{aligned}$$

Serie por triángulos. Sus sucesivas sumas parciales son las que completan los triángulos correspondientes a la ordenación

diagonal, de manera que sus términos se obtienen asociando en [81-11] los de suma de índices, constante, así:

$$t_1 = u_{11} \quad , \quad t_2 = u_{12} + u_{21} \quad , \quad t_3 = u_{13} + u_{22} + u_{31}$$

y en general

[81-13] $$t_n = u_{1n} + u_{2,\,n-1} + \ldots + u_{n-1,\,2} + u_{n1} .$$

b_2) Otra forma de sumar el esquema [81-8] no es ya formar con él una sola serie simple, sino una serie simple de series simples, siendo importante considerar en particular las siguientes, que corresponden a los límites sucesivos por filas o por columnas de la sucesión S_{mn} (ver nota 1):

Suma por filas. Es la de la serie simple

[81-14] $$\sum_{m=1}^{\infty} f_m \quad , \quad \text{con} \quad f_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \quad ,$$

supuestas convergentes cada una de las series formadas por las filas de [81-8].

Suma por columnas. Análogamente es la

[81-15] $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad , \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} .$$

c) *Series múltiples.* — Sus términos dependen no ya de dos, sino también de tres o más índices naturales (pero no de infinitos índices, pues entonces se obtendría un conjunto no numerable, con la potencia del continuo; cfr. Cap. II, nota II). El conjunto de sus términos da lugar a sumas parciales, elementos de sucesiones múltiples, en forma análoga a la [81-7] y recíprocamente, como en [81-9]. Para estas sucesiones múltiples de sumas parciales se definen los límites múltiples y sucesivos en forma análoga a la vista para el caso de dos índices (cfr. § 65-2, nota 4).

3. **Series dobles de términos positivos.** — Como en el caso de las series simples:

TEOR. 1. *Toda serie doble de términos positivos o nulos es convergente o divergente, pero nunca oscilante.*

Pues la sucesión doble de sumas parciales es *monótona* respecto del criterio de dirección $(m, n) [\geqslant] (m_0, n_0)$ si es simultáneamente $m > m_0$ y $n > n_0$ (§ 81-1, nota 1; § 78-1, def. 2) y por tanto (§ 78-1, teor. 2) existe siempre su límite finito o infinito. Esto mismo demuestra:

TEOR. 2. *Condición necesaria y suficiente para que una serie doble de términos positivos o nulos sea convergente es que se conserven acotadas sus sumas parciales dobles,* $S_{mn} < K$, *con* K *número positivo independiente de* m *y* n, *y entonces la suma* S *no es mayor que dicha cota* K, *es decir,* $S \leqslant K$.

La propiedad fundamental de las series dobles de términos positivos que hace su manejo particularmente sencillo, es la siguiente:

TEOR. 3. *Una serie doble de términos positivos o nulos, convergente, tiene convergentes y con igual suma cualquier serie simple deducida de ella, que contenga todos los términos de la dada, así como las series simples formadas con la suma de las series simples que forman las filas (columnas) de* [81-6]. *Recíprocamente, si* $u_{mn} \geqslant 0$, *es suficiente que cualquiera de estas series simples sea convergente, para que lo sean las demás y la serie doble, con igual suma.*

En efecto, dada una ley de formación cualquiera de una serie simple de suma parcial S_k, siempre podremos considerar una suma parcial doble S_{mn} que contenga todos los términos de S_k y la S_{pq} que pueda formarse con términos contenidos en S Por ser positivos o nulos todos ellos, será $S_{pq} \leqslant S_k \leqslant S_{mn}$, lo que prueba (§ 81-2, teor. 2, y § 22-2, *a*) el directo y el recíproco del teor. 3 para el caso de series simples y la doble. Para el caso que relaciona la suma por filas con la suma doble, supongamos primeramente que se verifica la hipótesis del directo $S_{mn} \to S$. Si designamos por $\varphi_n^{(m)}$ la suma parcial de los n primeros términos de la fila m-ésima de [81-6], por ser

[81-16] $$S_{mn} = \varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)} + \ldots + \varphi_n^{(m)} \leqslant S ,$$

cada fila forma una serie convergente tal que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n^{(m)} = f_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \quad ,$$

y en el límite $n \to \infty$ para el segundo miembro de [81-16] se conservará

$$S_{mn} \leqslant f_1 + f_2 + \ldots + f_m \leqslant S \quad ,$$

que prueba que es convergente con suma S la serie [81-14].

Recíprocamente, si es convergente la serie [81-14] con suma S, entonces la suma parcial doble se conserva acotada $S_{mn} \leqslant S$, es decir, la serie doble de términos positivos o nulos será convergente (teor. 2), con la misma suma S, en virtud del directo.

4. **Series dobles absolutamente convergentes.** — Las series dobles absolutamente convergentes no se comportan exactamente como las series dobles de términos positivos (ver nota), pero sí subsiste la parte directa del teor. 3 de § 81-3. Así:

TEOR. *Si una serie doble de términos reales o complejos cualesquiera es absolutamente convergente con una suma doble* S, *entonces, todas las series simples deducidas de ella, así como la suma por filas (columnas) son también absolutamente convergentes con la misma suma* S.

En efecto, por consideración de las series formadas por los valores absolutos de los términos y aplicación del teor. 3 del § 81-3, se ve que serán absolutamente convergentes todas las series simples deducidas de

la dada y por tanto tendrán entre sí igual suma (propiedades conmutativa y asociativa, § 22-5) y en particular la serie por cuadrados [81-12] da

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = S_{nn} \to S ,$$

suma de la serie doble. Por otra parte, las series formadas por las filas serán también absolutamente convergentes, con

$$f_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} ,$$

por lo que existirá

$$\lim S_{mn} = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$$

y podrá aplicarse el teorema de PRINGSHEIM (§ 81-1, teor. 1) y por tanto será

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m = S ,$$

como queríamos demostrar.

NOTA. En contraste con lo que ocurre con las series dobles de términos positivos o nulos (§ 81-3, teor. 3, recíproco), para las series dobles de términos reales o complejos cualesquiera se da el caso sorprendente de que una serie doble de filas que formen series absolutamente convergentes, con suma por filas también absolutamente convergente, pueda no tener suma por columnas y como serie doble no ser convergente y por tanto tampoco absolutamente.

EJEMPLO (CESÀRO). Sea

$$u_{mn} = (-1)^{n-1}(2^{1+[\frac{1}{2}n]} - 1)^{m-1}/2^{(1+[\frac{1}{2}n])m}$$

es decir:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \ldots \\
&+ \frac{1}{2^2} - \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^2} - \frac{7}{8^2} + \frac{7}{8^2} - \frac{15}{16^2} + \frac{15}{16^2} - \ldots \\
&+ \frac{1}{2^3} - \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^2}{4^3} - \frac{7^2}{8^3} + \frac{7^2}{8^3} - \frac{15^2}{16^3} + \frac{15^2}{16^3} - \ldots \\
&+ \frac{1}{2^4} - \frac{3^3}{4^4} + \frac{3^3}{4^4} - \frac{7^3}{8^4} + \frac{7^3}{8^4} - \frac{15^3}{16^4} + \frac{15^3}{16^4} - \ldots \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

cada fila, de suma $1/2^m$, forma una serie absolutamente convergente, siendo $(1/2)+(1/4)+(1/8)+\ldots=1$ (suma por filas) absolutamente convergente. Cada columna forma una serie geométrica convergente (absolutamente) de sumas ± 1, pero no existe la suma por columnas, por ser oscilante, $1-1+1-1+1-1+\ldots$. Además vemos que para m muy grande respecto de n impar (par), está S_{mn} tan cerca como se quiera de 1 (0), lo que prueba que no puede ser convergente la sucesión doble S_{mn}.

5. Series dobles de términos reales o complejos: propiedad conmutativa. — Las series dobles de términos reales con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, pueden estudiarse también formando separadamente la serie doble de los términos positivos (sustituyendo los demás por ceros) y la serie doble de los valores absolutos de los negativos (sustituyendo por ceros los positivos). Así de [81-8] se deducen:

$$[81\text{-}17] \left\{ \begin{aligned} &a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} + \ldots \\ &+ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} &b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1n} + \ldots \\ &+ b_{21} + b_{22} + \ldots + b_{2n} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ b_{m1} + b_{m2} + \ldots + b_{mn} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

de términos no negativos, con sumas parciales A_{mn} y B_{mn} tales que $S_{mn} = A_{mn} - B_{mn}$. Entonces:

TEOR. 1. *Si las dos series dobles componentes* [81-17] *convergen y sus sumas son* A *y* B, *la serie doble* [81-8] *converge hacia* A — B, *y además es absoluta e incondicionalmente convergente. Si la* 2ª [1ª] *converge y la otra diverge, la serie doble diverge hacia* $+\infty$ *ó* $[-\infty]$. *Si ambas son divergentes, la serie doble puede ser convergente, divergente u oscilante* y, al poder aplicar a las series simples deducidas de ella el teorema de RIEMANN (§ 22-4, b_2), en el caso de ser convergentes, *su suma dependerá del orden de los términos.* Así pues, aquí también (cfr. § 22-4, b_3) las denominaciones de *convergencia absoluta* y *convergencia incondicional* son equivalentes.

Esto subsiste para las series dobles de términos complejos, $u_{mn} = v_{mn} + iw_{mn}$ (con v_{mn}, w_{mn} reales), pues aquí también (cfr. § 22-5):

TEOR. 2. *Condición necesaria y suficiente para que la serie de términos complejos*

$$S = \sum_{m,\,n=1}^{\infty} u_{mn}$$

sea convergente, es que lo sean conjuntamente las series dobles formadas por las partes reales v_{mn} *y las partes imaginarias* w_{mn} *de* u_{mn}, *y si*

$$V = \sum_{m,\,n=1}^{\infty} v_{mn} , \qquad W = \sum_{m,\,n=1}^{\infty} w_{mn} ,$$

será $S = V + iW$.

En efecto, basta considerar las desigualdades:

$$\left. \begin{aligned} &|V - V_{mn}| \leqslant \\ &|W - W_{mn}| \leqslant \end{aligned} \right\} \leqslant |S - S_{mn}| \leqslant |V - V_{mn}| + |W - W_{mn}|$$

$$\text{para} \quad S_{mn} = V_{mn} + iW_{mn} .$$

NOTA 1. Obsérvese que para la convergencia de una serie doble de términos cualesquiera se da el hecho sorprendente de que no es necesario que se conserven acotadas las sumas parciales dobles $|S_{mn}| < K$, si m y n no crecen simultáneamente, según se ve en el siguiente

EJEMPLO. Sea la serie doble:

$$\begin{array}{l} (a_0 + b_0) + (\ \ a_1 - b_0) + a_2 + a_3 + a_4 + \dots \\ + (-a_0 + b_1) + (-a_1 - b_1) - a_2 - a_3 - a_4 - \dots \\ \qquad + b_2 \qquad\qquad - b_2 \ + 0 + 0 + 0 + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Tomando $m > 2$, $n > 2$ es $S_{mn} = 0$, y por lo tanto la serie doble es convergente con suma cero, cualesquiera sean las a_i y b_j. Si Σa_i fuese divergente y Σb_j convergente, las $S_{0,n}$ para $n \to \infty$, no se conservarían acotadas y la suma por filas no existirá, aunque sí la suma por columnas. Por otra parte, la suma por triángulos vale $a_n + b_n$ y eligiendo adecuadamente las sucesiones a_i, b_j podemos hacer que la suma por triángulos sea convergente al valor que queramos, divergente u oscilante, a pesar de ser $S = 0$ y del teorema de PRINGSHEIM (§ 81-1, teor. 1, que se refiere a suma por filas o por columnas). Si por ejemplo hacemos $a_i \equiv 2$, $b_j \equiv -1$, la suma por triángulos vale $1 \neq 0$ y la ordenación diagonal da una serie simple oscilante, la serie doble es convergente con suma 0, y las sumas por filas (columnas) no existen.

NOTA 2. Una aplicación interesante de la teoría de las series dobles es la simplificación de la demostración del teorema del producto de series simples absolutamente convergentes (§ 22-6, b_2). Pues bajo esta hipótesis, la serie doble producto [22-69] es también absolutamente convergente (basta sumar por filas la de sus valores absolutos, § 81-3, teor. 3) y su suma será el producto de las sumas de las series factores (como también se ve sumando por filas [22-69] según $Uv_1 + Uv_2 + \dots + Uv_m + + \dots = U.V$ y aplicación de § 81-4, teor.).

EJERCICIOS

1. Expresión general de los términos $u_{m,n}$ $(m \geqslant 1, n \geqslant 1)$ de la serie doble cuya suma parcial doble vale $S_{m,n} = (m-n)/(m+n)$. Hállese su suma por filas, por columnas, doble, por triángulos y diagonal.

2. Dada la serie doble

$$\left.\begin{array}{l} \ \ 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ -1 + 0 + 1 + 0 + 0 + \dots \\ +0 - 1 + 0 + 1 + 0 + \dots \\ +0 + 0 - 1 + 0 + 1 + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

formar sus dos series dobles obtenidas al anular los términos de igual signo (ya sólo —, ya sólo +) y estudiar para cada una de ellas tres (la dada y estas dos), el valor y la suma por filas, por columnas, doble, diagonal y por triángulos.

3. Demostrar que la serie doble

$$\begin{array}{l} +\ 1 - 1 + 1/2 - 1/2 + 1/3 - 1/3 + \dots \\ -\ 1 + 1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + 1/3 - \dots \\ + 1/2 - 1/2 + 1/3 - 1/3 + 1/4 - 1/4 + \dots \\ - 1/2 + 1/2 - 1/3 + 1/3 - 1/4 + 1/4 - \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

es convergente y su suma es 0.

4. Demostrar que la serie simple principal de la serie anterior es convergente y tiene la suma 0; la serie diagonal es oscilante; la serie obtenida sumando por filas tiene la suma 0, y también tiene esta suma la serie obtenida sumando por columnas.

§ 82. INTEGRALES DOBLES

1. **Concepto de integral doble.** — *a*) De igual modo que el problema del área de recintos planos condujo al concepto de integral simple, el del volumen conduce a las integrales dobles. Vamos a definirlas por el mismo método de RIEMANN usado en §§ 48 y 49.

Sea $z = f(x, y)$ una función *acotada* en el rectángulo

$$R(a \leqslant x \leqslant b \quad ; \quad c \leqslant y \leqslant d)$$

y dividiendo éste en rectángulos parciales por abscisas y ordenadas intermedias:

$$[82\text{-}1] \qquad \begin{array}{l} a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \ , \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d \ , \end{array}$$

multipliquemos el área $\delta_r = \Delta x \,.\, \Delta y$ de cada intervalo bidimensional, o rectángulo parcial, por el extremo inferior o superior de $f(x, y)$ en él, y formemos así las sumas:

$$[82\text{-}2] \qquad s = \Sigma m_r \delta_r \quad , \quad S = \Sigma M_r \delta_r$$

siendo, por tanto, $s \leqslant S$ y verificándose la igualdad solamente si $f(x, y)$ es constante en cada rectángulo, caso en que se llamará *función escalonada.*

La *suma inferior* s nos da un *volumen contenido* en el cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano xy y el cilindro cuya base es el rectángulo R en este plano, cuerpo que se llama *cilindroide* por analogía al trapezoide (§ 48-2). La *suma superior* S nos da un *volumen continente* de dicho cilindroide. Así pues, intuitivamente, el proceso de cálculo [82-2], trata de aproximar por defecto y por exceso, mediante la suma de volúmenes de los ortoedros elementales contenidos y continentes correspondientes a cada partición [82-1], el hipotético volumen del cilindroide en cuestión.

Si son contiguas (§ 7-6) las clases de las sumas s y S para todas las particiones del rectángulo R en un número finito de rectángulos parciales, el número frontera se llama *integral de* $f(x, y)$ en R, designándose así:

$$[82\text{-}3] \qquad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

y la función $f(x, y)$ se dice *integrable* (R) en R.

Si las clases no son contiguas, se define la *integral inferior* y la *integral superior, así* (cfr. § 49-2):

$$[82\text{-}4] \qquad \begin{array}{l} \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy = \text{extr. sup. } s \\ \overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy = \text{extr. inf. S}. \end{array}$$

b) *La integral como límite.* — Si en cada intervalo parcial se elige un punto cualquiera (x_r, y_r), como las sumas

$$\Sigma f(x_r, y_r)\Delta x \Delta y$$

que están comprendidas entre las *s* y las S, difieren de la integral en menos de ε desde una partición en adelante, luego la integral, si existe, puede considerarse como límite de estas sumas, respecto del conjunto dirigido de las particiones (§ 78-1), cualquiera que sea el punto (x_r, y_r) elegido en cada rectángulo. Más general: las sumas *s* convergen siempre hacia la integral inferior y las S hacia la integral superior (§ 78-1, teor. 2)

Estos límites lo son respecto de las particiones, pero se puede demostrar que también lo son respecto de la norma. Si llamamos *diámetro* de un conjunto al extremo superior (§ 23-14) de las distancias entre pares de puntos del conjunto, la *norma* de una partición es el diámetro máximo de las mallas del retículo formado por la partición [82-1]. La demostración de este lema, de DARBOUX, es análoga a la ya dada en Cap. XV, nota I, *b*.

NOTA. El paso al límite que se efectúa para obtener la integral doble es análogo al estudiado para sumar series dobles (§ 81-2), que están respecto de las series simples como las integrales dobles lo están respecto de las simples.

2. Conjuntos de extensión nula y de medida nula. — La teoría de la integral fué creada para la medición de magnitudes geométricas de figuras representadas analíticamente por funciones definidas en intervalos de $\mathbf{E}_1$ o recintos sencillos de $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$; posteriormente se abordó la medida de los conjuntos de puntos cualesquiera y la exposición de la teoría elaborada por JORDAN, BOREL y LEBESGUE la haremos en los §§ 94 y 95. Hay, sin embargo, algunas nociones ya clásicas que conviene anteponer.

DEF. 1. Un conjunto de $\mathbf{E}_n$ se dice nulo (R) o de *extensión nula* (en particular diremos *longitud, área o volumen* (R) nulos) si puede encerrarse en un número finito de intervalos, rampantes o no (es decir, con o sin puntos interiores comunes), cuya suma de extensiones (longitud, área, volumen) sea menor que cualquier número positivo prefijado.

EJEMPLOS: 1. De cualquier modo que se cubra el conjunto de los puntos racionales del intervalo (0, 1) con número finito de intervalos, la suma de las longitudes de éstos es mayor o igual que 1, luego no es nulo (R); pero tampoco diremos que tiene longitud 1. (Ver def. 2 y ejemplo 3).

2. Son nulos en $\mathbf{E}_2$: el conjunto de puntos $x = 1/m$, $y = 1/n$ para todos los valores naturales *m*, *n*; cualquier conjunto finito de segmentos, con o sin puntos comunes, trazados en el cuadrado; todas las curvas elementales: cónicas, cicloides, espirales, etc., por ser rectificables (ver nota 1) y también las no rectificables como la $y = x \operatorname{sen}(\pi/x)$, que tienen longitud finita si se excluyen ciertos intervalos arbitrariamente pequeños.

NOTA 1. Ejemplos de conjuntos nulos (R) en $\mathbf{E}_2$ (de área nula) son las curvas rectificables (§ 55-1). En efecto, si se dividen en *n* partes iguales los lados *a*, *b* del rectángulo que contiene la curva, y también la curva cuya longitud suponemos $l < a < b$, como los puntos de dos rectángulos parciales no contiguos distan más que el lado a/n, cada arco de longitud $l/n < a/n$ no puede tener puntos en más de 4 rectángulos, número máximo de rectángulos contiguos, dos a dos; luego el área total de los rectángulos que contienen a la curva es menor que $4n(a/n)(b/n) = 4(ab/n)$, el cual puede hacerse arbitrariamente pequeño al crecer *n*. Si la curva tiene longitud mayor o igual que *a*, descompuesta en otras de longitudes menores que *a*, subsiste la conclusión.

DEF. 2. Un conjunto de $\mathbf{E}_n$ se dice de *medida nula* *n*-dimensional o nulo (L), si puede encerrarse en un número finito *o infinito numerable* de intervalos *n*-dimensionales (§ 64-4), rampantes o no, cuya suma total de extensiones *n*-dimensionales sea tan pequeña como se quiera (cfr. Cap. XIII, nota III, *c*).

Consecuencias inmediatas de las definiciones anteriores son:

TEOR. 1. *Todo conjunto en* $\mathbf{E}_n$ *de extensión nula, es también de medida nula, pero no recíprocamente* (ejemplos 3 a 5).

TEOR. 2. *Todo conjunto finito o numerable es de medida nula.* Pues para cada $\varepsilon > 0$, si se cubren los puntos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, ..., con entornos de extensión $\varepsilon/2$, $\varepsilon/2^2$, $\varepsilon/2^3$, ..., resulta una extensión total menor que ε, número que puede elegirse arbitrariamente pequeño.

TEOR. 3. *La unión (en particular la suma disjunta) de conjuntos de medida nula, en número finito o infinito numerable, es un conjunto de medida nula.* Basta aplicar la misma demostración que en el teor. 2.

EJEMPLOS 3-5. Por ser numerables (§ 2-11), tienen medida nula: 1º, el conjunto de los números racionales; 2º, el conjunto binario, formado por los puntos de la escala natural, sus puntos medios, los medios entre cada dos consecutivos, etc.; en suma todos los expresados en sistema binario (Cap. I, nota II) con número *finito* de cifras 0 y 1; 3º, todos los puntos de la *red decimal*, es decir, expresados con número finito de cifras 0 a 9.

Todos estos conjuntos son *densos* (§ 64-4, nota 2), es decir, hay puntos del conjunto en todo intervalo; el complementario carece de puntos interiores; el derivado (§ 64-4, nota 2) es todo el intervalo básico $[a, b]$. Por tanto, ninguno de estos conjuntos de medida nula, es de extensión nula.

NOTA 2. Todos estos conjuntos densos, son *numerables*; y será buen ejercicio la enumeración efectiva de cualquiera de ellos (preferible el binario), convenciéndose de que los infinitos intervalos con que se cubren sus puntos, no solamente no cubren todo el intervalo (0, 1), como engañosamente nos hace creer la intuición, sino que cubren una longitud arbitrariamente pequeña, por ser conjuntos de medida nula, aunque no son de extensión nula. Elíjase por ejemplo la amplitud $a = 1/16$ del entorno de $x_1 = 1/2$, su mitad para $x_2 = 1/4$, etc., y se verá cómo quedan puntos $(1/3, 1/5, \sqrt{2}/2, \ldots)$ sin cubrir. Recíprocamente: elegido un punto del complementario, por ejemplo $\sqrt{2}/3$, tómese un valor de *a* suficientemente pequeño para que quede sin cubrir.

EJEMPLO 6. *Conjunto de* CANTOR. — Fué definido en § 50-2, nota 3

como complementario del conjunto de intervalos centrales abiertos en la división ternaria del segmento (0, 1). Puesto que, al excluir el tercio central, la longitud total de los dos intervalos que cubren el conjunto es 2/3; y, en general, la longitud total de los intervalos que contienen el conjunto en cada etapa, es $(2/3)^n$, que puede hacerse arbitrariamente pequeña, resulta: *el conjunto de* CANTOR *es de extensión nula y, por tanto, de medida nula* (§ 50-2, nota 3).

3. **Condiciones de integrabilidad** (R). — Como en el caso de una variable (§ 48-3, *b*), por la continuidad *uniforme* de $f(x, y)$ en *R* cerrado (§ 65-3, nota 2), toda función *continua* en un rectángulo *cerrado* será integrable (R), pues para cada $\varepsilon > 0$ la oscilación (§ 49-1) será $\omega_r = M_r - m_r < \varepsilon$, en toda partición en intervalos suficientemente pequeños, por tanto:

[82-5] $$S - s = \Sigma(M_r - m_r)\,\delta_r < \varepsilon\Sigma\delta_r ,$$

y siendo $\Sigma\delta_r$ el área de *R*, resulta la contigüidad de las dos clases *s* y S.

De igual modo que en el caso de una variable (§ 48-3, *d*), la existencia de integral en *R* subsiste para las funciones con discontinuidades de extensión nula, esto es, susceptibles de ser encerradas en número finito de intervalos de área total arbitrariamente pequeña, y entonces, en la expresión [82-5] los sumandos que aportan esas mallas de áreas $<\varepsilon$ tienen suma menor que $\varepsilon \cdot 2K$ si en *R* se conserva $-K < f(x, y) < K$; luego subsiste la contigüidad de las dos clases. Por tanto:

TEOR. 1. *Es integrable en un rectángulo R toda función acotada cuyo conjunto de discontinuidad tiene extensión nula.*

En particular, si $f(x, y)$ es continua en un dominio D, contenido en un rectángulo *R*, puede ampliarse a éste su definición, poniendo $f(x, y) = 0$ en los puntos de *R* no pertenecientes a D, y resulta así una función que sólo es discontinua en la frontera de D; y, por tanto:

TEOR. 2. *Es integrable toda función acotada continua en el interior de un dominio* D *cuya frontera tiene extensión (superficial) nula.*

Tal sucede en el caso más frecuente en que la frontera está formada por una o varias curvas compuestas de número finito de arcos monótonos, o, más general, por una curva rectificable (§ 82-2, nota 1). Su valor lo designaremos por

[82-6] $$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy .$$

NOTA. Los teoremas anteriores dan sólo condiciones suficientes de integrabilidad (R), aunque sean las que más suelen aplicarse en la práctica.

Las condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad (R) en E_n son las mismas que las vistas en el caso de una variable (§ 49-1 y Cap. XIII, nota III), con las mismas demostraciones. Así tendremos:

Para la *existencia de la integral* (R) de una función *acotada* $f(x, y)$ en un rectángulo *R*, es *condición necesaria y suficiente* que se cumpla una cualquiera de las tres siguientes:

1º) *Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una partición* [82-1] *tal que sea* $\Sigma\omega_r\delta_r < \varepsilon$ (RIEMANN);

2º) *Para cada número* $\omega > 0$, *el conjunto de puntos* **x** *de oscilación* $\omega(\mathbf{x}) \geqslant \omega$ *es de extensión nula* (DU BOIS REYMOND);

3º) *El conjunto de puntos de discontinuidad* (*es decir, de oscilación* $\omega(\mathbf{x}) > 0$) *es de medida nula* (LEBESGUE).

4. **Cálculo de integrales dobles por integrales reiteradas.** — El cálculo elemental de volúmenes a la manera de CAVALIERI (Cap. XIII, nota I), por descomposición en discos, así como la suma por filas (columnas) de las series dobles (§ 81-2), sugiere que si la base es rectangular, el valor de la integral doble [82-3] vendrá expresado por la integral reiterada

[82-7] $$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy \quad , \quad \text{o bien} \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx \quad ,$$

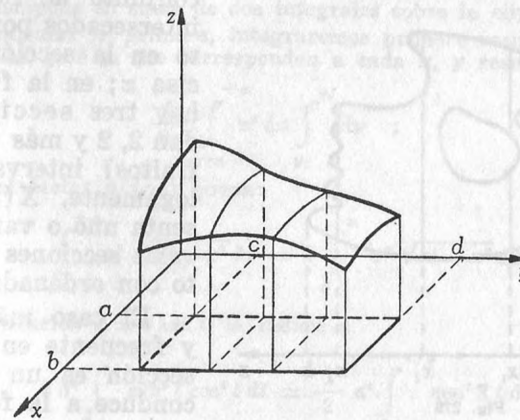


Fig. 278

donde en cada caso (fig. 278) la *integral interior*

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy \quad ,$$

respectivamente

$$B(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \quad ,$$

representa el área de la sección del sólido con el plano $x = \text{const.}$ [$y = \text{const.}$], y las [82-7] se escriben

$$\int_a^b \mathrm{A}(x)\,\mathrm{d}x \;, \quad \int_c^d \mathrm{B}(y)\,\mathrm{d}y. \quad (\text{Cfr. § 54-4}).$$

Pero si prescindimos de toda consideración intuitiva se plantea el problema siguiente: 1º ¿Existen estas integrales? 2º ¿Son iguales entre sí y a la integral doble sobre R?

Analizaremos después (§ 82-5) tipos de condiciones que aseguran la existencia de las tres integrales, lo que implicará que deben ser iguales, incluso si estamos en el caso [82-6]; así se obtiene

[82-8] $$\iint_D \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\mathrm{Y}(x)} \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\mathrm{X}(y)} \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}x \;,$$

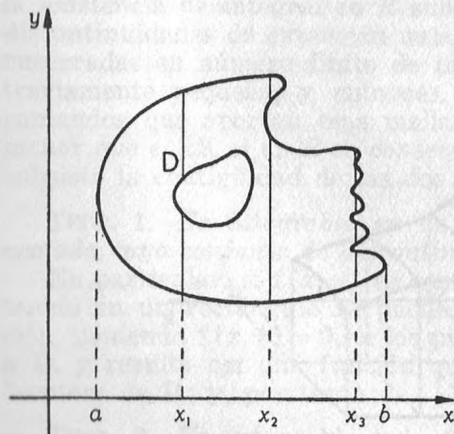


Fig. 279

donde $\mathrm{Y}(x)$ designa el conjunto de intervalos * intersecados por el recinto en la sección de abscisa x; en la figura 279 hay tres secciones que dan 2, 2 y más (acaso infinitos) intervalos. Análogamente, $\mathrm{X}(y)$ representa uno o varios intervalos secciones del recinto con ordenada y.

El caso más sencillo y frecuente en que cada sección es un intervalo, conduce a la fórmula:

[82-9] $$\iint_D \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\mathrm{y}_0(x)}^{\mathrm{y}_1(x)} \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\mathrm{x}_0(y)}^{\mathrm{x}_1(y)} \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}x \;,$$

designando por $\mathrm{y}_0(x)$ la función definida por el arco inferior del contorno e $\mathrm{y}_1(x)$ por el superior; $\mathrm{x}_0(y)$ está definido por el arco de la izquierda y $\mathrm{x}_1(y)$ por el de la derecha.

* De la definición de recinto dada en § 64-5 resulta que la sección de un recinto está formada por intervalos en número finito o infinito numerable (§ 94-2) como conjunto abierto; en ambos casos existe la integral simple (R).

Ejemplos: 1. Si el recinto D es el triángulo formado por ambos ejes y la recta r de ecuación $x + y = 1$, se tendrá

$$\iint_D \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Por ejemplo, el segundo miembro resulta de sumar primero los elementos de volumen correspondientes a una sección de abscisa x [integral interior entre $y = 0$ (eje x) é $y = 1 - x$ (recta r)] y de sumar luego (fig. 280) estas secciones de espesor infinitésimo $\mathrm{d}x$, entre $x = 0$ (eje y) y $x = 1$ (intersección de r con el eje x).

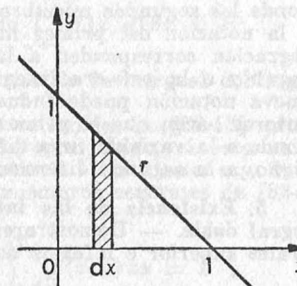


Fig. 280

2. Calculemos el volumen del cuerpo limitado por el plano xy, el paraboloide elíptico $z = (x^2/2p) + (y^2/2q)$ y el cilindro $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.

Este volumen será:

$$V = \iint \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;,$$

que se descompone en suma de dos integrales sobre la elipse base.

Para calcular la primera, integraremos primero respecto de y entre las ordenadas y_1 é y_2 que corresponden a cada x, y resulta:

$$\frac{1}{2p} \int_{-a}^{+a} x^2\,\mathrm{d}x \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \;;$$

separando el factor $b/(pa)$ queda:

$$\int_{-a}^{+a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2 \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

La sustitución $x = a \operatorname{sen} t$, la reduce a

$$2\,a^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,a^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\,t\,\mathrm{d}t$$

que se calcula pasando al arco doble (§ 51-4, b), y resulta $\pi a^4/8$, luego la integral doble vale $\pi a^3 b/(8p)$, y la otra $\pi a b^3/(8q)$; por consiguiente:

$$V = \frac{1}{8}\,\pi\,ab \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right).$$

En particular, si los parámetros del paraboloide son $p = a$, $q = b$, resulta:

$$V = \frac{1}{8}\,\pi\,ab\,(a + b) = \text{base} \,.\, \frac{1}{8}\,(a + b).$$

Si el cilindro fuese el proyectante de la sección plana $z = h$, es decir: $a^2 = 2ph$, $b^2 = 2qh$, resultaría:

$$V = \frac{1}{2}\;\pi\,abh = \frac{1}{2}\,\text{base} \times \text{altura}.$$

NOTA. Los miembros segundo y tercero de [82-9] suelen indicarse también respectivamente así:

$$\int_a^b \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy\,dx \equiv \int_a^b \left\{ \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy \right\} dx \;;$$

$$\int_c^d \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx\,dy \equiv \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx \right\} dy \;,$$

donde los segundos miembros indican el significado que en general se da a la notación del primer miembro: los límites del *segundo* signo de integración corresponden a la variable cuya diferencial figura en *primer* lugar y a la *primera* integración (integral interior). Sin embargo, esta nueva notación puede inducir a confusión, tanto más cuanto que otros autores hacen que el primer signo de integración con sus límites corresponda a la variable cuya diferencial figura en primer lugar y el segundo signo, a la segunda diferencial, con orden de integración también confuso.

5. Existencia de las integrales reiteradas y su igualdad con la integral doble. — Demostraremos que si la integral doble existe, las integrales superior e inferior de DARBOUX (§ 49-2):

[82-10] $$\overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx \;,\; \underline{\int_a^b} f(x,y)\,dx$$

pueden ser distintas sólo en un conjunto y de medida nula (§ 82-2). Aunque dichas integrales inferior y superior [82-10] tomen valores distintos para ciertos valores de y, puede suceder que *existan y sean iguales las integrales reiteradas*:

[82-11] $$\int_c^d dy \underline{\int_a^b} f(x,y)\,dx = \int_c^d dy \overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx \;,$$

en cuyo caso diremos también que la integral reiterada existe con valor [82-11]. Tal ocurre cuando existe la integral doble, por demostración del teorema siguiente:

TEOR. *Si existe la integral doble de* $f(x,y)$ *en el rectángulo* R: $(a \leqslant x \leqslant b,\; c \leqslant y \leqslant d)$, *existe la integral simple*

$$\int_a^b f(x,y)\,dx \;,$$

excepto, a lo más, en un conjunto y de medida nula en $[c,d]$, *y entonces existe también la integral reiterada y es*

[82-12] $$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int\int_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Análogamente para

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int\int_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

En efecto, respecto de la partición [82-1], con la notación de § 82-1 es

$$m_r\,\Delta x_r \leqslant \underline{\int_{x_r}^{x_{r+1}}} f(x,y)\,dx \leqslant \overline{\int_{x_r}^{x_{r+1}}} f(x,y)\,dx \leqslant M_r\,\Delta x_r \;,$$

y por ser válida respecto de las integrales inferior y superior de DARBOUX la propiedad aditiva *respecto del intervalo* (§ 48-5, *a*, con la misma demostración; íd. § 49-2, nota):

$$\sum_a^b m_r\,\Delta x_r \leqslant \underline{\int_a^b} f(x,y)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx \leqslant \sum_a^b M_r\,\Delta x_r.$$

De aquí, sacamos del mismo modo:

$$\Delta y_s \sum_a^b m_r\,\Delta x_r \leqslant \int_{y_s}^{y_{s+1}} dy \underline{\int_a^b} f(x,y)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{y_s}^{y_{s+1}} dy \overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx \leqslant \Delta y_s \sum_a^b M_r\,\Delta x_r \;,$$

[82-13] $$s \leqslant \underline{\int_c^d} dy \underline{\int_a^b} f(x,y)\,dx \leqslant \overline{\int_c^d} dy \overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx \leqslant S \;,$$

donde s y S son las sumas inferior y superior de la integral doble para la partición considerada.

En el caso de existencia de la integral reiterada, la [82-13] prueba ya la igualdad de su valor con el de la integral doble, si ésta existe. Pero en todo caso, si son contiguas con frontera I las clases s y S respecto de todas las particiones, como los dos miembros centrales de [82-13] no dependen ya de éstas, debe ser

[82-14] $$\underline{\int_c^d} dy \underline{\int_a^b} f(x,y)\,dx = \overline{\int_c^d} dy \overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx = I \;,$$

que tiene como fácil consecuencia la existencia de la integral reiterada con valor I, como vamos a ver.

Si designamos por M_δ al extremo superior de una función $G(y)$, en un entorno de y_0, es M_δ decreciente con la semiamplitud δ del entorno. Por tanto, existe (§ 78-1, teor. 2) el lim M_δ para $\delta \to 0$. que llamaremos *máximo* de $G(y)$ en el punto y_0. Entonces, al variar y_0, resulta una función introducida mediante:

DEF. Se llama *función superior* $\overline{G}(y)$ de $G(y)$ a la formada por los máximos de ésta en cada punto. Análogamente se define la *función inferior* $\underline{G}(y)$ de la $G(y)$ como la formada por los *mínimos* de ésta en cada punto.

Si llamamos

$$g(y) = \underline{\int_a^b} f(x,y)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx = G(y) \;,$$

en § 95-4, teor. 8, demostraremos que las integrales inferior y superior de DARBOUX son integrales de LEBESGUE de las funciones inferior y superior del integrando, es decir, por [82-14] se cumple:

$$\underline{\int_c^d} g(y)\,dy = (L)\int_c^d \underline{g}(y)\,dy = (L)\int_c^d \overline{G}(y)\,dy = \overline{\int_c^d} G(y)\,dy \;,$$

donde $\underline{g}(y) \leqslant g(y) \leqslant G(y) \leqslant \overline{G}(y)$.

También demostraremos (§ 95-2, teor. 9) que siendo

$$(L)\int_c^d [\overline{G}(y) - \underline{g}(y)]\,dy = 0 \;,$$

con integrando no negativo, es $\overline{G}(y) = \underline{g}(y)$, a menos de un conjunto de medida nula $y \in [c,d]$. Por lo tanto, ocurre lo mismo para $g(y) = G(y)$, es decir existe (§ 49-2) la integral de RIEMANN

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

a menos de un conjunto de medida nula $y \in [c,d]$. Esto no modifica el

valor y la existencia de la integral (R) en $[c, d]$ (Cap. XIII, nota III), deduciéndose así de [82-14] la fórmula [82-12], como queríamos demostrar.

NOTAS: 1. Obsérvese la diferencia con las series y sucesiones dobles (§ 81-1, ejemplo 3).

2. Pueden existir ambas integrales reiteradas y aun ser iguales sin que exista la integral doble, como demostró THOMAE. (Cfr. § 81-1, ejemplo 4). Cabe finalmente, que existan y sean desiguales las integrales reiteradas cuando no hay integral doble.

EJEMPLOS: 1. Sea la función $f(x, y)$ definida en el cuadrado unidad $Q(0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$, tal que valga 1 si x es racional y $2y$ si x es irracional. Entonces, para todo x existe

$$\int_0^1 f(x, y)\,dy = 1 ,$$

y por tanto existe

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\,dy = 1.$$

En cambio, para $y \neq \frac{1}{2}$, no existe

$$\int_0^1 f(x, y)\,dx ,$$

ni tampoco existe la integral doble

$$\int\int_Q f(x, y)\,dx\,dy ,$$

pues los respectivos integrandos son discontinuos en todo punto (§ 82-3, nota).

2. Sea la función $f(x, y)$ definida en el cuadrado unidad, tal que valga 0, excepto en los puntos $\xi = (2m+1)/2^n$, $\eta = (2p+1)/2^q$, donde $f(\xi, \eta) = 1/2^n$, con m, n, p, q números naturales cualesquiera. Aunque sea

$$\overline{\int_0^1} f(\xi, y)\,dy = 1/2^n > \underline{\int_0^1} f(\xi, y)\,dy = 0 ,$$

la integral doble existe y también con igual valor las integrales reiteradas en el sentido antes indicado. [Este ejemplo de DU BOIS REYMOND (1883), fué impugnado por STOLZ (1899), injustificadamente, al no tomar en cuenta que pueda existir la integral de RIEMANN, aunque el integrando no esté ni definido en un conjunto infinito, si éste es de medida nula].

EJERCICIOS

1. Calcular $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x + y)\,dy = 2a^3/3.$

2. Calcular $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - ax}} (ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy = 2a.$

3. Calcular $\int_0^b dx \int_x^{10x} \sqrt{xy - x^2}\,dy = 6b^3.$

4. Calcular $\int_0^\pi \int_0^{a(1 + \cos\theta)} r^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,dr.$

5. Calcular $\int\int (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy$ sobre el cuadrado $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

6. Calcular $\int\int \frac{x^3 + y^3 + 3xy(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$ sobre el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

§ 83. INTEGRALES MÚLTIPLES. CAMBIO DE VARIABLES

1. Reducción de integrales múltiples a integrales simples. — El concepto de integral doble dado en § 82-1 es aplicable a cualquier número de variables, con leves cambios de palabras.

Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o brevemente $f(\mathbf{x})$, una función del punto $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definida en el intervalo n-dimensional

$$I^n(a_k \leqslant x_k \leqslant b_k) \quad , \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad ;$$

descompuesto por coordenadas intermedias en intervalos parciales I^n_r llamaremos *volumen* de cada uno al producto $\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \ldots \Delta x_n$ de sus dimensiones, representándolo por δ_r, y llamemos m_r, M_r a los extremos de $f(\mathbf{x})$ en I^n_r. Entonces, si las sumas

$$s = \Sigma m_r \delta_r \quad , \quad S = \Sigma M_r \delta_r \quad ,$$

para todas las particiones posibles de I^n forman clases contiguas, su número frontera se llama *integral n-ple* de $f(\mathbf{x})$ sobre I^n, y se designa de estos modos:

$$[83\text{-}1] \quad \int_{I^n} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{I^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n \quad ;$$

con la primera notación es indispensable la indicación del número n de variables o coordenadas del punto $\mathbf{x}$.

Como el teorema de HEINE (§ 65-3, nota 2) es aplicable a cualquier número de variables, resulta esta contigüidad si $f(\mathbf{x})$ es continua; y también si existe un conjunto de medida nula de puntos de discontinuidad, es decir, contenido en número finito o infinito numerable de intervalos de volumen total arbitrariamente pequeño (§ 82-3, nota).

La misma demostración dada en § 82-5 es aplicable para las integrales reiteradas y resulta el teorema fundamental:

TEOR. *Si $f(\mathbf{x})$ es integrable en I^n, también existe la integral reiterada de cualquier orden, y todas ellas son iguales a la integral múltiple*:

$$[83\text{-}2] \int_{I^n} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{a_n}^{b_n} dx_n \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1} \ldots \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{x})\,dx_1.$$

Si $f(\mathbf{x})$ está definida en un recinto contenido en I^n, de tal modo que al fijar $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$, varía $\mathbf{x}$ en un intervalo

función de éstas, puede considerarse aplicable la fórmula anterior entendiendo que a_1 y b_1 son funciones de $x_2, x_3, \ldots, x_n$; a_2 y b_2 lo son de $x_3, \ldots, x_n$; y, por último, a_n y b_n son los números extremos entre los que varía x_n.

Refiriéndonos especialmente al caso $n = 3$, de máximo interés, y usando la notación x, y, z, la fórmula de reducción en el orden z, y, x, es:

$$[83\text{-}3] \qquad \int_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} dy \int_{z_0(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x, y, z)\,dz \,,$$

debiendo deducirse $z_0(x, y)$, $z_1(x, y)$ de la superficie frontera de D; $y_0(x)$, $y_1(x)$ de la frontera de la proyección sobre el plano xy; y, finalmente, los números x_0, x_1 son los extremos de la proyección sobre el eje x.

Ejemplo. Calculemos $\int\int\int z\,dx.dy.dz$ sobre el octante de esfera de centro 0 y radio R limitado por el triedro de los semiejes positivos.

La reduciremos a tres integrales simples, por ejemplo, en este orden: Integrando respecto de z resulta $\frac{1}{2}z^2$, y limitando entre $z = 0$ y $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (frontera del octante de esfera) resulta $\frac{1}{2}(R^2 - x^2 - y^2)$; integrando respecto de y (con límites determinados por la frontera del cuadrante de círculo proyección sobre el plano xy) y luego respecto de x, resulta:

$$\frac{1}{2}\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2 - x^2 - y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R dx[\sqrt{R^2 - x^2}(R^2 - x^2) - \tfrac{1}{3}(R^2 - x^2)^{3/2}] = \frac{1}{3}\int_0^R (R^2 - x^2)^{3/2}\,dx$$

y haciendo el cambio de variable $x = R \operatorname{sen} \varphi$, se transforma esta integral en

$$R^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi\,.\,d\varphi$$

cuyo valor se obtiene pasando al arco doble y después al cuádruplo (§ 51-4, b); tomando el resultado de cualquier tabla de integrales (véase Cap. XIV, nota I ó [53-7]), resulta $3\pi/16$, luego la integral triple que representa el octante esférico respecto del plano xy, vale $\pi R^4/16$. Más ventajoso es emplear coordenadas esféricas (§ 84-2).

Nota. También se suele indicar el segundo miembro de [83-2] por la notación confusa (ver § 82-4, nota):

$$\int_{a_n}^{b_n}\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots\cdots \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

donde los límites del *último* signo de integración corresponden a la variable (x_1) indicada en *primer* lugar y a la *primera* integración, aun cuando ciertos autores usan también otra convención en la correspondencia y orden de los signos de integración.

2. Generalización del concepto de integral. — En la definición de integral doble (§ 82-1) hemos supuesto, para mayor sencillez, que el recinto D se divida en una red de rectángulos por paralelas a ambos ejes, pero igualmente puede adoptarse cualquier otra división en mallas de forma arbitraria (fig. 281) y área elemental dada (§ 48-1), con la sola condición de que su diámetro (§ 82-1, b) tienda a cero. La contigüidad de las sumas s y S, por defecto y por exceso, subsiste si la función es continua, salvo un conjunto de medida nula (§ 82-3, nota), incluído en él la frontera de D.

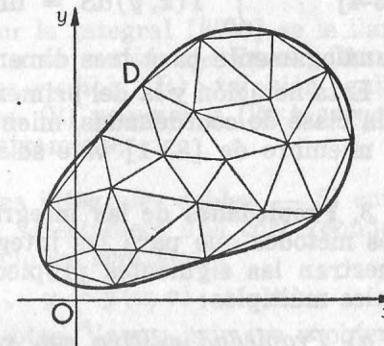


Fig. 281

Nota. Teniendo en cuenta esta generalización del concepto de integral doble, la notación de Leibniz, que hasta aquí hemos usado y que tan ventajosa resulta en las integrales simples, puede inducir a transformaciones erróneas de las integrales múltiples al cambiar de variables.

Ejemplo. Sea $x = u + v$, $y = u - v$. Si llevados de la analogía sustituímos

$$dx = du + dv \quad , \quad dy = du - dv \quad , \quad dx\,.\,dy = du^2 - dv^2$$

resultará una expresión sin sentido.

Obsérvese en la figura 282 que el cuadrado de lado 1 en el plano xy se transforma en el cuadrado de lado 1 en el plano uv, con sentido opuesto. En § 83-4 veremos el significado de esto y explicaremos cómo se efectúa el cambio de variables.

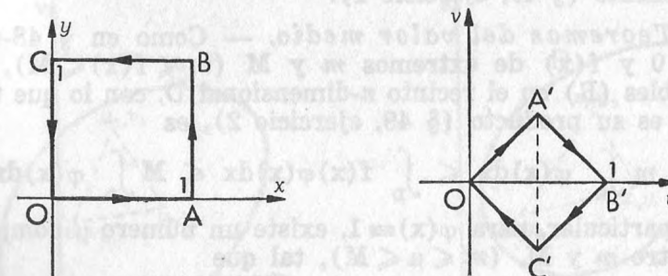


Fig. 282

Es preferible, por tanto, la notación más general:

$$\int_D f(x, y)\,dS \quad \text{y análogamente} \quad \int_D f(x, y, z)\,dV$$

representando por dS el elemento de área y por dV el elemento de volumen, siendo por definición (§ 81-1, b):

[83-4] $$\int_D f(x,y)\,dS = \lim \Sigma_D f(x_r, y_r)\Delta S_r$$

y análogamente para tres dimensiones.

Esta notación y la del primer miembro de [83-1] valen para toda clase de coordenadas, mientras que la notación del segundo miembro de [83-1] vale solamente para cartesianas.

3. **Propiedades de las integrales múltiples.** — Por los mismos métodos que para las integrales simples (§ 48-5), se demuestran las siguientes propiedades importantes de las integrales múltiples:

a) *Propiedad aditiva con respecto al recinto de integración.* — Si D, D_1, D_2 son recintos cuyas fronteras tienen medida n-dimensional nula (§ 82-2), tales que D_1 y D_2 son no rampantes y es $D = D_1 + D_2$, basta que $f(\mathbf{x})$ sea integrable (R) en D_1 y D_2 para que exista y sea

[83-5] $$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{D_2} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

b) *Propiedad lineal respecto del integrando.* — Referida a funciones integrables (R) en D, subsiste la fórmula de § 48-5, b_3, cambiando x por $\mathbf{x}$.

c) *Propiedades de monotonía.* — Subsisten las fórmulas [48-28] y [48-29] referidas a un recinto n-dimensional D, cambiando x por $\mathbf{x}$, con la observación subsistente de que si $f(\mathbf{x})$ es integrable (R) en D, también lo es $|f(\mathbf{x})|$, pero no recíprocamente (§ 49, ejercicio 1).

d) *Teoremas del valor medio.* — Como en § 48-6, si $\varphi(\mathbf{x}) \geqslant 0$ y $f(\mathbf{x})$ de extremos m y M ($m \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant M$), son integrables (R) en el recinto n-dimensional D, con lo que también lo es su producto (§ 49, ejercicio 2), es

[83-6] $$m\int_D \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leqslant \int_D f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leqslant M\int_D \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

En particular, para $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 1$, existe un número μ comprendido entre m y M, ($m \leqslant \mu \leqslant M$), tal que

[83-7] $$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mu\,|D| \quad ,$$

donde $|D|$ designa la "extensión n-dimensional" o "hipervolumen" del recinto D. En términos precisos, para un recinto cualquiera D, *cuya frontera tenga medida n-dimensional nula* (§ 82-2), existe (§ 83-1):

[83-8] $$(R)\int_D d\mathbf{x} = |D| \quad ,$$

y entonces se establece:

DEF. Al valor $|D|$ dado por la integral [83-8] se le llama *extensión n-dimensional* de D, o su *medida de* PEANO-JORDAN (cfr. § 95-1), diciendo que D es *medible* (R); también se dice que tiene (R) *longitud*, (R) *área*, (R) *volumen* o (R) *hipervolumen* en E_1, E_2, E_3 ó E_n respectivamente.

4. **Cambio de variables en las integrales dobles.** — Si entre los planos cartesianos uv y xy se establece una correspondencia punto a punto por las funciones *continuas*:

[83-9] $$x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v) \quad ,$$

cada recinto se transforma en otro. Vamos primero a obtener la relación entre las áreas.

Supongamos que dado un recinto Ω del plano uv (fig. 283) cuya frontera esté formada por una curva rectificable simple cerrada, *las funciones* [83-9] *tengan derivadas primeras continuas* en un recinto que contenga en su interior al *recinto cerrado* $\overline{\Omega}$ que forma la clausura de Ω (§ 64-5), de modo que el jacobiano

[83-10] $$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

nunca sea nulo en $\overline{\Omega}$. Entonces, el recinto Ω se transforma mediante [83-9] en un recinto D del plano xy, de manera que se establece entre ambos una correspondencia que localmente ya es biunívoca (§ 67-7), *pero supongamos lo es también globalmente* *, y llamémosla directa o inversa según sea $J \gtrless 0$, conser-

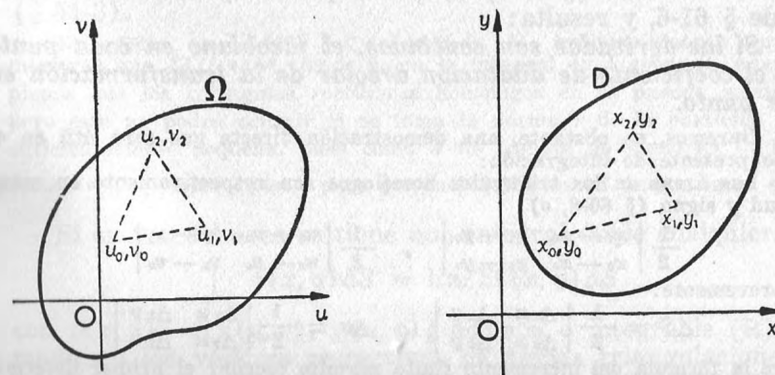


Fig. 283

* No siempre ocurre así. Tal la $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ que aplica la corona circular $1 \leqslant u^2 + v^2 \leqslant 4$ doblemente sobre la $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16$, con $J = 4(u^2 + v^2) > 0$, ya que (u_0, v_0) y $(-u_0, -v_0)$ tienen el mismo punto correspondiente (x_0, y_0).

vándose o cambiando el sentido de los respectivos contornos (§ 54-1, *d*; cfr. § 88-5, *a*) de Ω y D según uno u otro caso. Toda línea cerrada en D de extremos $P_0 = P_1$ es correspondiente de una línea cerrada en Ω, pues siendo biunívoca la correspondencia, deben ser también coincidentes en Ω los puntos correspondientes a los extremos $P_0 = P_1$. Por tanto, se corresponden los puntos interiores de Ω y D, y también sus contornos de manera que el de D será también una curva rectificable simple cerrada (§ 55-9). Además ambos recintos Ω y D serán medibles (R), es decir, tendrán (R) área o extensión (§ 83-3, *d*, def.).

El área del recinto Ω puede calcularse como límite de la suma de áreas $\Delta\sigma$ de triángulos *equiláteros* cuyos lados tiendan a cero (§ 83-2) o para su mejor generalización a espacios de más de dos dimensiones (§ 83-5), en *cuadrados elementales* de norma *r*, *subdivididos en dos triángulos* por una de sus diagonales; y el área de D como límite de la suma de las áreas ΔS de los triángulos formados por los vértices homólogos (sin querer decir con esto que los lados de uno se transformen en los del otro por las fórmulas [83-9]).

La relación existente entre las áreas de los triángulos homólogos es ésta:

$$[83\text{-}11] \qquad \Delta S = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + o \right) \Delta\sigma \ ,$$

$$\text{o sea:} \quad \lim \frac{\Delta S}{\Delta\sigma} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = J \ ,$$

siendo $J \neq 0$ el jacobiano en un punto interior arbitrariamente elegido, al tender a 0 el entorno triangular del mismo.

En efecto, en el entorno infinitésimo la transformación, salvo infinitésimos de orden superior, es lineal, con determinante o módulo (§ 15-7) J, con lo que es aplicable el teorema 6 de § 61-6, y resulta:

Si las derivadas son continuas, el jacobiano en cada punto es el coeficiente de dilatación areolar de la transformación en ese punto.

Daremos, no obstante, una demostración directa que será útil en el caso presente de integración:

Las áreas de los triángulos homólogos son respectivamente en magnitud y signo (§ 60-6, *e*):

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} \ , \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 - u_0 & v_1 - v_0 \\ u_2 - u_0 & v_2 - v_0 \end{vmatrix} \ ,$$

o brevemente:

$$\Delta S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y \\ \Delta_2 x & \Delta_2 y \end{vmatrix} \ , \quad \Delta\sigma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_1 v \\ \Delta_2 u & \Delta_2 v \end{vmatrix} \ ;$$

pero la fórmula del incremento finito permite escribir el primer determinante así:

$$\begin{vmatrix} x_u \Delta_1 u + x_v \Delta_1 v & y_u \Delta_1 u + y_v \Delta_1 v \\ x_u \Delta_2 u + x_v \Delta_2 v & y_u \Delta_2 u + y_v \Delta_2 v \end{vmatrix} + \delta r^2 \ ,$$

puesto que los sumandos $o(r)$ (siendo r la longitud del lado del triángulo equilátero en Ω o de la diagonal del cuadrado elemental) que aparecen en cada elemento del determinante dan un término $o(r^2)$, por ser menores que r los incrementos de u y v; y siendo continuas las derivadas en el recinto *cerrado* $\overline{\Omega}$, y, por tanto, uniformemente continuas (§ 65-3, teorema de HEINE-CANTOR), el coeficiente δ (función entera de infinitésimos respecto de r) es menor que ε tomando suficientemente pequeños los triángulos. Como r^2 es menor que el triple (o igual al cuádruple) del área de cada triángulo, resulta que la suma de esos términos es menor que ε por el triple (o cuádruple) del área de Ω, es decir, arbitrariamente pequeña.

En efecto, descomponiendo el determinante en producto de dos (§ 13-6), resulta:

$$\Delta S = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_1 v \\ \Delta_2 u & \Delta_2 v \end{vmatrix} + \delta \cdot r^2 \ , \quad |\delta| < \varepsilon \ ,$$

o sea

$$[83\text{-}12] \qquad \Delta S = \Delta\sigma[J(\xi,\eta) + \delta\theta] \quad \text{con} \quad \theta = r^2/(\Delta\sigma) \ , \ |\theta| \leqslant 4 \ ,$$

pues el área de cada triángulo *equilátero* de la red en que se ha subdividido Ω, es $|\Delta\sigma| = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,r^2$, o bien, para *mitades de cuadrados* elementales es $|\Delta\sigma| = r^2/4$.

En el caso de tomar en el plano *uv* esta clase de entornos triangulares, queda así demostrada la fórmula [83-11], completamente análoga a la ya conocida del cambio de variable en la recta (§ 51-3): $dx = (dx/du)\,du$.

El área del recinto D puede calcularse como límite de la suma de triángulos contenidos en él, y al haber supuesto que J no cambia de signo en Ω, por lo que se suman los ΔS con igual signo, resulta:

$$[83\text{-}13] \qquad |D| = \int\!\!\int_D dx\,dy = \int\!\!\int_\Omega \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \ ,$$

o brevemente:

$$\int_D dS = \int_\Omega J(u,v)\,d\sigma \ ,$$

fórmula completamente análoga a la de las integrales simples (§ 51-3).

En efecto, es $|\Sigma\delta\theta\Delta\sigma| < 4\varepsilon\Sigma\Delta\sigma < 4\varepsilon\,|\Omega|$ arbitrariamente pequeño, mientras que $\Sigma J(\xi,\eta)\Delta\sigma$ tiende hacia la integral de J sobre Ω. Acaso se piense que los triángulos *rectilíneos* homólogos en $\overline{D}$ pueden solaparse, pero esto no podrá ocurrir si se toma la norma r de la partición de $\overline{\Omega}$ suficientemente pequeña, pues como J no cambia de signo en $\overline{\Omega}$, basta tomar $\varepsilon < \frac{1}{4}\min|J|$ en $\overline{\Omega}$ para que en [83-12] los ΔS tengan igual signo.

Si en vez del área se tiene una integral doble cualquiera:

$$\int_D f(x,y)\,dS = \lim \Sigma f(x,y)\Delta S \ ,$$

con $f(x,y) = f[x(u,v),\ y(u,v)]$ acotada e integrable (R), tomada en los vértices respectivos de ambas triangulaciones, y se efectúa la sustitución de ΔS por su expresión [83-12], resulta con igual razonamiento la fórmula general:

$$[83\text{-}14] \quad \int_D f(x,y)\,dS = \int_\Omega f[x(u,v),\ y(u,v)]\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,d\sigma \ ,$$

que expresa la integral en el dominio D mediante otra integral sobre el dominio homólogo Ω.

NOTA. La red de triángulos *equiláteros* (o *mitades de cuadrados elementales*) considerada en la partición de Ω, es sólo un medio auxiliar de demostración de [83-14] (permitiéndonos acotar θ en [83-12]); sin embargo, por definición general de integral múltiple (§ 83-2), el valor de cada miembro de [83-14], y también de [83-13], no depende de la forma de la malla con que se calculan las integrales.

EJEMPLO. Sea el momento polar de inercia del dominio D expresado en coordenadas cartesianas y en polares por las integrales (§ 84-7):

$$\int\int (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad , \quad \int\int_\Omega r^2 r\,dr\,d\omega \quad ;$$

esta segunda fórmula se puede establecer directamente, o bien deducirla de la primera por cambio de variables, introduciendo como factor el jacobiano, que se calcula así:

$$x = r\cos\omega \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\omega \quad , \quad \begin{vmatrix} \cos\omega & -r\,\mathrm{sen}\,\omega \\ \mathrm{sen}\,\omega & r\cos\omega \end{vmatrix} = r.$$

En el ejemplo de § 83-2, el jacobiano vale -2, indicando el signo que los elementos de área homólogos tienen sentidos opuestos; como se observa en la figura 282 comparando los sentidos de los contornos homólogos.

5. Cambio de variables en las integrales múltiples. — El método anterior (§ 83-4) es aplicable a toda integral múltiple, si se supone conocida la fórmula que expresa el volumen del tetraedro en $\mathbf{E}_3$ o, en general, del *simple* en $\mathbf{E}_n$ (hiperpoliedro de $n+1$ vértices), por el determinante de las coordenadas de sus vértices con su línea de unos, o bien por el determinante de orden n formado con las diferencias, si en vez de tomar mitades de cuadrados, se toman cubos o hipercubos descompuestos en $3!$ tetraedros o en $n!$ simples.

Basta observar, en efecto, que la demostración anterior se basa en la regla de CAUCHY-BINET para el producto de dos determinantes (§ 13-6), según la cual al substituir cada incremento Δx por su expresión mediante las derivadas, equivale a multiplicar el determinante de incrementos por el determinante de derivadas, que es el jacobiano, siendo también uniformemente infinitésimo el coeficiente de r^2 en el error, por la continuidad de las derivadas. Resulta así, con la misma hipótesis de acotación e integrabilidad de $f(x)$, conservación del signo de J y continuidad de las n derivadas:

$$\int_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_\Omega J(\mathbf{u})\,f[\mathbf{x}(\mathbf{u})]\,d\mathbf{u} \quad ,$$

si los recintos D y Ω son homólogos en la transformación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$, entre los puntos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$ de los dos espacios.

6. Coordenadas espaciales curvilíneas. — *a*) Si el punto variable (u, v, w) recorre un ortoedro, y x, y, z son funciones continuas de u, v, w, el punto (x, y, z) puede describir un cuerpo tridimensional, superficie, curva, y, en general, un conjunto conexo no clasificable en ninguno de estos tipos; pero si las funciones son diferenciales o, más estrictamente, tienen derivadas primeras continuas y su jacobiano no es nulo, a cada

punto interior del ortoedro corresponde un punto interior del conjunto transformado, puesto que cada punto de un cierto entorno tiene homólogo (x, y, z) en virtud del teorema de las funciones implícitas (§ 67-7).

El volumen del dominio D, con demostración análoga a la hecha para dos variables, es:

$$|D| = \int\int\int_\Omega \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$$

sobre el ortoedro Ω del espacio cartesiano u, v, w. Análogamente se expresa la integral triple de cualquier otra función integrable (R).

Los parámetros u, v, w se llaman *coordenadas curvilíneas*, porque los puntos x, y, z que tienen $u = \text{const.}$, forman una superficie, y estas superficies, con las $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, dividen al espacio en celdas, que son los elementos de volumen de cada cuerpo.

La diferencial de arco se calcula diferenciando x, y, z y sumando los cuadrados, obteniéndose así la fórmula:

[83-15]
$$\begin{aligned} ds^2 = g_{11}\,du^2 &+ 2\,g_{12}\,du\,dv + 2\,g_{13}\,du\,dw + \\ &+ \quad g_{22}\,dv^2 \quad + 2\,g_{23}\,dv\,dw + \\ &\qquad\qquad\qquad + g_{33}\,dw^2 \end{aligned}$$

donde los coeficientes g_{ij} tienen expresiones análogas a los coeficientes [72-45] de GAUSS mediante las derivadas de x, y, z respecto de u, v, w. Resulta, pues, que la métrica en el espacio x, y, z está determinada por estos coeficientes g_{ij}. Así, por ejemplo, el volumen de un dominio viene expresado por la fórmula:

[83-16]
$$V = \int\int\int \sqrt{g}\,du\,dv\,dw$$

siendo g el discriminante (§ 62-1) de la forma cuadrática, o sea, el determinante de los nueve números g_{ij}, en valor absoluto. Obsérvese que en el caso de dos variables u, v, el discriminante es [72-57], y resulta la fórmula [84-17].

Si en vez de considerar el espacio ordinario expresado en coordenadas curvilíneas se llama *espacio* a un conjunto de ternas (u, v, w) llamadas *puntos*, definiendo la distancia por una forma cuadrática [83-15] de coeficientes cualesquiera, se tiene un *espacio curvo* de RIEMANN.

b) *Espacio cuadridimensional de* RIEMANN *y relatividad.* — La Física estudia *sucesos* acaecidos en el espacio E_3, cada uno de los cuales está determinado por tres coordenadas espaciales (x, y, z) y una temporal t; entre dos sucesos considera la Física clásica una *distancia espacial* dada por la métrica pitagórica, y una *distancia temporal* $t_2 - t_1$; pero como no son invariantes respecto del grupo de LORENTZ, básico en la Relatividad especial, se adopta la forma cuadrática $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$; y en la Relatividad general se adopta la forma $\sum g_{ij}\,dx_i\,dx_j$ análoga a la [83-15], pero con 4 variables, siendo $x_4 = t$. Los coeficientes g_{ij} están dados por la distribución de materia en el espacio; y la Física relativista es, en esencia, la geometría riemanniana del espacio curvo cuadridimensional.

EJERCICIOS

1. Calcular $\int_0^{2a} dx \int_0^x dy \int_0^y xyz\,dz = 4a^6/3.$

2. Calcular $\int_0^a dx \int_0^{b(a^2-x^2)^{1/2}/a} dy \int_0^{c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}} dz = \pi abc/6.$

3. Calcular $\int\int\int z\,dx\,dy\,dz$

en el recinto $x^2+y^2 \leqslant z^2$; $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

4. Calcular $\int\int\int (x+y+z)x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz$ en el recinto $x+y+z \leqslant 1$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

5. Calcular el volumen del elipsoide $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)=1$ mediante la sustitución $x = ar\cos\theta$, $y = br\operatorname{sen}\theta$.

6. Calcular $\int\int e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy$ sobre el triángulo de vértices (0; 0); (0; 1); (1; 0) aplicando la sustitución $y+x=u$, $y-x=v$.

7. Calcular $\int\int (1+x^2+y^2)^{-2}\,dx\,dy$ sobre el recinto limitado por una hoja de la lemniscata $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ mediante la sustitución $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.

8. Calcular la misma integral anterior sobre el triángulo de vértices (0; 0), (2; 0), (1; $\sqrt{3}$) mediante la sustitución $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.

9. Calcular $\int_0^{a\operatorname{sen} b} dy \int_{y\operatorname{cotg} b}^{\sqrt{a^2-y^2}} \ln(x^2+y^2)\,dx$, con $0 < b < \frac{1}{2}\pi$, empleando coordenadas polares.

§ 84. Aplicaciones de las integrales múltiples

1. Volúmenes en coordenadas cartesianas. — *a*) Hemos calculado en § 54-4 por integral simple el volumen de los cuerpos cuyas secciones paralelas tienen área conocida. Ahora el valor absoluto de la integral triple $\int\int\int dx\,dy\,dz$ es el único número comprendido entre los volúmenes de los ortoedros contenidos y continentes y, por tanto, es el volumen buscado. Todo recinto acotado tiene, pues, un (R) volumen si su frontera tiene medida espacial nula (§ 82-2)*.

Si se trata de calcular la masa M, siendo ρ la densidad variable, función de x, y, z, resulta:

$$[84\text{-}1] \qquad M = \int\int\int_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

NOTA 1. El concepto geométrico de volumen puede introducirse por los mismos postulados que los dados para el área en § 48-1, cambiando "área" por "volumen" y "cuadrado" por "cubo". Ellos bastan para justificar que el proceso de cálculo explicado en § 83-1, en caso de existencia de la integral triple, da el "volumen geométrico". Pero desde este punto de vista geométrico, es fundamental buscar el grupo de transformaciones con respecto al que se conserva invariante (§ 61-7) y así resulta ser una propiedad del espacio métrico propiamente euclídeo (Cap. XVII, nota III, *b*).

* Aun en el caso contrario, la integral inferior, o sea, extr. sup. *s*, expresa el volumen por ser la suma de los volúmenes de los infinitos ortoedros que suman el recinto, prescindiendo del contorno, pero su cálculo sólo puede hacerse en ciertos casos (cfr. Cap. XXIV, nota III).

EJEMPLOS: 1. Volumen V del tetraedro limitado por los planos coordenados y el $(x/a)+(y/b)+(z/c)=1$.
Será

$$V = \int\int\int_V dV = \left| \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz \right| = = \left|\frac{abc}{6}\right|.$$

Si por ejemplo es $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, para que la integración se haga positivamente debe tomarse:

$$V = \int_0^a dx \int_{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}^0 dy \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz = -\frac{abc}{6}.$$

2. Volumen común V al paraboloide $y^2+z^2=2bx$ y al cilindro $x^2+y^2=2ax$, con $a>0$, $b>0$.

Efectuemos primero la integración respecto de z, luego respecto de y, y finalmente respecto de x, con los límites tomados en la forma dicha en § 83-1. Pero en todo caso, es siempre problema delicado estudiar bien los límites de las integrales, en este caso debe cuidarse la integración respecto de y, considerando la situación relativa de la circunferencia $x^2+y^2 = 2ax$ y de la parábola $y^2=2bx$. Así resulta:

Si $b \geqslant a$ es

$$[84\text{-}2] \qquad \frac{1}{4}V = \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{2bx-y^2}} dz,$$

mientras que si $b < a$ es

$$[84\text{-}3] \qquad \frac{1}{4}V = \int_0^{2(a-b)} dx \int_0^{\sqrt{2bx}} dy \int_0^{\sqrt{2bx-y^2}} dz + \int_{2(a-b)}^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{2bx-y^2}} dz.$$

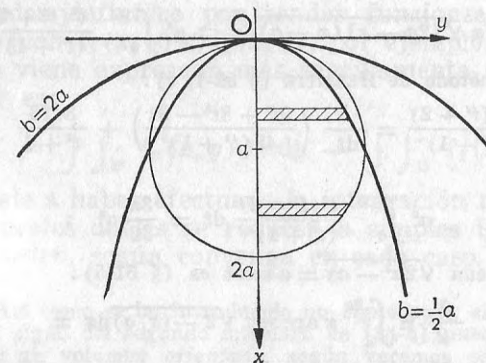


Fig. 284

Por ejemplo, para $b = 2a$ (fig. 284), debe aplicarse [84-2] y es:

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{4ax-y^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sqrt{4a^2 x^2 - x^4}\,dx + 2a\int_0^{2a} x \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{x}{a}}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}a^3 + \frac{1}{2}\pi a^3 ,$$

dando

$$V = \left(\frac{16}{3} + 2\pi\right)a^3 ,$$

pues con $x^2 = t$ es (§ 52-2, a):

$$\frac{1}{2}\int_0^{2a} \sqrt{4a^2 x^2 - x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{4a^2} \sqrt{4a^2 - t}\,dt = \frac{4}{3}a^3 ,$$

mientras que con $\sqrt{2a^2 - ax} = 2a \operatorname{sen} t$ es (§ 51-5):

$$2a\int_0^{2a} x \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}\sqrt{2-(x/a)}\,dx =$$

$$= 2a\int_0^{\frac{1}{4}\pi} 4at \operatorname{sen} 2t\,.(2a - 4a \operatorname{sen}^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\pi a^3.$$

En cambio, para $b = \frac{1}{2}a$ (fig. 284), debe aplicarse [84-3] y es:

$$\frac{1}{4}V = \int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax}} \sqrt{ax - y^2}\,dy + \int_a^{2a} dx\int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} \sqrt{ax - y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^a \frac{1}{4}\pi ax\,dx + \frac{1}{2}\int_a^{2a} x\sqrt{(2a - x)(x - a)}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}a\int_a^{2a} x \operatorname{arc\,sen}\sqrt{2 - (x/a)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\pi a^3 + \frac{3}{32}\pi a^3 + \frac{11}{64}\pi a^3 , \text{ dando } V = \frac{25}{16}\pi a^3 ,$$

pues con $\sqrt{(2a - x)(x - a)} = (x - a)t$ es (§ 52-2, d_2):

$$\frac{1}{2}\int_a^{2a} x\sqrt{(2a-x)(x-a)}\,dx = a^3\int_0^\infty \frac{t^2(t^2+2)}{(t^2+1)^4}\,dt ,$$

y aplicando el método de HERMITE (§ 52-1, c):

$$\frac{t^2(t^2+2)}{(t^2+1)^4} = \frac{d}{dt}\left(\frac{9t^5 + 8t^3 - 9t}{48(t^2+1)^3}\right) + \frac{3/16}{t^2+1} ,$$

se obtiene

$$a^3\int_0^\infty \frac{t^2(t^2+2)}{(t^2+1)^4}\,dt = \frac{3\pi}{32}a^3 ;$$

por otra parte, con $\sqrt{2a^2 - ax} = a \operatorname{sen} t$ es (§ 51-5):

$$\frac{1}{2}a\int_a^{2a} x \operatorname{arc\,sen}\sqrt{2 - (x/a)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}a^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} t(2 - \operatorname{sen}^2 t)\operatorname{sen} 2t\,dt = \frac{11}{64}\pi a^3.$$

En este último caso veamos de integrar primero respecto de x, luego respecto de z y finalmente respecto de y, por resultar cuadraturas más sencillas, aunque deba cuidarse el tomar límites correctamente. Hemos de

tomar la x entre el paraboloide y el cilindro, la z entre 0 y la proyección sobre el plano yz de la cuártica intersección que es $a + \sqrt{a^2 - y^2} = (y^2 + z^2)/a$, y la y entre 0 y a, dando:

$$\frac{1}{4}V = \int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2 - y^2 + a\sqrt{a^2 - y^2}}} dz\int_{(y^2+z^2)/a}^{a + \sqrt{a^2 - y^2}} dx =$$

$$= \int_0^a \left(a - \sqrt{a^2 - y^2} - (y^2/a)\sqrt{a^2 - y^2 + a\sqrt{a^2 - y^2}}\right)dy -$$

$$- \frac{1}{3a}\int_0^a (a^2 - y^2 + a\sqrt{a^2 - y^2})^{3/2}\,dy =$$

$$= \frac{2}{3a}\int_0^a (a^2 - y^2 + a\sqrt{a^2 - y^2})^{3/2}\,dy =$$

$$= \frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^2 t + \cos t)^{3/2}\cos t\,dt, \quad \text{para} \quad y = a \operatorname{sen} t.$$

Si hacemos ahora $\cos t = \cos^2\theta$ queda, según [53-7]:

$$\frac{1}{4}V = \frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^4\theta + \cos^2\theta)^{3/2}\cos^2\theta\,\frac{2\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1 - \cos^4\theta}}\,d\theta =$$

$$= \frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^6\theta(\cos^2\theta + 1)\,d\theta = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{7!!}{8!!} + \frac{5!!}{6!!}\right)\frac{\pi}{2},$$

es decir, resulta como antes $V = 25\pi a^3/16$.

b) Cuando a cada par (x, y) corresponden solamente dos puntos de contorno, es decir, cuando el cuerpo es diferencia de dos cilindroides definidos por sendas funciones $z = f_2(x, y)$, $z = f_1(x, y)$ (con $f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y)$, por ejemplo), el volumen de cada uno viene expresado más sencillamente por una integral doble, y es:

$$[84\text{-}4] \qquad V = \iint_D f_2(x, y)\,dx\,dy - \iint_D f_1(x, y)\,dx\,dy,$$

lo que equivale a haber efectuado la integración respecto de z; y estas integrales dobles se reducen a simples integrando en uno u otro orden, según convenga en cada caso.

NOTA 2. Así como se ha introducido un signo para el área orientada (§ 54-1, d), el signo del segundo miembro de [84-4] puede interpretarse como valor de un volumen *orientado*, según veremos con precisión en § 90-3 y antes hemos sugerido en el ejemplo 1. Pero entonces el signo depende de la orientación de los ejes coordenados (§ 60-3) y así ya no puede decirse que el volumen *orientado* sea un invariante métrico euclídeo.

EJEMPLO 3. Véase § 82-4, ejemplo 2.

2. **Coordenadas esféricas.** — No siempre son las coordenadas cartesianas las más adecuadas para el cálculo de áreas y volúmenes. Para los cuerpos redondos son más naturales las coordenadas polares, también llamadas *esféricas* y las *semipolares* o *cilíndricas* (§ 84-3).

Dado un triedro xyz todo punto del espacio está determinado dando: su distancia al origen o radio vector r; el ángulo φ que éste forma con el plano xy; el ángulo λ que el plano vertical rz forma con xz (fig. 285).

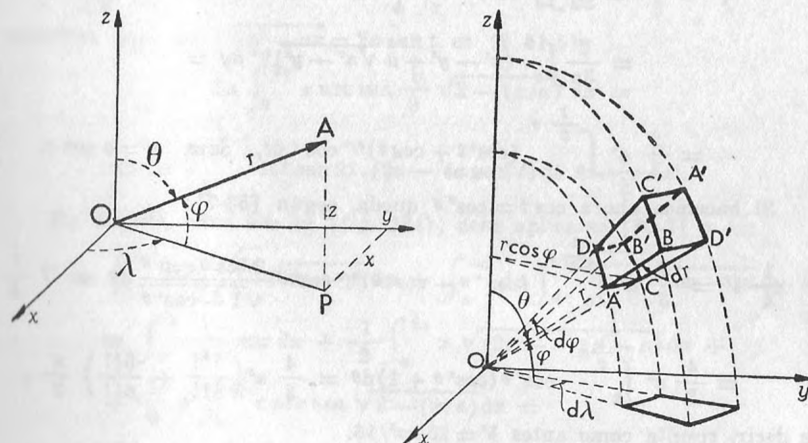


Fig. 285

Por analogía con las coordenadas geográficas, a los números r, φ, λ los llamaremos brevemente: *radio, latitud* y *longitud*. A veces se utiliza el complemento θ de φ, llamado *colatitud.*

Las coordenadas cartesianas del punto se obtienen fácilmente observando que la proyección de r sobre el plano xy es $r\cos\varphi$; y sus dos proyecciones sobre los ejes x, y resultan multiplicando por $\cos\lambda$ y $\operatorname{sen}\lambda$:

$$[84\text{-}5] \quad x = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda\,, \quad y = r \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\lambda\,, \quad z = r \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

de donde se despeja, recíprocamente:

$$[84\text{-}6] \quad r = +\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{y}{x} \quad ;$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{z}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

Con el sistema de coordenadas polares el espacio queda dividido del modo siguiente: los valores de $r \,\varepsilon[0;\, +\infty)$ dan esferas concéntricas de centro O; los valores de $\lambda\,\varepsilon(-\pi;\,\pi]$ dan

planos meridianos que pasan por el eje z; los valores de φ $\varepsilon[-\frac{1}{2}\pi;\, \frac{1}{2}\pi]$ (o de θ) dan conos de revolución de eje z.

Para pasar de coordenadas cartesianas a esféricas en la integración, formemos (§ 83-5) el jacobiano

$$[84\text{-}7] \qquad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \lambda, \varphi)} = r^2 \cos\varphi\,,$$

obtenido con fácil simplificación del desarrollo por su tercera fila. El signo positivo de J indica que el orden adoptado (r, λ, φ) es acorde con el (x, y, z). Entonces para el volumen $|\,D\,|$ del recinto tridimensional D (con frontera de medida tridimensional nula (§ 82-2)) resulta la fórmula

$$[84\text{-}8] \qquad |\,D\,| = \int\!\!\int\!\!\int_D r^2 \cos\varphi \, dr\, d\lambda\, d\varphi$$

que se resolverá por tres integraciones sucesivas en el orden que más convenga al caso estudiado, como hacíamos con las coordenadas cartesianas (§ 84-1).

Para la masa M, siendo ϱ la densidad variable, función de r, λ, φ resulta

$$[84\text{-}9] \qquad M = \int\!\!\int\!\!\int_D \varrho(r, \lambda, \varphi)\, r^2 \cos\varphi \, dr\, d\lambda\, d\varphi.$$

NOTAS: 1. Directamente se obtiene [84-8] al pasar de las coordenadas r, λ, φ a las $r + dr$, $\lambda + d\lambda$, $\varphi + d\varphi$, pues las tres superficies que determinan cada uno de estos dos puntos limitan un cuerpo análogo al paralelepípedo de las coordenadas cartesianas. Las aristas (que son curvas) en el punto r, λ, φ son (fig. 285):

$AB = dr$ (rectilínea);
$AC = r \cdot \cos\varphi \cdot d\lambda$ (círculo de radio $r \cdot \cos\varphi$);
$AD = r \cdot d\varphi$ (círculo de radio r).

Considerado como paralelepípedo, su volumen viene dado aproximadamente como producto de estas tres longitudes, es decir:

$$r^2 \cos\varphi \cdot dr \cdot d\lambda \cdot d\varphi.$$

2. La fórmula de rectificación de una curva en el espacio con tangente continua se deduce de [73-1] y [84-5], dando:

$$[84\text{-}10] \qquad ds^2 = dr^2 + r^2\cos^2\varphi \, d\lambda^2 + r^2\, d\varphi^2.$$

EJEMPLOS: 1. Calcular

$$\int\!\!\int\!\!\int \frac{dx\, dy\, dz}{x^2+y^2+(z-2)^2} \text{ en la esfera } x^2+y^2+z^2 \leqslant 1.$$

Empleando coordenadas esféricas se simplifica el tomar límites y por tanto la integración sucesiva. Según [84-5] es $x^2+y^2+(z-2)^2 = r^2 - 4r\operatorname{sen}\varphi + 4$, de donde habrá de calcularse (§ 51-3, nota 2, § 51-5):

$$\int_0^1 dr \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2\cos\varphi}{r^2 - 4r\operatorname{sen}\varphi + 4}\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2}\pi\int_0^1 r\Big[\ln|4r\,\mathrm{sen}\,\varphi - r^2 - 4|\Big]_{\varphi=-\frac{1}{2}\pi}^{\varphi=\frac{1}{2}\pi} dr =$$

$$= \pi\int_0^1 r\Big[\ln(2+r) - \ln(2-r)\Big]dr = \pi\Big(2 - \frac{3}{2}\ln 2\Big).$$

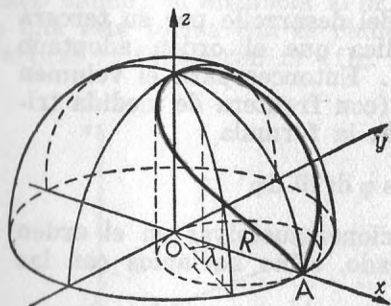


Fig. 286

2. *Curva de* VIVIANI. — Se llama así a la curva de la superficie esférica $r = R$, definida por la ecuación $\lambda = \varphi$. De ella se deduce $x^2 + y^2 = Rx$, luego su proyección horizontal es la circunferencia de diámetro R; por esto suele definirse también como intersección de la superficie esférica con el cilindro que tiene esa sección recta (fig. 286). Su longitud viene expresada por su diferencial así ($dr = 0$, $r = R$, $d\lambda = d\varphi$):

$$ds = R\sqrt{1 + \cos^2\varphi}\,d\varphi = R\sqrt{2}\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{sen}^2\varphi}\,.\,d\varphi\ ,$$

y se calcula por una integral elíptica de segunda especie, mediante tabla (§ 55-3, *b*), siendo en este caso $\alpha = 45°$.

3. Coordenadas cilíndricas. — Cada punto viene determinado por los elementos siguientes: las coordenadas polares (r, λ) de su proyección horizontal, más la altura z sobre el plano xy.

Las coordenadas cartesianas se deducen inmediatamente:

[84-11] $\quad x = r\cos\lambda\ ,\quad y = r\,\mathrm{sen}\,\lambda\ ,\quad z = z.$

El elemento de volumen se calcula mediante el jacobiano $J = \partial(x, y, z)/\partial(r, \lambda, z) = r$ (§ 83-5):

[84-12] $\quad |D| = V = \iiint_D r\,.\,dr\,.\,d\lambda\,.\,dz.$

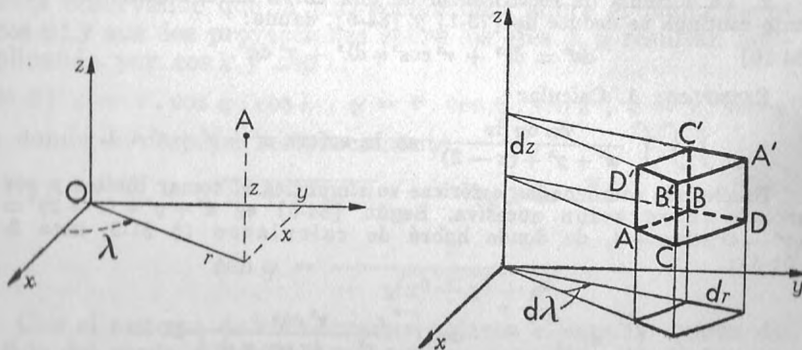


Fig. 287

NOTAS: 1. Directamente (cfr. § 84-2, nota 1): el área del trapecio circular de radios r, $r + dr$ y ángulos λ, $\lambda + d\lambda$ es exactamente: dr por el radio medio $r\,.\,d\lambda$, es decir:

$$\text{Área} = r\,.\,dr\,.\,d\lambda.$$

El volumen del cuerpo prismático (fig. 287) limitado por el par de planos, λ, $\lambda + d\lambda$, por el par de planos z, $z + dz$ y por los cilindros r, $r + dr$ es exactamente: $r\,.\,dr\,.\,d\lambda\,.\,dz$, y por tanto el volumen de un cuerpo cualquiera viene expresado por la fórmula [84-12].

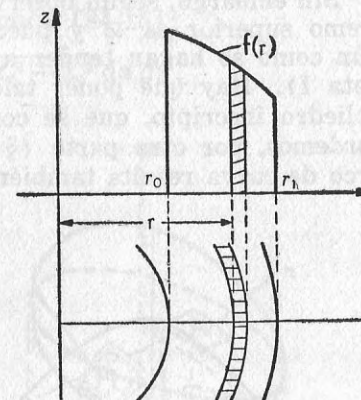


Fig. 288

2. La fórmula de rectificación de una curva en el espacio con tangente continua se deduce de [73-1] y [84-11], dando

[84-13] $\quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\lambda^2 + dz^2.$

3. En § 54-3 se ha dado la fórmula [54-10] de cubicación de un cuerpo de revolución, si la sección meridiana se toma en forma explícita con variable *independiente* sobre el eje de rotación. Si en cambio se toma sobre éste la variable *dependiente* que da la sección meridiana para calcular así el volumen del cuerpo redondo engendrado por el trapezoide determinado por $z = f(r)$ entre r_0 y r_1 al girar en torno del eje z (fig. 288), utilizando coordenadas cilíndricas, se obtiene:

[84-14] $\quad V = \int_{r_0}^{r_1} r\,dr\int_0^{2\pi} d\lambda\int_0^{f(r)} dz = 2\pi\int_{r_0}^{r_1} r\,f(r)\,dr.$

EJEMPLOS: 1. *Volumen de la bóveda de* VIVIANI. — Se llama así a la parte de superficie esférica limitada por el cilindro cuyo diámetro es un radio de ella.

En coordenadas cilíndricas:

$$V = \iiint_D r\,dr\,.\,d\lambda\,.\,dz = 2\iint r\,dr\,.\,d\lambda\,\sqrt{R^2 - r^2} =$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} d\lambda\int_0^{R\cos\lambda} r\,.\,\sqrt{R^2 - r^2}\,dr.$$

La integral de $r\sqrt{R^2 - r^2}\,dr$ es $(-R^3\,\mathrm{sen}^3\lambda + R^3) : 3$, e integrando de nuevo entre 0 y $\pi/2$, resulta:

$$3V = -4R^3\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^3\lambda\,.\,d\lambda + 4R^3\int_0^{\pi/2} d\lambda$$
$$3V = -(8/3)R^3 + 2\pi R^3 = 2R^3(\pi - 4/3).$$

2. En coordenadas cilíndricas, la ecuación de la hélice cilíndrica (§ 72-6, ejemplo) es: $r = \text{const.}$, $z = k\lambda$, y aplicando [84-13] resulta la misma fórmula obtenida en coordenadas cartesianas (§ 73-1, ejemplo).

3. Calculemos el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la curva $z = e^{-x^2}$ al girar alrededor del eje z, limitado por el cilindro $r = a$. Es:

$$V = 2\pi\int_0^a r\,e^{-r^2}\,dr = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

4. **Área de una superficie alabeada.** — Parece a primera vista admisible una definición análoga a la dada para la longitud de un arco, como extremo superior o como límite de los perímetros de las quebradas inscriptas, al tender hacia cero todos los lados. Ocurre inmediatamente inscribir en la superficie dada poliedros de caras triangulares y hacerlas tender hacia cero mediante intercalación de nuevos vértices.

Sin embargo, según observación famosa de SCHWARZ, el extremo superior es ∞ y pueden resultar límites distintos según como se hagan tender a cero las caras del poliedro (ver nota I). Hay que poner tales restricciones a la elección del poliedro inscripto, que se complica mucho la definición. Recordemos, por otra parte (§ 55-1, *b*), que la longitud de un arco de curva resulta también como límite de la suma de diferenciales d*s*, es decir, como suma de los trozos de tangente limitadas por las ordenadas sucesivas. Una definición análoga es válida para las superficies, como formada por "escamas".

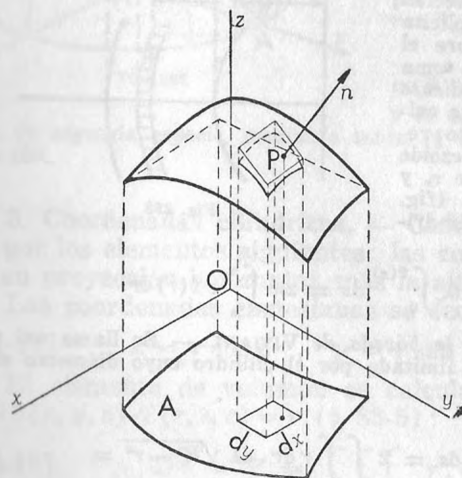


Fig. 289

Dividido el plano xy por una cuadrícula de lados paralelos a los ejes, cada rectángulo $dx\,dy$ determina sobre la superficie un cuadrilátero curvilíneo (fig. 289) cuya proyección es $dx\,dy$, y, tomando el plano tangente en cualquiera de los puntos de ese trozo de superficie, determina con el mismo prisma proyectante de base $dx\,dy$, un cuadrilátero plano cuya área es $dx\,dy/\cos(\mathbf{n}, z)$, siendo $\cos(\mathbf{n}, z)$ el tercer coseno director de la normal, que es igual al coseno del ángulo que forma el plano tangente con el xy, debiendo tomarse el ángulo agudo, es decir, el coseno positivo, pues todas las áreas lo son.

El límite de la suma de todos los cuadriláteros así formados es, por definición, si la superficie tiene plano tangente que varía con continuidad, el área de la superficie y viene, por tanto, expresada por la integral doble:

$$[84\text{-}15] \qquad S = \iint_A \frac{dx\,dy}{\cos \mathbf{n}z} .$$

La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (a, b, c) es (§ 66-5):

$$z - c = z_x(x - a) + z_y(y - b) ,$$

y los cosenos se calculan así (§ 60-8, b_3):

$$\frac{z_x}{\cos(\mathbf{n}x)} = \frac{z_y}{\cos(\mathbf{n}y)} = \frac{-1}{\cos(\mathbf{n}z)} = \frac{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}{1} ,$$

de donde resulta, aplicando la fórmula [84-15]:

$$[84\text{-}16] \qquad S = \iint_A \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy.$$

Esta fórmula subsiste si en el plano xy se adoptan coordenadas polares, sustituyendo $dx\,dy$ por $r\,dr\,d\lambda$.

Si la ecuación viene dada en forma implícita $F(x, y, z) = 0$, tal que z toma dos valores para cada par xy del dominio A (fig. 290), no conviene despejar z, sino diferenciar F, calcular z_x, z_y y substituir en la fórmula anterior. La integral es entonces la suma de dos integrales de las funciones z_2 y z_1 correspondientes al casquete superior y al inferior.

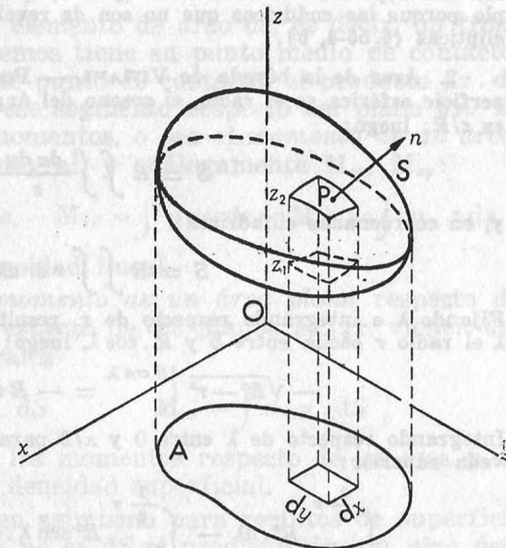


Fig. 290

Si la superficie se expresa en forma paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, el área vendrá dada, en virtud de [72-60], por

$$[84\text{-}17] \qquad S = \iint_R W(u, v)\, du\, dv ,$$

donde R es el recinto del plano paramétrico respecto del cual se extiende la superficie y es

$$[72\text{-}57] \qquad W(u, v) = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| = + \sqrt{g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2} = + \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} ,$$

según vimos en § 72-7, *b*.

NOTA. La definición analítica anterior puede aplicarse si la superficie tiene plano tangente continuo, es decir, la función o funciones que expresan la superficie tienen derivadas primeras continuas en la *clausura*

del recinto de definición de la superficie. En casos más generales y aun cuando las integrales (R) de los segundos miembros de las fórmulas anteriores existan, su valor puede no alcanzar lo que en general se entiende por área de una superficie continua alabeada. (Ver Cap. XXIV, nota III).

EJEMPLOS: 1. Área de la porción del paraboloide $y^2 + z^2 = 2px$ limitada por el plano $x = a$. Basta considerar la mitad superior, en la cual es: $z_x = p/z$, $z_y = -y/z$, y resulta fácilmente:

$$\frac{1}{2} S = \int_0^a \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} \sqrt{\frac{2px + p^2}{2px - y^2}}\,\mathrm{d}y \quad , \quad \text{dando}$$

$$\tfrac{1}{2} S = \pi \sqrt{p}\,[(2a + p)^{3/2} - p^{3/2}] : 3 .$$

Esto mismo se obtiene más brevemente por una integral simple, por ser una superficie de revolución (§ 54-5, ejemplo 2). Ponemos este ejemplo porque las cuádricas que no son de revolución conducen a integrales elípticas (§ 55-4, *b*).

2. Área de la bóveda de VIVIANI. — Puesto que la normal a la superficie esférica es el radio, el coseno del ángulo que forma con el eje z es z/R; luego:

$$S = R \int\!\!\int \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z} ,$$

y, en coordenadas cilíndricas:

$$S = R \int\!\!\int r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\lambda / \sqrt{R^2 - r^2} .$$

Fijando λ e integrando respecto de r, resulta: $-\sqrt{R^2 - r^2}$; pero fijado λ el radio r oscila entre 0 y $R . \cos \lambda$, luego:

$$-\sqrt{R^2 - r^2}\,\Big|_0^{R \cos \lambda} = - R \operatorname{sen} \lambda + R .$$

Integrando respecto de λ entre 0 y $\pi/2$ para obtener la mitad de la bóveda superior:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} R^2 . \mathrm{d}\lambda - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} R^2 \operatorname{sen} \lambda . \mathrm{d}\lambda = R^2 (\tfrac{1}{2}\pi - 1) .$$

Así, la superficie de la bóveda superior es: $S = R^2(\pi - 2)$.

Es éste el *problema florentino* o de VIVIANI, discípulo de GALILEO, que propuso trazar en la superficie esférica una ventana cuadrable.

5. Momentos de líneas, superficies y cuerpos.

— Dada una línea, superficie o cuerpo material, dotada de densidad μ, σ ó τ respectivamente, constante o variable *, puede considerarse como límite de una suma de masas rectilíneas, rectangulares, o paralelepípedos, respectivamente. Calculada la suma de momentos de estas masas componentes respecto de un centro, eje o plano, su límite se llama momento de la curva, superficie o cuerpo material respecto de este centro, eje o plano, y según

* Este concepto de *densidad en un punto* no se puede definir claramente sino de modo análogo a como se ha definido la velocidad en un momento, la carga en un punto, etc., mediante la *derivada*. Pero tratándose de de dos o más variables hay que estudiar previamente las *funciones de recinto*.

sean aquellos momentos de primero o segundo orden, es decir, según que cada masa esté multiplicada por la distancia o por el cuadrado de la distancia al centro, eje o plano, así resultará el momento de primero o segundo orden (*estático* o de *inercia*) de la masa curvilínea considerada.

En particular, si el cuerpo es homogéneo, es decir, su densidad ϱ es constante, las masas son proporcionales a las longitudes, áreas o volúmenes, y se pueden sustituir por éstas, resultando así momentos *geométricos*, esto es, sumas de productos de las longitudes, áreas y volúmenes componentes por sus distancias o cuadrados de distancias al centro, eje o plano. Una vez calculados estos momentos geométricos bastará multiplicar por la densidad, para tener el momento mecánico.

Si consideramos un elemento de arco ds, es decir, un trozo de tangente que suponemos tiene su punto medio de contacto, y es x la abscisa de este punto de contacto, el producto $\mu x . \mathrm{d}s$ es el momento M_{yz} de ese segmento respecto del plano yz. El límite de la suma de momentos, o sea el *momento de un arco*, es pues, la primera integral, y análogamente M_{zx}, M_{xy}:

$$[84\text{-}18] \quad M_{yz} = \int \mu . x\,\mathrm{d}s, \quad M_{zx} = \int \mu . y\,\mathrm{d}s, \quad M_{xy} = \int \mu . z\,\mathrm{d}s,$$

siendo $\mu = \mu(s)$ la densidad lineal.

Análogamente: el *momento de un área plana* respecto de su plano xy es nulo; respecto de los planos yz, zx, vienen expresados por las integrales

$$[84\text{-}19] \quad M_{yz} = \int \sigma . x . \mathrm{d}S \quad ; \quad M_{zx} = \int \sigma . y . \mathrm{d}S$$

es decir, coinciden con los momentos respecto de los ejes y, x. Aquí es $\sigma = \sigma(x, y)$ la densidad superficial.

Estas fórmulas valen asimismo para recintos de superficie curva, pero en ellas ya no es dS el producto dx . dy, sino éste dividido por cos (**n**z), como se explicó en § 84-4, y además aparece $M_{xy} = \int \sigma . z . \mathrm{d}S$.

Análogamente, los *momentos de un cuerpo homogéneo* respecto de los tres planos son respectivamente:

$$[84\text{-}20] \quad M_{yz} = \int \tau . x . \mathrm{d}V, \quad M_{zx} = \int \tau . y . \mathrm{d}V,$$

$$M_{xy} = \int \tau . z . \mathrm{d}V,$$

siendo $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x . \mathrm{d}y . \mathrm{d}z$.

La ecuación de un plano cualquiera π que pase por O, reducida a su forma normal (§ 60-8, b_2), es decir, después de dividida por la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los coeficientes, sea:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0 \quad ;$$

la distancia del punto (x, y, z) a este plano se obtiene (§ 60-8 b_3) sustituyendo estas coordenadas en el mismo, luego el momento de un arco dado respecto de ese plano es:

$$[84\text{-}21] \quad M_\pi = \int (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)\, ds = \alpha_1 M_{yz} + \alpha_2 M_{zx} + \alpha_3 M_{xy} \quad ;$$

la misma fórmula vale para las superficies y cuerpos.

Calculados, pues, los momentos respecto de los planos coordenados, se deduce fácilmente el momento respecto de otro plano, y resulta ser una función lineal homogénea en los cosenos directores de la dirección; por tanto (§ 63-1, *a*), todos estos valores pueden sintetizarse mediante un *vector* M_0 de componentes M_{yz}, M_{zx}, M_{xy}, cuya proyección sobre el vector normal a π da M_π (fig. 291).

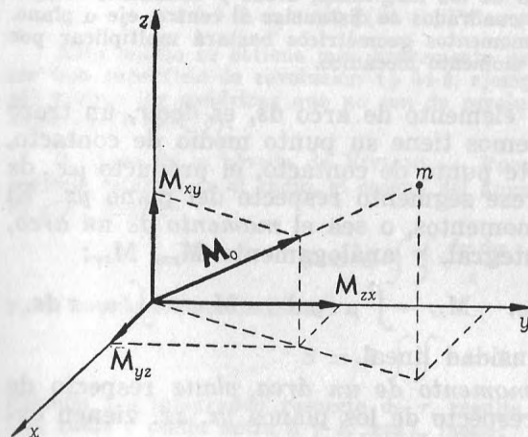


Fig. 291

NOTA. Puede introducirse directamente M_0 mediante una integral vectorial. Por tal entendemos

$$[84\text{-}22] \qquad \iiint_V f(r)\, dV = \lim \Sigma\, f(r_i)\, \Delta V_i \quad ,$$

en el sentido de § 83-2, para r_i vector de posición de cualquier punto de ΔV_i.

Entonces, el momento vectorial respecto de O de una masa elemental dm situada por el vector de posición $r = xi + yj + zk$, será $r\, dm$, con parámetros directores x, y, z, y sumando se obtendrá

$$[84\text{-}23] \qquad M_0 = \iiint_V r\, dm \quad ,$$

donde $dm = \tau\, dV$ (o bien $\sigma\, dS$ ó $\mu\, ds$ si se trata de superficies o líneas con integrales respectivas dobles o simples). Calculado M_0, se tiene M_π proyectándolo sobre la normal a π.

6. Centros de gravedad. Teoremas de Guldin. — *a*) Suele definirse el *centro de gravedad* o *baricentro* de un cuerpo, como punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas aplicadas en los infinitos puntos materiales que los componen. Esta expresión incorrecta debe entenderse así: El momento del cuerpo, según se acaba de definir, respecto de todo plano que pase por el centro de gravedad debe ser nulo.

En particular, si el cuerpo es homogéneo, es decir, su densidad constante, siendo la masa proporcional al volumen, se puede sustituir el momento estático por el geométrico.

Si $G(\xi, \eta, \zeta)$ es el baricentro en cuestión, la definición anterior equivale a decir que debe ser nulo el momento estático vectorial $M_G = 0$, para lo que es necesario y suficiente (§ 63-1, *a*) que sea

$$M_{\eta\zeta} = M_{\zeta\xi} = M_{\xi\eta} = 0 \quad ,$$

es decir, para la determinación del baricentro hasta imponer la condición de que sean nulos los momentos respecto de los tres planos trazados por él paralelamente a los coordenados (cfr. § 60, ejercicio 33).

Los momentos de un cuerpo respecto de los planos $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ son:

$$\int \tau (x - \xi)\, dV = 0, \qquad \int \tau (y - \eta)\, dV = 0, \qquad \int \tau (z - \zeta)\, dV = 0,$$

de donde se deducen las coordenadas ξ, η, ζ del baricentro, que son (cfr. § 60, ejercicio 32):

$$[84\text{-}24] \quad \xi = \frac{\int \tau \,.\, x \,.\, dV}{\int \tau \,.\, dV} \ , \quad \eta = \frac{\int \tau \,.\, y \,.\, dV}{\int \tau \,.\, dV} \ , \quad \zeta = \frac{\int \tau \,.\, z \,.\, dV}{\int \tau \,.\, dV} \ .$$

Si el cuerpo es homogéneo, la constante τ se puede sacar como factor común y después de simplificar resultan:

$$\xi = \frac{1}{V} \int x \,.\, dV \quad ; \quad \eta = \frac{1}{V} \int y \,.\, dV \quad ; \quad \zeta = \frac{1}{V} \int z \,.\, dV \quad ;$$

siendo V el volumen total del cuerpo.

Nótese que dV designa el elemento de volumen, que puede tomarse en coordenadas cartesianas o polares, según convenga por la forma de la superficie-frontera.

EJEMPLO 1. En § 83-1, ejemplo, hemos calculado el momento del octante de esfera respecto del plano xy. Hagamos ahora el cálculo en coordenadas esféricas, y dicho momento vendrá expresado por la integral triple de $z \,.\, r^2 \cos \varphi$ que se calcula muy sencillamente y vale $\pi R^4/16$.

Compárese la brevedad de este método con el cartesiano seguido anteriormente.

Las coordenadas del baricentro del octante de esfera, son por tanto:

$$\xi = \eta = \zeta = (3/8) R.$$

NOTA. Análogamente se calculan las coordenadas del centro de gravedad de una superficie o de una línea material, y son respectivamente:

$$[84\text{-}25] \qquad \xi = \frac{\int \sigma x\, dS}{\int \sigma\, dS} \ , \quad \eta = \frac{\int \sigma y\, dS}{\int \sigma\, dS} \ , \quad \zeta = \frac{\int \sigma z\, dS}{\int \sigma\, dS} \ ;$$

$$[84\text{-}26] \qquad \xi = \frac{\int \mu x\, ds}{\int \mu\, ds} \ , \quad \eta = \frac{\int \mu y\, ds}{\int \mu\, ds} \ , \quad \zeta = \frac{\int \mu z\, ds}{\int \mu\, ds} \ .$$

Si por ejemplo la superficie es un recinto R en el plano xy de área total S, y es $\sigma =$ const., se tiene:

[84-27] $\xi = \frac{1}{S}\int_R x\,dS \;,\; \eta = \frac{1}{S}\int_R y\,dS \;,\; \zeta = 0 \;;$

pero si se tiene un trozo de superficie curva $z = f(x, y)$, la diferencial de área es $dS = dx\,dy/\cos nz$ (§ 84-4).

En particular, es importante el caso en que la superficie es esférica. Para ella la normal es el radio y $\cos nz = z/R$. Por tanto:

$$\zeta = \frac{R}{S}\int\int dx \,.\, dy = \frac{RS_0}{S}\,,$$

es decir: *la altura del baricentro de una porción de superficie esférica de área S es igual al radio por la razón entre su proyección S_0 y su área S.*

EJEMPLO 2. La altura del baricentro de la bóveda de VIVIANI (§ 84-4, ejemplo 2) es:

$$\zeta = R\frac{(1/4)\pi R^2}{(\pi - 2)R^2} = \frac{1}{4}\,\frac{R\pi}{\pi - 2}\,.$$

El baricentro del hemisferio superior de la esfera de centro O y de radio R tiene las coordenadas $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = R/2$.

b) Teoremas de GULDIN. — Relacionan las áreas y volúmenes de los cuerpos de revolución con la longitud recorrida por el centro de gravedad de la generatriz de la superficie o cuerpo, y tienen muy útil aplicación, directa e inversa.

El área de una superficie de revolución alrededor del eje x viene expresada (§ 54-3) por

[84-28] $$S = 2\pi\int y\,ds\,,$$

pero obsérvese que esta integral es el momento de la línea generatriz respecto del eje x, es decir, el numerador que figura en la fórmula que determina la coordenada η del baricentro, y cuyo denominador es la longitud s de dicha curva, luego $S = 2\pi\eta\,.\,s$.

Y si se considera solamente un sector de superficie de revolución, es decir, si la curva generatriz gira un arco, bastará poner dicho arco en vez de $2\pi\eta$. Es decir:

El área engendrada por un arco al girar alrededor de un eje de su plano, que no lo corta, es igual a su longitud por la longitud del arco de circunferencia descripto por el centro de gravedad.

El volumen engendrado por un área al girar alrededor del eje y, según [84-14] es:

[84-29] $$V = 2\pi\int xy\,.\,dx$$

donde bajo el signo integral aparece el elemento de área $y\,.\,dx$ por la distancia x al eje y, luego es el momento total del área respecto del eje y; y recordando la fórmula que da la ordenada del centro de gravedad del área, esta integral resulta igual a: ξS, luego $V = S\,.\,2\pi\xi$, es decir:

El volumen engendrado por un recinto que gira alrededor de un eje no secante es igual al producto del área del recinto por la longitud del arco descripto por su centro de gravedad.

Estos teoremas de GULDIN (ya sabidos de PAPPO) sirven para calcular áreas y volúmenes de superficies de revolución cuando se conoce el centro de gravedad del arco o área móvil. Y también para calcular el centro de gravedad, cuando se conoce el volumen o el área engendrada.

EJEMPLOS: 3. Área y volumen del toro engendrado por la circunferencia de radio r, siendo el radio de giro a.

$$S = 2\pi\,.\,r\,.\,2\pi a = 4\pi^2 a r\;;\qquad V = \pi r^2\,.\,2\pi a = 2\pi^2 r^2 a.$$

Compárese la brevedad de este método con el del cálculo directo en coordenadas cartesianas.

4. *Centro de gravedad de un arco de circunferencia.* — Si R es el radio y 2α la amplitud, la longitud es $2R\alpha$. Haciéndolo girar alrededor del eje y perpendicular al eje x de simetría, el área de la zona engendrada es (§ 54-5):

$$2\pi\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi\, R\,d\varphi = 2\pi R\,.\,2R\,\text{sen}\,\alpha = 2R\alpha\,.\,2\pi\xi\;;$$

luego

$$\xi = R\,(\text{sen}\,\alpha)/\alpha\quad;\quad \eta = 0.$$

5. *Centro de gravedad del semicírculo.* — Por simetría debe estar en el radio perpendicular a la base a una distancia ξ de la misma; haciendo girar el semicírculo, engendra una esfera de volumen:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2}\pi R^2\,.\,2\pi\xi$$

de donde se despeja:

$$\xi = 4R/(3\pi).$$

6. Hagamos girar el semicírculo alrededor del eje que dista a de su base. Aplicando de nuevo el teorema de GULDIN, el volumen engendrado vale:

$$V = \frac{1}{2}\pi R^2\,.\,2\pi(a \pm \xi) = \pi^2 R^2\left(a \pm \frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi}\right)$$

según que el eje esté situado del lado de la concavidad o de la convexidad.

He aquí, pues, calculado el volumen de las dos porciones externa e interna del toro; su suma coincide naturalmente con la expresión $2\pi^2 R^2 a$ arriba obtenida para el volumen del toro.

EJERCICIO. Calcúlese análogamente el centro de gravedad de la semicircunferencia y aplíquese a la determinación del área de cada una de las dos regiones convexa y cóncava del toro.

7. Momentos de inercia. — Momento *de inercia* (o *de segundo orden*) de una masa aislada m respecto de un eje es el producto de m por el cuadrado de su distancia al eje, es decir: $I = mr^2$.

Tales momentos se llaman *axiales* y si r es la distancia a un punto o a un plano, el momento se llama *polar* o *plano*, respectivamente.

Si la masa es un hilo, superficie o volumen, las expresiones del momento de inercia se definen como límites de sumas de los momentos de sus elementos, es decir, por integrales.

Si la masa es plana, resultan:

Momentos polares son los momentos de inercia respecto de ejes perpendiculares al plano o, lo que es lo mismo, respecto de puntos del plano.

Momentos axiales son los momentos respecto de planos perpendiculares al dado, o lo que es lo mismo, respecto de ejes situados en el plano.

El momento respecto de un punto O lo designaremos I_0 y respecto de un eje y lo designaremos I_y.

Si el momento polar o axial de una masa plana m es I, se llama *radio de giro* al segmento ϱ que cumple la condición

[84-30] $$I = m\varrho^2 \quad \text{es decir:} \quad \varrho = \sqrt{I/m}.$$

Representa, pues, el *radio de giro la distancia del centro o del eje a que debe colocarse la masa concentrada m para obtener un momento igual al de toda la masa superficial.* Obsérvese (§ 56-3) que no es sino la media cuadrática de todos los radios u ordenadas del recinto, según sea el momento polar o axial.

Si, como supondremos en lo sucesivo la masa es uniforme, es decir, proporcional al área, se puede sustituir en las fórmulas, masa por área, tomando como unidad de masa la masa de la unidad de área.

Las relaciones fundamentales a que satisfacen los momentos de inercia son éstas:

El momento polar respecto de O es la suma de los momentos axiales respecto de los ejes x, y.

En efecto, siendo $r^2 = x^2 + y^2$, integrando resulta: $I_o = I_y + I_x$.

El momento de inercia respecto de cualquier eje es igual al momento respecto del eje paralelo trazado por el centro de gravedad más el producto de la masa (o del área) por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes. (STEINER).

En efecto, si adoptamos el baricentro como origen, y el eje dado es el $x = d$, tenemos:

$$(x - d)^2 = x^2 - 2dx + d^2$$

e integrando sobre la superficie resultan tres integrales.

De estas tres integrales la segunda es el momento estático respecto del eje y que pasa por el baricentro, y, por tanto, es nula. Queda, por consiguiente:

[84-31] $$I_d = I_y + Sd^2.$$

EJEMPLOS: 1. Momento de inercia del rectángulo de base b y altura a respecto de su base.

Adoptada ésta como eje x tomando elementos rectangulares de base b y altura dy, resulta:

$$I_x = \int_0^a by^2 \, . \, dy = \frac{a^3b}{3} = \text{área por } \frac{a^2}{3}.$$

Luego el radio de giro es $\varrho = a/\sqrt{3}$.

2. Ídem respecto de su base media o eje neutro.

Adoptado éste como eje x resulta:

$$I_x = \int_{-a/2}^{a/2} by^2 \, dy = \frac{a^3b}{12} = \text{área por } \frac{a^2}{12},$$

de donde resulta: $\varrho = a/(2\sqrt{3})$.

3. Ídem respecto de una paralela a la base, a distancia d del centro. Según la propiedad segunda:

$$I_d = a^3 b/12 + a b d^2$$

En particular para $d = \frac{1}{2}a$ resulta el ejemplo 1º

4. Momentos polar y axial de un anillo circular respecto de su centro y su diámetro. Sean r y R los radios interno y externo; tomando coronas circulares como elementos de área, resulta:

$$I_o = 2\pi \int_r^R r^3 \, dr = \tfrac{1}{2}\pi(R^4 - r^4),$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(R^4 - r^4) : (R^2 - r^2) = \tfrac{1}{2}(R^2 + r^2).$$

Puesto que los momentos respecto de los diámetros perpendiculares son iguales por simetría, y su suma es I_o, resulta:

$$I_x = \tfrac{1}{4}\pi(R^4 - r^4).$$

Para el círculo, resulta, por ser $r = 0$:

$$I_o = \tfrac{1}{2}\pi R^4 \quad ; \quad \varrho_o = R/\sqrt{2} \quad ; \quad I_x = \tfrac{1}{4}\pi R^4 \quad ; \quad \varrho_x = \tfrac{1}{2}R.$$

EJERCICIOS

1. Volumen del sólido limitado por la superficie $z = e^{x-y}\cos(x + y)$, el plano xy y los cuatro planos verticales $y = \pm x \pm \frac{1}{2}\pi$.

2. Volumen del sólido limitado por el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$, los planos coordenados y el plano vertical $(x/a) + (y/b) = 1$.

3. Volumen del sólido limitado por la superficie cerrada $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$.

4. Dada la esfera de centro en el origen y radio a, con densidad igual a la altura z, calcular la masa del segmento esférico comprendido entre los planos $z = h$ y $z = k$.

5. Área de la superficie cónica $z^2 = 2xy$ entre los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

6. Área de la superficie anterior entre los ejes Ox, Oy y el cilindro $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$

7. Área del casquete del paraboloide elíptico $z = x^2/2a + y^2/2b$ limitado por su intersección con el cilindro $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

8. Área de la superficie esférica.

9. Baricentro del octante de elipsoide macizo en coordenadas cartesianas; momento estático respecto del plano $2x + 3y + 6z = 0$ y del plano $2x + 3y + 6z = 18$.

10. Baricentro del octante de superficie esférica hallado mediante coordenadas esféricas; momento estático respecto del plano $3x + 4y + 12z = 0$ y del plano $3x + 4y + 12z = 24$.

11. Baricentro G de una superficie cónica circular recta, entre el vértice V y un plano normal al eje a distancia h de V, hallado mediante coordenadas cilíndricas.

12. Dado el toro engendrado por la circunferencia de radio r, con radio de giro a, hallar por el teorema de GULDIN el área y el volumen de sus dos partes separadas por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

13. Volumen del toro de sección elíptica:

$$\frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1 \quad \text{con} \quad a < 1.$$

14. Calcular los momentos de inercia de un cilindro macizo circular de radio R y altura a respecto de los ejes siguientes: *a*) Eje del cilindro; *b*) Eje perpendicular a la dirección del cilindro, trazado por el baricentro; *c*) Diámetro de una base.

15. Momento de inercia de la esfera de radio R respecto de un diámetro.

16. Momento del toro engendrado por la circunferencia de radio r cuyo centro dista R del eje, respecto de éste.

17. Momento de inercia de la superficie limitada por una elipse de semiejes a y b respecto del eje mayor.

18. Entre el radio de giro ϱ respecto de un eje que pasa por el

baricentro, el radio de giro ϱ_1 respecto de un eje paralelo que dista d existe la relación: $\varrho_1^2 = \varrho^2 + d^2$.

19. Constrúyase el radio de giro de los recintos anteriores para ejes paralelos a los considerados.

20. Momento de inercia de un cono macizo circular recto de radio r en la base y altura h, respecto de un eje baricéntrico oblicuo; hallar el elipsoide central de inercia.

NOTAS AL CAPÍTULO XXI

I. Área de una superficie alabeada. — 1. He aquí ligeramente modificado el clásico ejemplo de H. A. SCHWARZ (*Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe*; Gesammelte Math. Abhandl., *1*, pp. 309-311; 1880) aludido en § 84-4, que muestra que pueden resultar límites distintos con extremo superior $+\infty$, según como se hagan tender a cero las caras triangulares de una poliedral inscrita, cuya área (§ 48-1) se tome como aproximación de la de una superficie tan regular y elemental como la cilíndrica circular.

Sea S la superficie cilíndrica

[XXI-1] $$\mathbf{r} = \cos u \,.\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} u \,.\, \mathbf{j} + v \,.\, \mathbf{k} \;; \qquad (u, v) \varepsilon R: \; 0 \leqq u \leqq 2\pi \;, \quad 0 \leqq v \leqq 1 \;;$$

la que cortada a lo largo de una generatriz y desarrollada sobre el plano uv, se adapta exactamente sobre el rectángulo paramétrico de definición R, obteniéndose así el área elemental 2π. Si dividimos los lados de R, paralelos a los ejes u y v respectivamente en m y n partes iguales y trazamos por los puntos de subdivisión sendas paralelas a los ejes u y v, quedará subdividido R en mn subrectángulos congruentes, en cada uno de los cuales tracemos ambas diagonales para obtener en definitiva la subdivisión de R en 4 mn triángulos. Los puntos correspondientes, imágenes en S de los vértices de estos triángulos, determinan una poliedral triangular inscrita en S, formando una especie de "almohadillado tipo Renacimiento", poliedral cuyo perímetro o área elemental A_{mn} se calcula fácilmente y es:

[XXI-2] $$A_{mn} = 2m \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2m} + \left[\frac{1}{4} + \frac{4n^2}{m^4}\left(m \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}} . \, 2m \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi}{m} \,.$$

En efecto, las bases verticales de $2mn$ triángulos inscritos tienen por longitud $1/n$ y sus alturas valen $2\operatorname{sen}(\pi/2m)$, longitud de cada uno de los $2m$ lados del polígono regular inscrito en la circunferencia unidad. Las bases horizontales de los otros $2mn$ triángulos inscritos tienen por longitud $2\operatorname{sen}(\pi/m)$, que es la de cada uno de los m lados del polígono regular inscrito en la circunferencia unidad, y por altura la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos valen $1/(2n)$ y $1 - \cos(\pi/m) = 2\operatorname{sen}^2(\pi/2m)$, este último, flecha del arco de circunferencia unidad de amplitud $2\pi/m$. Entonces, si escogemos $n = m^3$, resulta $A_{mn} \to +\infty$ para $m \to +\infty$, mientras que si $n = m$, resulta que $A_{mn} \to 2\pi$ para $m \to +\infty$. Aún más, para cualquier número real k tal que $2\pi \leqq k \leqq +\infty$, puede hacerse que $A_{mn} \to k$ mediante una adecuada relación que ligue m y n en su crecimiento común. Esto ya nos dice que definiciones análogas a las de § 55-1, *a*, Def., y Cap. XV, nota I, *a*, Teor., no podrán subsistir para definir el área, a menos de imponer a las poliedrales inscritas y a las superficies cuya área buscamos restricciones más o menos artificiales (Cap. XXIV, nota III). En cambio, si observamos que

[XXI-3] $$A_{mn} \geqq 2m \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2m} + m \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi}{m} \to 2\pi \quad \text{para} \quad m \to +\infty \;,$$

el valor elemental 2π del área A(S) es un extremo inferior de los valores límites de A_{mn}, lo que es ya una indicación de la posibilidad de generalizar la definición de LEBESGUE dada en Cap. XV, nota II, teor., para el caso de las superficies (Cap. XXIV, nota III). Un examen más detenido del proceso de convergencia estudiado en este ejemplo, hace que la intuición llegue a captar que si se toma n muy grande respecto de m, la poliedral triangular inscrita puede llegar a adaptarse uniformemente a la superficie cilíndrica, pero formando una especie de "plisado" al aplastarse horizontalmente las caras superior e inferior de cada "almohadilla".

M. FRÉCHET (*Sur l'aire des surfaces polyedrales*; Ann. Soc. Polonaise de Math., *3*, pp. 1-4; 1925) ha demostrado que puede llegarse al mismo resultado de SCHWARZ reemplazando la superficie cilíndrica de revolución por una poliedral, la que teniendo sus aristas como líneas singulares sin plano tangente, da el resultado paradógico de que su área elemental directa no quedará aproximada por la de las poliedrales triangulares inscritas cuyas caras tiendan uniformemente a cero.

En efecto, basta adosar a una arista de la poliedral (que supondremos es el eje z del triedro trirrectángulo de referencia, intersección de las caras xz é yz de la poliedral) un "plisado" obtenido de la siguiente manera: Si mediante el plano $x + y = 1/m$ separamos entre los $z = 0$ y $z = 1$ un trocito de poliedral (fig. 292), y en dicho plano consideramos m^3 horizontales intermedias entre $z = 0$ y $z = 1$, al unir dichas horizontales con $m^3 + 1$ puntos intermedios del eje z, se formará el "plisado" de $2m^3$ triangulitos, cuya área total será mayor que $2m^3 \,.\, (1/2m^2) = m$, tan grande como se quiera con m.

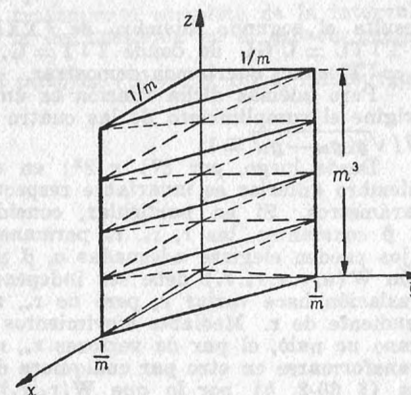


Fig. 292

2. Desde el punto de vista geométrico y para superficies suficientemente regulares (por ejemplo, con plano tangente variando con continuidad), aparte de la definición directa vista en § 84-4, también es interesante la siguiente definición axiomática: Dada un trozo S de superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ definida en el dominio D del plano uv, con $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ continuas en él, se busca una función W(u, v) tal que el número

$$A(S) = \int\int_D W(u, v)\, du\, dv$$

quede determinado por las condiciones: 1ª) La función W(u, v) depende solamente de u, v, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$; 2ª) El número A(S) queda invariante respecto de los movimientos (§ 61-7, *c*); 3ª) El número A(S) queda invariante respecto de un cambio T de parámetros $\mu = \mu(u, v)$, $\nu = \nu(u, v)$ de jacobiano no nulo (§ 67-7) y que conserve la orientación (§ 54-1, *d*; § 83-4; cfr. § 88-5, *a*); 4ª) Para el cuadrado unidad Q resulta $A(Q) = 1$.

Un número como el A(S) que depende de una función W se llama una *funcional*. La función W que cumpla la condición 1ª) es la más sencilla que pueda dar lugar a una funcional que cumpla las condiciones 2ª), 3ª) y 4ª). Veamos primero que la función [72-57] satisface los requerimientos dichos. El cumplimiento de las condiciones 1ª), 2ª) y 4ª) es

inmediato. Para la 3ª) basta aplicar § 67-7, teniendo en cuenta que $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)T^2$ si $T = \partial(\mu, \nu)/\partial(u, v)$ es el jacobiano de la transformación T y las γ son los coeficientes de GAUSS [72-45] respecto de los nuevos parámetros μ, ν. En efecto, es

$$[XXI\text{-}4] \qquad |\,d\mathbf{r}\,|^2 = \Sigma g_{ik}\, du\, dv =$$
$$= \Sigma g_{ik}\left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\, d\mu + \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\nu\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \mu}\, d\mu + \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\nu\right) = \Sigma \gamma_{ik}\, d\mu\, d\nu ,$$

donde los g_{ik} se comportan como los coeficientes de una forma cuadrática en una transformación lineal de coordenadas, es decir, si consideramos las matrices

$$\mathbf{U} = \left\{\begin{matrix} du \\ dv \end{matrix}\right\}, \quad \mathbf{V} = \left\{\begin{matrix} d\mu \\ d\nu \end{matrix}\right\}, \quad \mathbf{G} = \left\{\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}\right\}, \quad \Gamma = \left\{\begin{matrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{matrix}\right\},$$

el último miembro de [XXI-4] puede representarse (§ 61-4, *d*) por $\mathbf{V}'\Gamma\mathbf{V}$ y siendo (§ 61-3) $\mathbf{V} = \mathbf{TU}$ con

$$\mathbf{T} = \left\{\begin{matrix} \mu_u & \mu_v \\ \nu_u & \nu_v \end{matrix}\right\},$$

resulta el segundo miembro de [XXI-4] representado (§ 61-4, *a*) por $\mathbf{U}'\mathbf{T}'\Gamma\mathbf{TU} = \mathbf{U}'\mathbf{GU}$ de donde $\mathbf{T}'\Gamma\mathbf{T} = \mathbf{G}$, con módulos (§ 15-7) cumpliendo $G = \Gamma T^2$ como queríamos demostrar.

Pero además dicha función es única, pues toda otra función W que origine el cumplimiento de las cuatro condiciones dichas es tal que hace $W/\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \equiv 1$.

Desde luego, por 2ª) y 3ª) en cada punto determinado, el primer miembro anterior es invariante respecto de los movimientos y cambios de parámetros. Si en particular, consideramos $u = \mu + \alpha$, $v = \nu + \beta$, con α, β constantes, las $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ permanecen invariantes y como para u, v fijos pueden elegirse adecuadas α, β para obtener cualquier μ, ν, la función $W(u, v, \mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ debe ser independiente de u y v. Pero además una traslación hace variar $\mathbf{r}$, pero no $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, por lo que W es también independiente de $\mathbf{r}$. Mediante movimientos y cambios de parámetros de jacobiano no nulo, el par de vectores $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ linealmente independientes puede transformarse en otro par cualquiera de vectores linealmente independientes (§ 60-2, *b*) por lo que $W(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)/|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ se conservará constante, siendo esta constante la unidad por la condición 4ª).

II. Bibliografía. — 1. Los tratados generales de Análisis matemático, sobre todo los modernos, incluyen el tratamiento de la integral de RIEMANN-STIELTJES. Un estudio muy completo incluye el tratado de E. W. HOBSON (citado en Cap. IX, nota VIII, 3). También se incluye en las obras especializadas sobre integración (cfr. Cap. XXIV, nota IV), particularmente en la clásica y fundamental de H. LEBESGUE (citada en Cap. XIII, nota V, 3). Por su importancia en la matemática aplicada y en muchas teorías matemáticas especiales, dedican sendos capítulos a la integral de STIELTJES muchas obras monográficas. Pueden citarse como rigurosos y asequibles los incluídos en la obra de PERRON (citada en Cap. V, nota IV, 4), y en:

S. BOCHNER: *Vorlesungen über Fouriersche Integrale* (Cap. IV; Akademische Verlagsges., Leipzig, 1932); traducción inglesa (ampliada con una memoria del autor): *Lectures on* FOURIER *integrals. With an author's supplement on monotone functions,* STIELTJES *integrals, and harmonic analysis* (Princeton Univ. Press, 1959);

D. V. WIDDER: *The* LAPLACE *Transform* (Cap. I; Princeton Univ. Press, 1941).

Una extensa bibliografía sobre el tema se encuentra en

T. H. HILDEBRANDT: STIELTJES *integrals of the* RIEMANN *type* (American Mathematical Monthly, *45*, pp. 265-277).

Contiene una discusión detallada de la integral de STIELTJES n-dimensional la obra de exposición poco usual, aunque original, que incluyendo el estudio del espacio de HILBERT y de la integral de LEBESGUE-STIELTJES desarrolla las teorías modernas de carácter superior en vista de sus aplicaciones físicas

M. PICONE y T. VIOLA: *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione* (Edizioni Scientifiche Einaudi, Turín, 1952).

De menos alcance teórico, pero también extensa es

N. GUNTHER: *Sur les intègrales de* STIELTJES *et leurs applications aux problèmes de la Physique mathématique* (Chelsea, Nueva York, 1949).

2. De las obras especializadas sobre series citadas en Cap. V, nota IV, 1, la de KNOPP no trata las series dobles, pero en cambio sí lo hace en forma notable la de BROMWICH.

3. Incluyen el estudio de las integrales múltiples los tratados de Análisis matemático citados en Cap. XVIII, nota IV, 1 y 2, como ya dijimos en Cap. XIII, nota V, 1 y 2 del volumen I, en cuya segunda edición y siguientes se citan también el estudio excesivamente monográfico de

R. L. GOMES: *Integral de* RIEMANN (Junta de Investigação Matem., Porto, 1949)

y la didáctica obra conteniendo un tratamiento completo de la integral de RIEMANN y su generalización a la de LEBESGUE en el espacio euclídeo de

W. W. ROGOSINSKI: *Volume and integral* (Oliver y Boyd, Edinburgo, 1952).

CAPÍTULO XXII

INTEGRALES PARAMÉTRICAS

§ 85. INTEGRACIÓN Y DERIVACIÓN DE SERIES FUNCIONALES

1. Integración de series. — En el estudio de las condiciones que legitiman un doble paso al límite, reiterado, de diverso tipo (tal el puramente funcional en § 65, el de las sucesiones y series dobles en § 81, el de la integración reiterada en § 82), vamos a examinar ahora el que corresponde a combinar la integración con la sumación de series o convergencia de sucesiones funcionales. Veamos condiciones suficientes que aseguren la conmutabilidad de los signos $\int \Sigma = \Sigma \int$ (integral de la serie = serie de las integrales), equivalente a la conmutabilidad $\lim \int = \int \lim$.

Para las integrales (R) (§ 49), las condiciones suficientes de aplicabilidad práctica que pueden darse son bastante restringidas y ésta es una de las razones que aconsejan la ampliación del concepto de integral, según haremos en los §§ 94 y 95.

En el § 43-3 vimos que la convergencia uniforme de las series funcionales, no tan sólo acota el resto de la serie, independientemente de x (definición), sino que conserva en la suma de la serie la continuidad de sus términos; vamos a ver ahora que también conserva la integrabilidad.

TEOR. 1. INTEGRACIÓN TÉRMINO A TÉRMINO. — *Si una serie funcional* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *de funciones integrables* (R) *converge uniformemente a su suma* $S(x)$ *en* $[a, b]$, *entonces* $S(x)$ *es integrable* (R), *la serie de las integrales de los términos es convergente y se cumple*

$$[85\text{-}1] \qquad \int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Si designamos por $S_n(x)$ la suma parcial de los n primeros términos de la serie funcional, por la aditividad *finita* funcional de la integral (R) (§ 48-5, *b*), se tiene que la integrabilidad de los términos de la sucesión $u_n(x)$ implica la de los términos de la sucesión $S_n(x)$ y recíprocamente, pues $u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$, y en ambos casos es

[85-2] $$\sum_{r=1}^{n} \int_a^b u_r(x)\,dx = \int_a^b S_n(x)\,dx.$$

Así pues, el teorema 1 es equivalente a:

TEOR. 2. PASO AL LÍMITE BAJO EL SIGNO INTEGRAL. — *Si una sucesión $S_n(x)$ de funciones integrables* (R) *converge uniformemente a su límite* $S(x)$ *en* $[a, b]$, *entonces* $S(x)$ *es integrable* (R), *la sucesión de integrales es convergente y se cumple*

[85-3] $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Si designamos por $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ el resto de la serie, su supuesta convergencia uniforme significa (§ 45-3) que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural $N(\varepsilon)$ *independiente de* $x \,\varepsilon\, [a, b]$ tal que

[85-4] $$|R_n(x)| < \varepsilon/(b-a)$$

si $n > N$, cualquiera que sea x en $[a, b]$.

Si ω_r, ω_r', ω_r'' son las respectivas oscilaciones de las funciones $S(x)$, $S_n(x)$, $R_n(x)$ en cada uno de los intervalos (§ 49-1) de una partición π de $[a, b]$, será $\omega_r \leqslant \omega_r' + \omega_r''$, y como la condición de integrabilidad (R) de $S_n(x)$ se expresa por $\sum_\pi \omega_r' \delta_r < \varepsilon$, de éstas dos y la [85-4], deducimos que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una partición π de $[a, b]$ respecto de la cual se cumple

$$\Sigma\, \omega_r \delta_r \leqslant \Sigma\, \omega_r' \delta_r + \Sigma\, \omega_r'' \delta_r < \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{b-a} \Sigma\, \delta_r = 3\varepsilon,$$

lo que asegura (§ 49-1) la integrabilidad (R) de $S(x)$.

Por otra parte, [48-29], [85-4] y el teorema del valor medio (§ 48-6) prueban que para $n > N$ es

$$\left| \int_a^b S(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b R_n(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |R_n(x)|\,dx < \varepsilon,$$

que asegura la existencia y valor del límite expresado en [85-3] para $n \to \infty$.

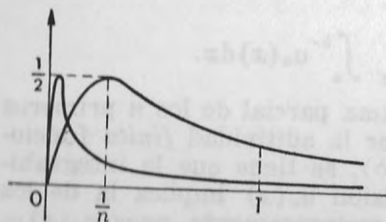


Fig. 293

NOTA 1. La convergencia uniforme es suficiente, pero *no necesaria* para la (R) integrabilidad término a término de una serie funcional.

EJEMPLOS: 1. $S_n(x) = x^n$ en $[0; 1]$ no converge uniformemente, pues la función límite $S(x) = 0$ si $0 \leqslant x < 1$, $S(1) = 1$, es discontinua (§ 43-3, *b*). Sin embargo

$$\lim \int_0^1 x^n\,dx = \lim \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 S(x)\,dx$$

para $n \to \infty$.

2. $S_n(x) = nx/(1 + n^2x^2) \to 0$ para $n \to \infty$, no uniformemente en $[0; 1]$, pues $S_n(1/n) = \frac{1}{2}$ (fig. 293). Sin embargo, es

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx\,dx}{1+n^2x^2} \leqslant \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{n}} + S_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] = 0 = \int_0^1 S(x)\,dx.$$

3. En cambio, para $S_n(x) = nx\,e^{-nx^2}$ que tiende a 0 para $n \to \infty$, no uniformemente en $[0; 1]$ pues $S_n(1/\sqrt{2n}) = \sqrt{n/(2e)}$ (fig. 294), es

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx\,e^{-nx^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \tfrac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 S(x)\,dx.$$

Obsérvese que aquí $S_n(x)$ no se conserva acotado respecto de n (cfr. § 95-4).

NOTA 2. El paso al límite bajo el signo integral se hace más sencillamente en la integral de LEBESGUE (§ 95) que en la de RIEMANN, pues aunque el integrando se conserve acotado, puede ocurrir que la función límite $S(x)$ no sea integrable (R). Así, si en la sucesión (§ 2-11) de puntos racionales $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de $[0; 1]$ definimos $S_n(x) = 1$ en los n primeros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $S_n(x) = 0$ en los otros puntos de $[0; 1]$, la sucesión funcional $S_n(x)$ tiende (no uniformemente, ¿por qué?) a la función de DIRICHLET $S(x)$ (§ 23-3, ejemplo 4). Existe cada integral

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = 0\ ,$$

siendo 0 el límite de la sucesión de integrales, sin que exista

$$\int_0^1 S(x)\,dx\ ,$$

integral del límite (§ 49-2, ejemplo).

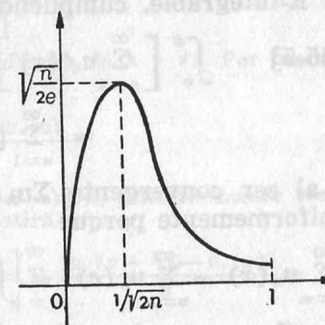


Fig. 294

2. **Derivación de series.** — Aunque una serie (o una sucesión) *uniformemente convergente* tenga derivables todos sus términos, no podrá afirmarse, en general, la existencia e igualdad de la derivada de la serie y la serie de las derivadas.

EJEMPLOS: 1. Las sumas parciales $S_n(x) = (1/n)\,\text{sen}\,nx$ tienden *uniformemente* a $S(x) \equiv 0$ en $[0; 1]$, cuya derivada es $S'(x) \equiv 0$, no coincidente con $\lim S_n'(x) = \lim \cos nx$ para $n \to \infty$, pues éste vale $1 \neq 0$ para $x = 0$ y no existe para $x \,\varepsilon\, (0; 1]$.

2. WEIERSTRASS demostró (Cap. IX, nota VII) que la función

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x)\ ,$$

con $0 < a < 1$, $b =$ entero impar tal que $ab > 3\pi + 1$, no tiene derivada finita ni infinita en ningún punto. Sin embargo, es uniformemente convergente (§ 43-3, c), pues Σa^n es convergente (§ 22-1, b) y cada término es derivable, aunque la serie de las derivadas sea convergente en unos puntos (por ejemplo $x = 0$) y no en otros (por ejemplo $x = \frac{1}{2}$).

Consecuencia inmediata del teorema 1 de § 85-1 es el siguiente:

TEOR. *Si: 1º) en el intervalo* $[a, b]$ *las funciones* $u_n(x)$ *tienen derivadas R-integrables* $u_n'(x)$; *2º) la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *converge uniformemente en* $[a, b]$ *a la función continua* $V(x)$; *3º) en un punto* $c \in [a, b]$ *converge* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c) = S(c)$; *entonces, en todo el intervalo* $[a, b]$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *converge uniformemente a una función* $S(x)$, *para la que existe derivada* $S'(x) = V(x)$.

En efecto, por el teorema citado, la serie de las derivadas es R-integrable, cumpliendo

$$[85\text{-}5] \qquad \int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(x)\,dx = $$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)]$$

y al ser convergente $\Sigma u_n(c)$, también lo es $\Sigma u_n(x) = S(x)$, uniformemente porque

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=m}^{\infty} u_n(c) \right| = \left| \int_c^x \left[\sum_{n=m}^{\infty} u_n'(x)\right] dx \right| < \varepsilon(b-a),$$

si $\left|\sum_{n=m}^{\infty} u_n'(x)\right| < \varepsilon$ desde un m en adelante, independiente de x en $[a, b]$. Entonces, *por haber supuesto continua* $V(x)$ (ver nota 2), podemos derivar (§ 50-1, a) el primer miembro de [85-5] y resulta $V(x) = S'(x)$.

NOTAS: 1. Obsérvese que para la derivabilidad término a término, la hipótesis de convergencia uniforme se refiere a la serie derivada (ver ejemplos 1 y 2).

2. La aplicación del teorema 1 de § 85-1 exige la R-integrabilidad de $u_n'(x)$ (cfr. § 50-2, nota 4) y la continuidad de $V(x)$. Sin embargo, en el enunciado del teorema anterior se puede prescindir de ambas condiciones y así subsiste con las mismas palabras, sustituyendo sólo "derivadas R-integrables" por "derivadas finitas" y "función continua $V(x)$" por "función $V(x)$", aunque la demostración no pueda entonces apoyarse en el teorema 1 de § 85-1. Es la siguiente:

Para $\varepsilon > 0$ arbitrario, existirá m_0 *independiente de* x en $[a, b]$ tal que para $m \geqslant m_0$ y todo p sea:

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} u_n'(x) \right| < \varepsilon/(b-a).$$

De aquí deducimos, por el teorema de LAGRANGE (§ 35-1) aplicado a la función $\sum_{n=m}^{m+p} u_n(x)$:

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} u_n(x) - \sum_{n=m}^{m+p} u_n(c) \right| = |x - c| \cdot \left| \sum_{n=m}^{m+p} u_n'(\xi) \right| < \varepsilon,$$

por lo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

converge uniformemente a una suma $S(x)$.

Para $x \in [a, b]$ y todo $h \neq 0$ tal que $x + h \in [a, b]$ es

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} \frac{1}{h}\left\{ u_n(x+h) - u_n(x) \right\} \right| = \left| \frac{1}{h}\left\{ \sum_{n=m}^{m+p} u_n(x+h) - \sum_{n=m}^{m+p} u_n(x) \right\} \right| =$$
$$= \left| \sum_{n=m}^{m+p} u_n'(x + \theta h) \right| < \varepsilon,$$

para $0 < \theta < 1$ y todo p y $m \geqslant m_0$ *independientes* de h y θ. Por tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h}$$

tiende al cociente incremental $[S(x+h) - S(x)]/h$, uniformemente respecto de $h \neq 0$, por lo que para $h \to 0$ existirá

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{h\to 0} \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = V(x),$$

como queríamos demostrar.

Obsérvese que como $1/h \to \infty$ para $h \to 0$, de la convergencia uniforme de

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),$$

no se puede deducir sin más (§ 43-3 nota 2) la del cociente incremental $[S(x+h) - S(x)]/h$.

EJERCICIOS

1. Dadas las sucesiones funcionales $S_n(x)$ siguientes:

a) $nx^2e^{-nx^2}$,

b) nxe^{-nx^2},

c) $\dfrac{x}{1+n^2x^2}$,

d) $\dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n}$,

estudiar en el entorno de $x=0$ su convergencia uniforme y la de sus derivadas $S_n'(x)$, viendo si las $S_n(x)$ son derivables término a término. Estudiar también la integrabilidad término a término de dichas sucesiones $S_n(x)$ y la de sus derivadas $S_n'(x)$ en el intervalo $[0; 1]$.

2. Estudiar en $[0; 1]$ la convergencia uniforme y la derivación término a término de

$$S(x) = \sum_1^{\infty} [(x^k/k) - (x^{k+1})/(k+1)].$$

Convergencia uniforme de la serie derivada.

3. Demostrar que si en un conjunto X es $f(x) = \Sigma u_n(x)$ convergente uniformemente y $g(x)$ se conserva acotada, entonces

$$f(x).g(x) = \Sigma g(x)u_n(x)$$

converge uniformemente (cfr. § 43-3, nota 2).

4. Mostrar por qué en § 85-2, Teor., la convergencia uniforme en $[a, b]$ de $\Sigma u_n'(x)$ con $u_n'(x)$ continuas, no implica que $\Sigma u_n(x)$ converja en algún punto de $[a, b]$. Aplíquese al ejemplo $u_n(x) = \cos(x/n)$.

5. Compárense los valores de

$$\int_0^x \left(\sum_1^{\infty} u_k(t)\right) dt \quad y \quad \sum_1^{\infty} \int_0^x u_k(t)\, dt$$

para

$$u_k = \frac{2k^2t}{(1+k^2t^2)\ln(k+1)} - \frac{2(k+1)^2t}{[1+(k+1)^2t^2]\ln(k+2)},$$

explicando el resultado.

6. Probar que si $S_n(x)$ es derivable en $[a, b]$, tal que $|S_n'(x)| < K$ (con K constante independiente de n y x) y la sucesión $S_n(x)$ converge en todo punto de $[a, b]$, entonces esta convergencia es uniforme.

7. Probar que si la serie $\Sigma u_n(x)$ tiene las sumas parciales acotadas $|S_n(x)| < K$ (con K constante independiente de n y x) y para todo $\delta > 0$ es $\Sigma u_n(x)$ integrable término a término en $[a, c-\delta]$ y $[c+\delta, b]$, entonces también lo es en $[a, b]$.

8. Bajo las hipótesis del ejercicio 7, probar que si $g(x)$ no acotada en $[a, b]$ tiene en este intervalo, integral absolutamente convergente (§ 80-8), entonces $\Sigma u_n(x)g(x)$ es integrable término a término en $[a, b]$ (cfr. § 43-3, nota 2 y ejercicio 3).

§ 86. INTEGRALES PARAMÉTRICAS PROPIAS E IMPROPIAS

1. Definiciones. Equicontinuidad. — *a*) En § 80 hemos estudiado las integrales en intervalo infinito o con puntos singulares (en cuyo entorno no está acotado el integrando), paralelamente en lo posible a las series funcionales, y respecto de éstas, hemos visto en § 43 y § 85 condiciones suficientes suplementarias que permiten conservar las propiedades de límites funcionales, continuidad, derivación e integración de una suma de un número finito de funciones. En términos precisos: designando por Σ_n la suma de un número finito de sumandos y por $\int_a^x$ la R-integral en intervalo finito (a, x), se verifican estas permutaciones entre los símbolos Σ, lim, $\int$ y D:

$$\text{I)} \quad \lim_x \Sigma_n = \Sigma_n \lim_x \;;$$

$$\text{II)} \quad \int_a^x \Sigma_n = \Sigma_n \int_a^x \;;$$

$$\text{III)} \quad D_x \Sigma_n = \Sigma_n D_x ,$$

mientras que, al pasar de la suma finita Σ_n a la serie o integral, no subsisten en general, y así como lo hemos hecho para las series (§§ 43 y 85), hemos de ver ahora condiciones suficientes suplementarias que permitan conservar dichas propiedades, si se consideran integrales (R) paramétricas *propias* (de intervalo finito e integrando acotado) o *impropias* (de intervalo infinito o con puntos singulares).

DEF. 1. Integral *funcional*, o integral *paramétrica*, es toda integral en intervalo finito o infinito de una función $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ que además de la variable de integración x, depende de uno o varios parámetros y_r.

Para cada valor o grupo de valores de estos parámetros, resulta una función distinta de la variable x, y su integral definida en $a \leqslant x \leqslant b$, cuando existe, es un número que depende de los valores dados a $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ó sea: *la integral paramétrica define una función de los parámetros, que son sus variables independientes.*

Consideremos integrales de un solo parámetro, caso al que se reduce el de varios, y veamos el caso más sencillo, en que tales integrales ordinarias en intervalo finito tienen las mismas propiedades I, II, III, de las sumas.

b) Demos nociones análogas a la de convergencia uniforme de las series (§ 43-3) que nos ha servido (§ 85) para trasladar a éstas las propiedades II, III.

DEF. 2. Se dice que $f(x, y)$ es *equicontinua* en y_0 para x en $[a, b]$ (o que es *continua en y_0 uniformemente* respecto de x en $[a, b]$, si para

todo $\varepsilon > 0$, corresponde $\delta > 0$, *independiente de* x en $[a, b]$ tal que sea $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$, cuando $|y - y_0| < \delta$.

Geométricamente esto significa que la curva $f(x, y)$, donde x es la variable independiente e y el parámetro, podrá *a la vez, en todo* $[a, b]$ aproximarse tanto como se quiera a la curva $f(x, y_0)$.

NOTA. En § 65-3, nota 2, dimos ya este concepto, como caso particular de paso al límite respecto de un parámetro, uniformemente en x (§ 65-2, nota 2). Vimos también allí el teorema de HEINE, según el cual si $f(x, y)$ es continua en ambas variables superficialmente, también es equicontinua en una de ellas respecto de la otra, pero en cambio no basta que sea continua en y para cada $x \varepsilon [a, b]$, para poder decir que es equicontinua en y respecto de x en $[a, b]$.

EJEMPLOS: 1. La función $f(x, y) = y/(y^2 + x^2)$ si $x \neq 0$, con $f(0, y) = 0$, es continua en y para cada x, pero no es equicontinua en $y_0 = 0$ respecto de cualquier conjunto de x que tenga $x = 0$ como punto de acumulación. En cambio, es equicontinua para cualquier otro valor de $y_0 \neq 0$, aun cuando $f(x, y)$ no sea continua en $x = 0$ y cualquier $y \neq 0$ fijo (fig. 295).

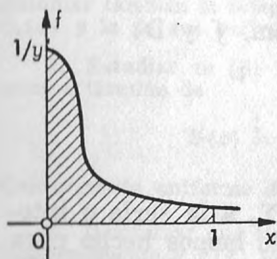


Fig. 295

2. Para cada x fijo, la función y^x es continua (§ 27-4) en $y = 1$; pero dado $\varepsilon > 0$, no es posible encontrar un $\delta = \Delta y > 0$ tal que $|1 - (1 + \delta)^x| < \varepsilon$ válido para todo $x \geqslant 1$ (§ 27-1), es decir y^x no es equicontinua en $y = 1$ para $1 < x < +\infty$. En cambio, lo es para $0 < x < 1$, y además, en $y = 1^-$ (a la izquierda de 1) es y^x equicontinua en $0 < x < +\infty$. En $y = 0^+$, es y^x equicontinua para $1 < x < +\infty$ y no lo es para $0 < x < 1$.

DEF. 3. Se dice que $f(x, y)$ es *derivable en* $y = y_0$, *uniformemente respecto de* x en $[a, b]$, si el cociente incremental $\Delta_y f(x, y_0)/\Delta y_0$ con x constante, converge a su límite $f_y(x, y_0)$ uniformemente respecto de x en $[a, b]$ (§ 65-2, nota 2), es decir, si $\Delta_y f(x, y_0)/\Delta y_0 = f_y(x, y_0) + \varepsilon$ con $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ para $|\Delta y_0| < \delta$ *independiente* de x en $[a, b]$.

EJEMPLO 3. Sea $f(x, y) = (y^2/x) \operatorname{sen}(x/y)$ si $x^2 y^2 > 0$, con $f(0, y) = f(x, 0) = 0$. Para $y_0 = 0$, $\Delta y_0 = k \neq 0$ es $\Delta f/k = (k/x) \operatorname{sen}(x/k) \to 0$, si $x \neq 0$, siendo $\Delta f/k = 0$ si $x = 0$. Por tanto, existe $f_y(x, 0) = 0$ para todo $x \varepsilon [0, 1]$, pero no uniformemente respecto de x en $[0, 1]$, pues para todo k por pequeño que sea, se puede hacer $\Delta f/k$ tan próximo a 1 como se quiera, tomando $x \neq 0$ suficientemente pequeño (§ 28-2).

2. Continuidad, integración y derivación de integrales propias paramétricas.

— *a*) TEOR. 1. *Si* $f(x, y)$ *es continua respecto del par* (x, y) *en el rectángulo* $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, *la función*

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

es continua en todo punto y *de* (c, d). (DINI, 1878). Pues siendo

$$\Delta\varphi(y) = \int_a^b [f(x, y + k) - f(x, y)]\, dx ,$$

por el teorema de HEINE (§ 65-3, nota 2) sobre funciones continuas de dos variables, el incremento entre corchetes es, en valor absoluto, menor que ε para $|k| < \delta$ *independiente de* x en $[a, b]$, y por tanto

$$|\Delta\varphi(y)| \leqslant \varepsilon(b - a).$$

COROLARIO. Para cada y_0 en $[c, d]$ es

$$[86\text{-}1] \qquad \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x, y_0)\, dx ,$$

quedando así probada la permutabilidad [86-1] de límite e integral, es decir, la continuidad de la integral en el punto y_0.

NOTAS: 1. El teorema subsiste para extremos variables:

TEOR. 1ª. *Si* $a(y)$, $b(y)$ *son continuas en* $[c, d]$ *y* $f(x, y)$ *es continua en un dominio* D *que contenga en su interior el* $R = \{a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$, *es*

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \quad \textit{continua en } (c, d).$$

Sean $y_0 \varepsilon (c, d)$ é $y_1 = y_0 + k\, \varepsilon [c, d]$; llamando $a(y_i) = a_i$, $b(y_i) = b_i$, $(i = 0; 1)$ se tiene:

$$\varphi(y_1) - \varphi(y_0) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y_1)\, dx - \int_{a_0}^{b_0} f(x, y_0)\, dx =$$

$$= \int_{a_0}^{b_0} [f(x, y_1) - f(x, y_0)]\, dx + \int_{a_1}^{a_0} f(x, y_1)\, dx + \int_{b_0}^{b_1} f(x, y_1)\, dx ,$$

pudiendo las tres últimas integrales referirse a intervalos no contenidos en el dominio R (fig. 296), aun cuando para k suficientemente pequeño estarán dentro del interior de D que lo comprende. Entonces, estas tres integrales tienden a 0 con $k \to 0$; la primera por lo visto en el teorema 1, las otras dos por ser $|f(x, y)|$ acotada en D, y $|a_1 - a_0| \to 0$, $|b_1 - b_0| \to 0$ para $k \to 0$ por la continuidad de $a(y)$ y $b(y)$. (Cfr. nota 7).

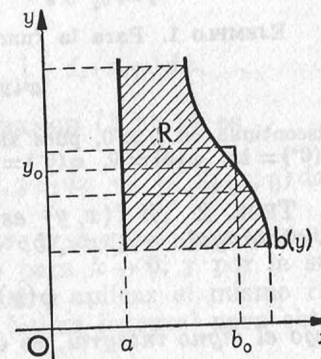


Fig. 296

2. Con la noción de equicontinuidad (§ 86-1, def. 2), el teorema 1 puede generalizarse en la siguiente forma:

TEOR. 1ᵇ. *Sea*

$$\varphi(y) = \int_a^{b(y)} f(x, y)\, dx$$

donde suponemos a *constante,* $b(y)$ *variable con* y, $f(x, y)$ *integrable* (R) *respecto de* x *en* $[a, b(y)]$ *para los valores de* y *de un entorno de* y_0. *Para que* $\varphi(y)$ *sea continua en* y_0 *es suficiente que simultáneamente:*

1º) *Sea* $f(x, y)$ *equicontinua en* y_0 *para* x *en* $[a, b_0]$ *con* $b_0 = b(y_0)$;
2º) *Exista* K *tal que* $|f(x, y)| < K$ *para todo* $x \varepsilon [b_0, b(y)]$ *é* y *en*

un entorno de y_0, *siendo en éste* $f(x, y)$ *integrable* (R) *respecto de* x *en un intervalo que contenga en su interior* $[a, b_0]$;

3º) *Sea* $b(y)$ *continua en* y_0.

La marcha de la demostración consiste en ver que $\Delta\varphi = \Delta_1\varphi + \Delta_2\varphi$ (fig. 297) tiene el primer sumando $\Delta_1\varphi$ de base determinada y altura tan pequeña como se quiera, y el segundo sumando $\Delta_2\varphi$ *existente* y de altura acotada y base tan pequeña como se quiera. Pues dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta(\varepsilon)$, independiente de x en $[a, b_0]$, tal que sea simultáneamente $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon/(b_0 - a)$ para $x \,\varepsilon\, [a, b_0]$, $|b(y) - b(y_0)| < \varepsilon/(2K)$. Entonces, *existen* las integrales siguientes y es:

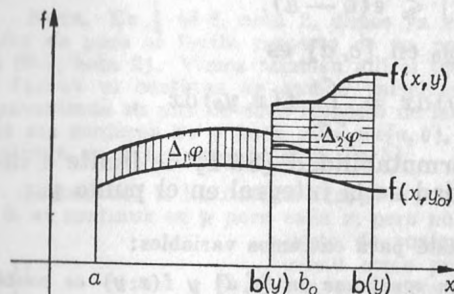


Fig. 297

$$|\Delta\varphi(y)| \leqslant \left|\int_a^{b_0} f(x, y)\,dx - \int_a^{b_0} f(x, y_0)\,dx\right| + \left|\int_{b_0}^{b(y)} f(x, y)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^{b_0} |f(x, y) - f(x, y_0)|\,dx + K\,|b(y) - b_0| < \varepsilon$$

para $|\Delta y_0| < \delta$, como queríamos demostrar. (Cfr. nota 7).

La conclusión puede expresarse también en la forma del paso al límite bajo el signo integral:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{b(y)} f(x, y)\,dx = \int_a^{b_0} f(x, y_0)\,dx.$$

EJEMPLO 1. Para la función de § 86-1, ejemplo 1, es

$$\varphi(y) = \int_0^1 f(x, y)\,dx$$

discontinua en $y = 0$, pues siendo $\varphi(y) = \operatorname{Arc\,tg}(1/y)$ si $y \neq 0$, resulta $\varphi(0^+) = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(0^-) = -\frac{1}{2}\pi$.

TEOR. 2. *Si* $f(x, y)$ *es continua respecto del par* (x, y) *en el rectángulo* $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, *se puede integrar*

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

bajo el signo integral, es decir

$$[86\text{-}2] \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

En efecto, siendo $f(x, y)$ continua, existe su integral doble y por tanto las dos integrales reiteradas, que son iguales (§ 82-5).

Queda así generalizada la permutación (II) $\int_c^y \int_a^x = \int_a^x \int_c^y$ para integrales propias.

NOTA 3. Este teorema admite una amplia generalización, pues aunque $f(x, y)$ no sea continua y no exista la integral doble, LICHTENSTEIN ha llegado a demostrar que basta la existencia de

$$\int_a^b f(x, y)\,dx$$

para *todo* $y \,\varepsilon\, [c, d]$ y la de

$$\int_c^d f(x, y)\,dy$$

para *todo* $x \,\varepsilon\, [a, b]$, para que existan ambas integrales reiteradas y sean iguales.

Teorema (FUBINI) más sencillo y completo se consigue en la teoría de la integral de LEBESGUE (cfr. § 95-6).

EJEMPLO 2.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{y}\frac{dy}{y} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dy}{y}\int_0^\pi \cos\frac{x}{y}\frac{dx}{y} = \int_0^\pi dx \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos\frac{x}{y}\frac{dy}{y^2} =$$

$$= \int_0^\pi (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)\frac{dx}{x} = \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

TEOR. 3. *Si*

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

existe en $c \leqslant y \leqslant d$, *y el integrando admite derivada* $f_y(x, y)$ *continua respecto del par* (x, y) *en el rectángulo* $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, *entonces la función* $\varphi(y)$ *admite derivada para todo* $y \,\varepsilon\, (c, d)$, *obtenible derivando respecto de* y *bajo el signo integral* (*regla de* LEIBNIZ):

$$[86\text{-}3] \quad \varphi'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b f_y(x, y)\,dx.$$

En efecto, por el teorema de LAGRANGE (§ 35-1) es

$$\frac{\Delta\varphi(y)}{k} = \frac{1}{k}\int_a^b [f(x, y + k) - f(x, y)]\,dx = \int_a^b f_y(x, \eta)\,dx$$

donde η es un punto intermedio entre y é $y + k$, que aunque pueda depender de x, tiende hacia y para $k \to 0$, y por la supuesta continuidad de $f_y(x, y)$, se podrá aplicar el mismo razonamiento empleado en [86-1] a la última integral para obtener [86-3].

Queda así generalizada la permutación (III):

$$D_y \int_a^x = \int_a^x D_y$$

para integrales propias.

NOTAS: 4. El teorema anterior se generaliza, si en lugar de la continuidad de $f_y(x, y)$, suponemos sólo que existe derivada parcial $f_y(x\ y_0)$ uniformemente respecto de x en $[a, b]$ (§ 86-1, def. 3), tal que $f_y(x, y_0)$

sea integrable en $[a, b]$, cumpliéndose también entonces la [86-3] para $y = y_0$.

En efecto, para $\Delta y_0 = k$ menor en valor absoluto que δ, será

$$\left|\frac{\Delta\varphi(y_0)}{k} - \int_a^b f_y(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^b \left[\frac{\Delta_y f(x,y_0)}{k} - f_y(x,y)\right] dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b \varepsilon\,dx\right| < \varepsilon_0(b-a) \quad ,$$

tan pequeño como se quiera con $\varepsilon_0 > 0$.

5. *Continuidad, integración y derivación de integrales múltiples.* — La integral múltiple de una función, que contiene uno o varios parámetros, define una función de estos parámetros:

$$\varphi(y_1,\ldots,y_m) = \int_D f(x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_m)\,dx_1.\ldots.dx_n.$$

Con ligero cambio de notaciones quedan generalizados los teoremas 1, 2, 3, en esta forma:

TEOR. 1'. *Si* $f(x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_m)$ *es continua respecto del grupo de* $m+n$ *variables para*

$$a_r \leqslant x_r \leqslant b_r \quad , \quad c_s \leqslant y_s \leqslant d_s \qquad (r = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, m) \quad ,$$

la integral n-ple sobre un dominio X *contenido en el ortoedro* $a_r \leqslant x_r \leqslant b_r$ *define una función* $\varphi(y_1,\ldots,y_m)$ *continua en el ortoedro* $c_s \leqslant y_s \leqslant d_s$.

En particular, es función continua respecto de cada una de las m *variables* $y_1, \ldots, y_m$.

TEOR. 2'. *Con las mismas hipótesis, se puede integrar bajo el signo respecto de una o varias de las variables* $y_1, \ldots, y_m$ *en todo dominio* Y *contenido en el ortoedro* $c_s \leqslant y_s \leqslant d_s$.

TEOR. 3'. *Si* $f(x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_m)$ *admite derivada respecto de* y_r *y esta derivada* $f_{y_r}(x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_m)$ *es función continua del punto* $(x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_m)$, *su integral en un dominio* X *contenido en el ortoedro* $a_r \leqslant x_r \leqslant b_r$ *es la derivada parcial* φ_{y_r}.

Brevemente: es legítimo derivar bajo el signo de integral múltiple, cuando el integrando que así resulta es función continua del grupo de variables y parámetros.

b) Regla general de derivación bajo el signo integral. — Se refiere al caso en que a y b son también función del parámetro y. Se tiene:

TEOR. 3^b^. *Si* $a(y)$ *y* $b(y)$ *están definidas en un entorno de* y_0, *existiendo las derivadas* $a'(y_0)$, $b'(y_0)$, *la función* $f(x,y)$ *en* $a(y) \leqslant x \leqslant b(y)$ *tiene derivada* $f_y(x,y)$, *siendo* f *y* f_y *continuas respecto del par* (x,y) *en un recinto que comprenda en su interior la región* R *dada por cada* y *del entorno de* y_0 *y* x *comprendida entre los valores homólogos* $a(y)$ *y* $b(y)$, *entonces la función*

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

tiene la derivada

$$[86\text{-}4] \quad \varphi'(y_0) = \int_{a_0}^{b_0} f_y(x,y_0)\,dx + f(b_0,y_0)\,b'(y_0) - f(a_0,y_0)\,a'(y_0) \quad ,$$

con $b_0 = b(y_0)$, $a_0 = a(y_0)$.

Pues es

$$[86\text{-}5] \qquad \Delta\varphi = \varphi(y_0+k) - \varphi(y_0) =$$

$$= \int_{a_0+\Delta a_0}^{b_0+\Delta b_0} f(x, y_0+k)\,dx - \int_{a_0}^{b_0} f(x,y_0)\,dx =$$

$$= \int_{a_0}^{b_0} [f(x,y_0+k) - f(x,y_0)]\,dx + \int_{b_0}^{b_0+\Delta b_0} f(x,y_0+k)\,dx - \int_{a_0}^{a_0+\Delta a_0} f(x,y_0+k)\,dx \quad ,$$

pudiendo estas integrales del último miembro referirse a intervalos que caigan fuera de la región R (fig. 296), aun cuando para k suficientemente pequeño estarán dentro del recinto que la comprende. Si se aplica al integrando de la primera integral del teorema de LAGRANGE (§ 35-1) y a las dos últimas integrales el primer teorema del valor medio (§ 48-6), de [86-5] se deduce

$$\Delta\varphi = k\int_{a_0}^{b_0} f_y(x,\eta)\,dx + \Delta b_0\, f(b_0+\theta_1\Delta b_0,\ y_0+k) - \Delta a_0\, f(a_0+\theta_2\Delta a_0,\ y_0+k) \quad ,$$

con $\eta\,\varepsilon\,(y_0, y_0+k)$ y $0 < \theta_i < 1$, $(i = 1; 2)$.

Dividiendo la anterior por $k \to 0$, basta aplicar [86-1] a la primera integral, y la supuesta existencia de $b'(y_0)$ y $a'(y_0)$, así como la continuidad de $f(x,y)$ a los dos últimos sumandos, para ver que existe $\varphi'(y_0)$ y vale [86-4].

NOTAS: 6. Por la supuesta continuidad de $f(x,y)$ respecto de x, si a y b son variables independientes, es (§ 50-1): $\varphi_b = f(b,y)$, $\varphi_a = -f(a,y)$. De ahí y el teorema 3, se recuerda fácilmente [86-4] por la regla de derivación de funciones compuestas (§ 67-1), pues el primer término del segundo miembro de [86-4] procede de derivar parcialmente bajo el signo integral respecto de y, suponiendo constantes a y b; y los otros dos se forman con las derivadas parciales respecto de éstos.

7. Para la validez de [86-4], basta suponer sólo la continuidad de f y f_y en la región R, si se supone que en un entorno de y_0 *existen y son continuas* $a'(y)$, $b'(y)$. Pues entonces el teorema 3^b^ se reduce al teorema 3 con el cambio de variable (§ 51-3, b): $x = a(y) + [b(y) - a(y)]t$, dando

$$\varphi(y) = \int_0^1 (b-a)\,f(x,y)\,dt \quad , \quad \text{con derivada}$$

$$\varphi'(y) = \int_0^1 (b-a)\,f_y\,dt + \int_0^1 (b-a)\,f_x\,\frac{\partial x}{\partial y}\,dt + \int_0^1 (b'-a')\,f\,dt =$$

$$= \int_0^1 f_y \frac{\partial x}{\partial t} dt + \int_0^1 \left(f_x \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial t} + f \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial y} \right) dt =$$

$$= \int_a^b f_y \, dx + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(f \frac{\partial x}{\partial y} \right) dt \; ,$$

resultando (§ 50-2) la fórmula [86-4], válida para todo y del entorno de y_0 donde se cumplen las condiciones de hipótesis.

Análoga observación puede hacerse respecto de los teoremas 1ª (nota 1) y 1ᵇ (nota 2).

EJEMPLOS: 3. Para hallar la diferencial total de la función

$$\varphi(y, z) = \int_{\operatorname{sen} y}^{\ln z} \frac{\operatorname{sen}(yx)}{xz} dx \; ,$$

que no puede expresarse por funciones elementales, basta hallar

$$\varphi_y = \int_{\operatorname{sen} y}^{\ln z} \frac{\cos(yx)}{z} dx - \frac{\cos y \operatorname{sen}(y \operatorname{sen} y)}{z \operatorname{sen} y} \; ,$$

$$\varphi_z = - \int_{\operatorname{sen} y}^{\ln z} \frac{\operatorname{sen}(yx)}{xz^2} dx + \frac{\operatorname{sen}(y \ln z)}{z^2 \ln z} \; ,$$

y aplicar $d\varphi = \varphi_y \, dy + \varphi_z \, dz$. Obsérvese que la integral que figura en φ_y puede expresarse ahora mediante funciones elementales.

4. Hallemos el momento de orden n del área del trapezoide determinado por la curva $f(x)$ en el intervalo $[a, t]$ respecto del eje variable $x = t$ (fig. 298) (cfr. § 84-5 y § 84-7):

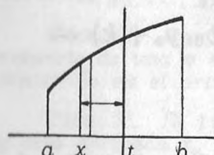


Fig. 298

$$\mu_n(t) = \int_a^t f(x)(t - x)^n dx .$$

Derivando bajo el signo integral:

$$\mu'_n(t) = n \int_a^t f(x)(t - x)^{n-1} dx + f(t) 0^n = n \mu_{n-1} .$$

Partiendo de

$$\mu_0(t) = \int_a^t f(x) \, dx \; ,$$

por integraciones sucesivas (cfr. § 51-5, nota 3, y § 106-1, nota 2), se van calculando $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, ...; haciendo $t = b$ se tienen los momentos de la función en $[a, b]$ respecto del eje $x = b$. Para un eje a la derecha de b basta completar la función para $x > b$ con valores nulos.

Así puede hacerse un cálculo gráfico rápido de los momentos sucesivos. Si $y = f(x)$ representa la curva, con $y = 0$ para $x > b$, sea

$$y_1 = \mu_0 = \int_a^t f(x) \, dx$$

la curva integral (§ 58-2), cuya ordenada y_1 representa el área (momento de orden 0) encerrada por la curva, el eje x y las verticales $x = a$, $x = t$ (fig. 299). Para $t > b$, se prolonga y_1 desde b hasta t por una horizontal. El momento de primer orden (estático) se obtiene mediante la curva integral y_2 respecto de y_1, de modo que

$$\mu_1 = \int_a^t \mu_0 \, dx = \int_a^t y_1 \, dx = y_2 .$$

Para $t > b$, se prolonga y_2 desde b hasta t mediante la tangente en b a la curva y_2, con pendiente dada por y_1 en b. La abscisa g del baricentro G vendrá dada por la intersección de esta tangente con el eje x, pues ello indicará que es nulo (§ 84-6) el momento estático del área *total* entre a y b respecto de $x = g$.

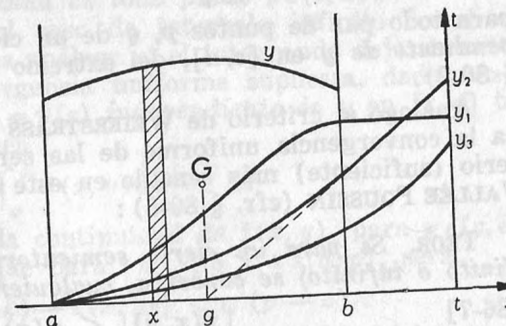


Fig. 299

Si integramos de nuevo la curva y_2, obtendremos una nueva curva y_3, cuyas ordenadas multiplicadas por 2 dan los momentos de inercia o de segundo orden:

$$\mu_2 = 2 \int_a^t \mu_1 \, dx = 2 \int_a^t y_2 \, dx = 2 y_3 .$$

Para $t > b$ se prolonga y_3 con una parábola de segundo orden tangente a ella en $x = b$, pues su derivada entre b y t es el segmento y_2. Volviendo a integrar y_3, se obtendrá el momento de tercer orden mediante

$$\mu_3 = 3 \int_a^t \mu_2 \, dx = 3! \int_a^t y_3 \, dx = 3! \, y_4 \; ,$$

donde y_4 se prolonga entre b y t mediante una parábola de tercer orden: y así puede seguirse sucesivamente.

3. Integrales paramétricas impropias: convergencia uniforme. — Como se ha dicho en § 86-1, las integrales paramétricas pueden ser impropias, por referirse a intervalo infinito o tener puntos singulares (en cuyo entorno no esté acotado el integrando, § 80-1). Para cada valor del parámetro subsisten los criterios de convergencia simple estudiados en § 80. Pero ahora tiene particular importancia el concepto de convergencia uniforme de la integral impropia respecto de un conjunto determinado de valores del parámetro.

DEF. Dado el conjunto de funciones $f(x, y)$ en el intervalo paramétrico $c \leqslant y \leqslant d$, se dirá que *la integral impropia*

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$$

con un extremo singular (finito o infinito) es uniformemente convergente respecto de y *en* $[c, d]$ *si se alcanzan uniformemente* (§ 65-2, nota 2) *respecto de* y *en* $[c, d]$ *los límites que figuran en la definición de* § 80-1.

En virtud del criterio de convergencia de BOLZANO-CAUCHY (§ 65-1, nota 2) esto ocurrirá si y sólo si para cada número $\varepsilon > 0$, se verifica

[86-6] $$\left|\int_p^q f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \ ,$$

para todo par de puntos p, q de un cierto semientorno, *independiente de* y en $[c,d]$, del extremo singular (cfr. teor. de § 80-2).

Análogo al criterio de WEIERSTRASS (§ 43-3, *c*) que asegura la convergencia uniforme de las series funcionales, el criterio (suficiente) más sencillo en este caso es el siguiente de VALLÉE POUSSIN (cfr. § 80-6):

TEOR. *Si para un cierto semientorno del punto singular (finito o infinito) se conserva, cualquiera que sea* $y \,\varepsilon [c,d]$:

[86-7] $$|f(x,y)| \leqslant g(x)$$

y la integral impropia

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

es convergente, entonces

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

es absoluta y uniformemente convergente respecto de y *en* $[c,d]$.

Pues por la desigualdad [48-29], el primer miembro de [86-6] será menor que el correspondiente a $g(x)$, independiente de y.

EJEMPLO. Sea $f(x,y) = e^{y-x}$ si $x \geqslant y$; $f(x,y) = 0$ si $x < y$. La integral impropia

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_y^{+\infty} e^{y-x}\,dx = +1 \ ,$$

no es uniformemente convergente respecto de y en $[c, +\infty)$, pues por grande que sea y, la última integral vale siempre $+1$, es decir, en [86-6], para cualquier p, tomando q suficientemente grande, el primer miembro se acerca a 1 tanto como se quiera.

4. Continuidad, integración y derivación de integrales paramétricas impropias. — El concepto de convergencia uniforme en las integrales impropias permite extender a éstas los teoremas estudiados en § 86-2.

TEOR. 1. *Si la integral impropia*

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

es uniformemente convergente respecto de y *en* $[c,d]$, *siendo* $f(x,y)$ *continua respecto del par* (x,y) *en todo rectángulo de altura* $c \leqslant y \leqslant d$, *cuya base se obtenga excluyendo del intervalo* $a \leqslant x \leqslant b$ *un semientorno cualquiera del punto singular, entonces* $\varphi(y)$ *es continua en todo punto* $y \,\varepsilon (c,d)$.

Probémoslo para el caso de intervalo infinito $b = +\infty$, pues la demostración es análoga si el integrando deja de estar acotado. Por la convergencia uniforme supuesta, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $p = p(\varepsilon)$ *independiente* de y en $[c,d]$ tal que para cualquier y sea

$$\left|\int_p^{\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon .$$

Fijado así $p(\varepsilon)$, por la continuidad de $f(x,y)$, para $y \,\varepsilon (c,d)$ existirá un $\delta(\varepsilon)$ tal que para $|k| < \delta$ y $x \,\varepsilon [a,p]$, será

$$|f(x,y+k) - f(x,y)| < \varepsilon/(p-a) .$$

De ambas acotaciones se deduce, para $|k| < \delta(\varepsilon)$:

$$|\varphi(y+k) - \varphi(y)| = \left|\int_a^{\infty} f(x,y+k)\,dx - \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_a^p [f(x,y+k) - f(x,y)]\,dx\right| + \left|\int_p^{\infty} f(x,y+k)\,dx\right| +$$
$$+ \left|\int_p^{\infty} f(x,y)\,dx\right| < 3\varepsilon \ ,$$

que prueba la continuidad de $\varphi(y)$ en todo $y \,\varepsilon (c,d)$.

NOTA 1. Obsérvese que en la demostración sólo interviene la equicontinuidad de $f(x,y)$ en y respecto de x en $[a,p]$, por lo que puede establecerse también aquí el análogo del teorema 1º de § 86-2.

TEOR. 2. *Con las mismas hipótesis del teor. 1, se puede integrar bajo el signo integral, es decir*:

[86-8] $$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy .$$

Supongamos también la integral infinita: $b = +\infty$. Aplicando la permutabilidad en la integral propia probada en § 86-2, teor. 2, bastará ver que

[86-9] $$\lim_{p \to +\infty} \int_c^d dy \int_a^p f(x,y)\,dx = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx .$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existirá $p_0(\varepsilon)$ independiente de y en $[c,d]$, tal que si $p > p_0$ se cumple

$$\left|\int_p^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \ ,$$

siendo por tanto, para $p > p_0(\varepsilon)$:

$$\left|\int_c^d dy \int_a^p f(x,y)\,dx - \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_c^d dy \int_p^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}\,dy = \varepsilon \ ,$$

quedando así probada [86-9] y también [86-8].

NOTA. 2. Obsérvese que la demostración no es válida si también $d \to +\infty$, por lo que la permutación

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} \mathrm{f}\, dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} \mathrm{f}\, dy$$

requerirá en cada caso un estudio especial (ver ejemplo 2).

TEOR. 3. *Para la validez de la regla de* LEIBNIZ *de derivación bajo el signo integral:*

$$[86\text{-}10] \qquad \frac{d}{dy}\int_a^b \mathrm{f}(x, y)\, dx = \int_a^b \mathrm{f}_y(x, y)\, dx$$

en todo $y \,\varepsilon (c, d)$, *es suficiente que la integral impropia del segundo miembro de* [86-10] *sea uniformemente convergente respecto de* y *en* $[c, d]$, *que* $\mathrm{f}_y(x, y)$ *sea continua respecto del par* (x, y) *en todo rectángulo de altura* $c \leqslant y \leqslant d$, *cuya base se obtenga excluyendo del intervalo* $a \leqslant x \leqslant b$ *un semientorno cualquiera del punto singular y que la integral impropia del primer miembro de* [86-10] *exista; entonces la derivada respecto de* $y \,\varepsilon (c, d)$ *de esta integral existe y es igual al segundo miembro.*

Supongamos también integrales infinitas: $b = +\infty$. Por § 50-1, *a*, para $\mathrm{Y} \,\varepsilon [c, d]$, es:

$$\int_c^{\mathrm{Y}} \mathrm{f}_y(x, y)\, dy = \mathrm{f}(x, \mathrm{Y}) - \mathrm{f}(x, c).$$

Tomando integrales infinitas en ambos miembros:

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{f}(x, \mathrm{Y})\, dx - \int_a^{+\infty} \mathrm{f}(x, c)\, dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{\mathrm{Y}} \mathrm{f}_y(x, y)\, dy =$$

$$= \int_c^{\mathrm{Y}} dy \int_a^{+\infty} \mathrm{f}_y(x, y)\, dx \quad ,$$

cuya última igualdad se justifica por el teorema 2 aplicado a f_y. El último miembro tiene derivada respecto de Y (§ 50-1, *a*, y teor. 1), luego también lo tiene el primero y es:

$$\frac{d}{d\mathrm{Y}} \int_a^{+\infty} \mathrm{f}(x, \mathrm{Y})\, dx = \int_a^{+\infty} \mathrm{f}_y(x, \mathrm{Y})\, dx \quad ,$$

como queríamos probar.

NOTAS: 3. Obsérvese que la convergencia uniforme se exige a la integral impropia de integrando f_y.

4. Si las integrales dependen de varios parámetros, se pueden establecer teoremas análogos a los anteriores (cfr. § 86-2, nota 5).

EJEMPLOS: 1. Para la función de § 86-3, ejemplo, no puede aplicarse la derivación bajo el signo integral, pues es

$$\varphi'(y) \equiv 0 \neq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}_y(x, y)\, dx = \int_y^{+\infty} e^{y-x}\, dx = +1.$$

Ello se debe a que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}_y(x, y)\, dx \quad ,$$

aunque existente, no es uniformemente convergente respecto de y. Obsérvese que al derivar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}\, dx = \int_y^{+\infty} e^{y-x}\, dx .$$

el límite inferior es variable, y de acuerdo con [86-4] debería ser

$$\varphi'(y) = \int_y^{+\infty} e^{y-x}\, dx - e^{y-y} = 1 - 1 = 0 \quad ,$$

pues tomando una constante $b > y$, se aplica § 86-2, *b*, a la integral en $x \,\varepsilon [y, b]$, y § 86-4, teor. 3, a la integral en $x \,\varepsilon [b, +\infty]$.

2. En § 51-5, *a*, se ha visto que

$$[51\text{-}10] \qquad \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + \mathrm{C} \quad ,$$

de donde, para $a = -1$, $b = y$ resulta:

$$[86\text{-}11] \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(yx)\, dx = \frac{1}{1 + y^2} .$$

Por el criterio de VALLÉE POUSSIN (§ 86-3, teor.), esta integral infinita es uniformemente convergente respecto de cualquier conjunto y, pues $|\cos(yx)| \leqslant 1$, pudiéndose aplicar la fórmula [86-8] de integración bajo el signo:

$$[86\text{-}12] \qquad \int_0^{\mathrm{Y}} dy \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(yx)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{Y}x)}{x}\, dx = \operatorname{Arc\,tg} \mathrm{Y}.$$

Por tanto existe

$$[86\text{-}13] \qquad \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(yx)\, dx = \lim_{\mathrm{Y} \to +\infty} \operatorname{Arc\,tg} \mathrm{Y} = +\tfrac{1}{2}\pi \quad ,$$

no siendo conmutable la integración infinita reiterada del primer miembro, a pesar de ser la integral [86-11] uniformemente convergente respecto de y en $[0, +\infty)$ (ver nota 2).

Obsérvese también que el segundo miembro de [86-12] tiene límite para $\mathrm{Y} \to \infty$, aunque oscile el integrando, es decir, ahí no podemos tomar límites bajo el signo integral, que no podrá ser uniformemente convergente para $\mathrm{Y} \to \infty$ (teor. 1). Sin embargo, se elude la dificultad por el cambio de variables $\mathrm{Y}x = t$, y llamando $\beta = 1/\mathrm{Y} > 0$, de [86-12] deducimos

$$[86\text{-}14] \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{\beta} ,$$

cuyo primer miembro es ahora uniformemente convergente respecto de β en $(0, \beta_0)$, pues por el segundo teorema del valor medio (§ 79-2, *a*):

$$\left| \int_p^q e^{-\beta t} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \right| = \left| \frac{e^{-\beta p}}{p} \int_p^{\xi} \operatorname{sen} t\, dt \right| < \frac{2}{p} \quad ,$$

independiente de $\beta > 0$ y que puede hacerse tan pequeño como se quiera para p suficientemente grande, cumpliéndose así [86-6].

Por tanto, puede aplicarse a [86-14] el teorema 1 y será:

$$[86\text{-}15] \qquad \lim_{\beta \to 0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \lim_{\beta \to 0} \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{\beta} \right) = +\tfrac{1}{2}\pi.$$

De esta manera hemos conseguido evaluar la integral infinita que figura en el segundo miembro de [86-15], convergente (§ 80-5, ej. 1), y útil en muchas cuestiones.

Con el cambio de variable $t = kx$ obsérvese que es

$$[86\text{-}16] \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{x}\, dx = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sg} k \ ,$$

por lo que [86-16] es ejemplo de integral impropia no uniformemente convergente respecto de k en un entorno de 0, al representar una función $\varphi(k)$ discontinua en $k = 0$ (teor. 1).

Ejercicios

1. Estudiar el límite $\varphi(0^+)$ para

$$\varphi(y) = \int_0^1 \frac{y}{(y+x)^2}\, dx.$$

2. Supuestas existentes y continuas $g_x(x,y)$ y $g_{xy}(x,y)$ en el entorno U de (a,b), aplicar § 86-2, Teor. 3, y § 50-1, a) a

$$g(x,y) = g(a,y) + \int_a^x g_x(\xi, y)\, d\xi$$

para demostrar que existe y es $g_{yx} = g_{xy}$ en el entorno U de (a,b); (cfr. § 69-2).

3. Aplíquese § 86-2, ejemplo 4, para demostrar que

$$\int_a^t dx_n \int_a^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_a^{x_1} f(x)\, dx = \frac{1}{n!}\int_a^t f(x)\,(t-x)^n\, dx \ ;$$

(cfr. § 51-5, nota 3, y § 106-1, nota 2).

4. Demostrar que para $y > -1$ es posible de

$$\frac{1}{1+y} = \int_0^1 x^y\, dx \ ,$$

deducir

$$\frac{1}{(1+y)^2} = -\int_0^1 x^y \ln x\, dx.$$

5. Demostrar que para $|y| < 1$ y $|\operatorname{Arc\,sen} y| < \frac{1}{2}\pi$, es

$$\varphi(y) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + y\cos x)}{\cos x}\, dx = \pi \operatorname{Arc\,sen} y.$$

6. La función de Bessel $J_0(x)$ puede definirse por

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Demostrar que $J''_0 + (1/x)J'_0 + J_0 = 0$ (cfr. Cap. XXVII, nota I).

7. Para r entero no negativo, puede definirse la función de Bessel $J_r(x)$ mediante

$$J_r(x) = \frac{x^r}{1.3\ldots(2r-1)\pi}\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{r-\frac{1}{2}} \cos(xt)\, dt.$$

Demostrar que se cumple

$$J_r'' + \frac{1}{x}J_r' + \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right)J_r = 0 \ , \quad (r \geqslant 0)$$

$$J_{r+1} = J_{r-1} - 2J_r' \ , \quad (r \geqslant 1) \quad ; \quad J_1 = -J_0'.$$

8. Demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} \cos x\, dx = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+a^2}{1+b^2}$$

9. Calcúlese

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)\, J_0(bx)}{x}\, dx \ ,$$

donde J_0 es la función de Bessel definida en el ejercicio 6.

10. Demostrar que

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-xt}\, dt$$

converge uniformemente respecto de $x \geqslant \delta > 0$ y deducir a partir de

$$\int_0^{\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x} \quad \text{que} \quad \int_0^{\infty} t^n e^{-xt}\, dt = \frac{n!}{x^{n+1}} .$$

Para $x = 1$ resulta la función (ver Cap. XXIX, nota VII):

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

con $\Gamma(n+1) = n!$ (cfr. § 53-2, ejemplo 1, y § 53, ejercicio 8).

11. Por método análogo al del ejercicio 10 evaluar

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$$

teniendo en cuenta [53-15].

12. Derivando

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{x}$$

obtener

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{x^{2n-1}}$$

donde $m!!$ es el producto de factores decrecientes de dos en dos unidades (§ 53-2, ejemplo 2). Para $x = \sqrt{n}$, de $e^{-t^2} = \lim(1 - t^2/n)^n$ para $n \to \infty$, uniformemente respecto de t, y [53-15], deducir la fórmula de Wallis [53-13].

13. Teniendo en cuenta [53-15], demostrar que

$$\varphi(y) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(2yx)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-t^2/a} \ , \quad (a > 0).$$

14. Estudiar la existencia y convergencia uniforme de

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau^2 y} \operatorname{sen} y\, dy$$

en el entorno de $\tau = 0$. Lo mismo para

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau^2 y}\, d\tau$$

en el semientorno $y \geqslant 0$

15. Demostrar que

$$\int_0^T d\tau \int_0^Y e^{-\tau^2 y} \operatorname{sen} y \, dy = \int_0^Y dy \int_0^T e^{-\tau^2 y} \operatorname{sen} y \, d\tau = F(T, Y).$$

Probar la existencia de $G(T) = \lim F(T, Y)$ para $Y \to \infty$, y de $H(Y) = \lim F(T, Y)$ para $T \to \infty$, resultando

$$G(T) = \int_0^\infty dy \int_0^T e^{-\tau^2 y} \operatorname{sen} y \, d\tau = \int_0^T d\tau \int_0^\infty e^{-\tau^2 y} \operatorname{sen} y \, dy \quad ,$$

$$H(Y) = \int_0^\infty d\tau \int_0^Y e^{-\tau^2 y} \operatorname{sen} y \, dy = \int_0^Y dy \int_0^\infty e^{-\tau^2 y} \operatorname{sen} y \, d\tau \quad ,$$

a pesar del ejercicio 14.

16. Demostrar que si $\sum_0^\infty a_n x^n$ es convergente para $x > 0$, entonces puede multiplicarse por e^{-x} e integrarse término a término sobre $(0, \infty)$, siempre que la serie resultante

$$\sum_0^\infty n! a_n$$

sea también convergente. (HARDY).

§ 87. INTEGRALES MÚLTIPLES IMPROPIAS

1. **Concepto de integral múltiple impropia.** — *a*) Como en el caso de integral simple (§ 80-1), llamaremos aquí también *punto singular* del dominio D de integración a todo punto en cuyo entorno no está acotada la función. Si los puntos singulares son aislados, la integral impropia se define por un proceso análogo al visto para una variable independiente. Se encierra el punto singular P por una sucesión de entornos U_n cuyo diámetro (§ 82-1) tienda a cero y supuesta $f(x)$ integrable en todo dominio residual (conjunto cerrado): $D_n = D - U_n$, se dice existe *integral impropia convergente* con *valor* I, si existe y es finito el límite:

$$[87\text{-}1] \qquad I = \lim_{n \to \infty} \int_{D_n} f(x) dx \quad ,$$

independientemente de la particular selección D_n *con fronteras de medida nula* (§ 83-3, *d*) *que excluye el punto singular* P.

Análogamente se define la *integral impropia sobre una región infinita R*, aproximando ésta por una sucesión de dominios $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ acotados y con fronteras de medida nula, tales que cualquier dominio acotado contenido en *R* está contenido en todo D_n, desde un valor de $n = m$ en adelante. Si existe el límite [87-1] *independientemente de la particular selección* D_n, se dice que dicho límite finito es el *valor* de la *integral impropia convergente.*

b) El *criterio general de convergencia* de BOLZANO-CAUCHY

(§ 65-1, nota 2) es también aquí *condición necesaria y suficiente de existencia de integral impropia con valor finito* y se expresa así: A todo $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que respecto de dos recintos cualesquiera U_1 y U_2 de diámetro menor que δ, con frontera de medida nula y conteniendo el punto singular P corresponden integrales propias sobre los dominios (recintos cerrados) $D - U_1$ y $D - U_2$ que difieren en menos de ε. Análogamente para una región infinita *R*.

c) Si la función f conserva su signo en D, es suficiente para asegurar la convergencia, que exista el límite para una particular sucesión D_n, que puede aún suponerse monótona, es decir, $D_n (\leqq) D_{n+1}$. Pues, si R_n es otra sucesión arbitraria y f es no-negativa, para D_p contenido en D, corresponde $n_0(p)$ tal que para $n \geqslant n_0(p)$ es $D_p (\leqq) R_n$. Recíprocamente, se cumple que todo $R_n (\leqq) D_m$ desde un valor de *m* en adelante, y de la acotación

$$\int_{D_p} f(x) dx \leqslant \int_{R_n} f(x) dx \leqslant \int_{D_m} f(x) dx \quad ,$$

se deduce que la sucesión de integrales intermedias tiene el mismo límite que la de los miembros extremos.

NOTA. A veces un adecuado cambio de coordenadas transforma una integral impropia en propia. Por ejemplo, si es $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, no acotada en el origen, excluído por un círculo de radio δ, si D es el círculo unidad, resulta al pasar a coordenadas polares (§ 83-4, ejemplo):

$$\iint_{D_\delta} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\delta^1 r \ln r \, dr \quad ,$$

y por ser (§ 37-4) $\lim_{r \to 0} (r \ln r) = 0$, la última integral deja de ser impropia, siendo por tanto, convergente la primera.

2. **Criterios de convergencia.** — DEF. Una integral impropia es *absolutamente convergente*, si es convergente la correspondiente al valor absoluto del integrando.

Esta clase de integrales se reduce al caso de función de signo constante (§ 87-1, *c*) mediante $f = |f| - (|f| - f)$.

Por el criterio general de convergencia (§ 87-1, *b*), una integral impropia absolutamente convergente, es convergente *.

Para el caso de funciones de dos variables, con punto singular en el origen de coordenadas O, criterio *suficiente* (no necesario) de convergencia es el siguiente (cfr. § 80-7):

TEOR. 1. *Si la función* $f(x, y)$, *integrable en todo subdo-*

* Con la definición dada de integral múltiple impropia (debida a JORDAN) se demuestra también el recíproco, es decir, que una integral múltiple impropia convergente es absolutamente convergente (véase HOBSON, vol. I, pág. 524, citado en Cap. IX, nota VIII, 3). El modo particular de excluir los puntos de infinitud, incluso en el método de HARNACK (§ 80-9) posibilita la existencia de integrales simples impropias condicionalmente convergentes; una definición menos restrictiva de integral múltiple impropia (§ 87-5) posibilitaría también en éstas la convergencia condicional (véanse ejercicios 4 a 7).

minio de D *con frontera de medida nula que excluya el punto singular* O, *es tal que existe una cota* M *y un exponente positivo* $h < 2$ *que cumplan*

[87-2] $$|\,\mathrm{f}(x, y)\,| \leqslant \mathrm{M}/(\sqrt{x^2+y^2})^h$$

para todo $(x, y) \in \mathrm{D}$ *distinto del origen* $\mathrm{O} \in \mathrm{D}$, *entonces la integral* [87-1] *es absolutamente convergente.*

En efecto, podemos suponer (§ 87-1, *c*) D y D_n circulares de radios R, δ_n, y siendo

$$\left|\int\!\!\int_{\mathrm{D}_n} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int\!\!\int_{\mathrm{D}_n} |\,\mathrm{f}(x, y)\,|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \mathrm{M}\int\!\!\int_{\mathrm{D}_n} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(\sqrt{x^2+y^2})^h}$$

al pasar a coordenadas polares (§ 83-4, ejemplo), queda

$$\int\!\!\int_{\mathrm{D}_n} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(\sqrt{x^2+y^2})^h} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\delta_n}^{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{d}r}{r^{h-1}},$$

convergente (§ 80-7) si $h - 1 < 1$, es decir $h < 2$.

Análogamente para una función de tres variables se establece:

TEOR. 2. *La integral impropia en el origen* $\mathrm{O} \in \mathrm{D}$ *de una función* $\mathrm{f}(x, y, z)$, *integrable en todo subdominio de* D *con frontera de medida nula que excluya el origen, es convergente, si existe una cota* M *y un exponente positivo* $h < 3$, *que cumplan*

[87-3] $$|\,\mathrm{f}(x, y, z)\,| \leqslant \mathrm{M}/(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^h$$

para todo $(x, y, z) \in \mathrm{D}$ *distinto del origen.*

Pues podemos considerar dominios esféricos (§ 87-1, *c*), y al pasar a coordenadas esféricas (§ 84-2), resulta:

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{D}_n} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^h} = \int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{D}_n} \frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\varphi}{r^{h-2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\lambda \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_{\delta_n}^{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{d}r}{r^{h-2}} = 4\pi\int_{\delta_n}^{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{d}r}{r^{h-2}},$$

convergente (§ 80-7) si $h - 2 < 1$, es decir $h < 3$.

NOTAS: 1. Si el punto singular P es el (a, b) ó (a, b, c) en lugar del origen, se sustituye $\sqrt{x^2+y^2}$ ó $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ por $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ ó $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ en las consideraciones anteriores.

2. Los demás criterios prácticos de convergencia o divergencia absolutas vistos para integrales simples (§ 80-6 y 7) pueden también trasladarse fácilmente aquí siguiendo la pauta anterior.

Así, si en lugar de integral con punto singular, se considera integral extendida a una región infinita R de E_n, será *suficiente* para su convergencia que el integrando (ya no infinito) sea *infinitésimo potencial* (cfr. § 80-7, nota 1) de orden $k > n$ (número de variables independientes) en la parte de R exterior a un círculo, esfera, o hiperesfera de radio tendiendo a infinito.

3. Las integrales múltiples impropias admiten generalizaciones análogas a las vistas para las simples (§ 80-9) y aun en este caso el conjunto de puntos singulares pueden formar variedades de dimensión posi-

tiva. Así en E_2, si los puntos singulares de $\mathrm{f}(x, y)$ forman una *línea singular* o en general un conjunto de *extensión plana nula* (§ 82-2), se procede como en § 87-1, *a*, excluyendo dicho conjunto por recintos U_n de áreas que tiendan a cero y pasando al límite. Por ejemplo, si un segmento del eje y es singular, basta que sea $|\,\mathrm{f}(x, y)\,| \leqslant \mathrm{M}/x^h$ con $h < 1$ sobre todo punto de D que no esté en le eje y para que la integral converja.

EJEMPLO. Propongámonos estudiar los valores reales que deben tomar a, b, c para que sea

$$\mathrm{I}(a, b, c) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = +1.$$

Por ser el integrando positivo, debe ser infinitésimo (aquí exponencial) en el infinito (nota 2), para lo que es necesario y suficiente que su exponente sea una forma cuadrática positiva definida (§ 63-7) que por un adecuado cambio de variables podremos siempre reducir a la forma canónica:

$$\xi^2 + \eta^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}(ax+by)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2.$$

Debe ser (§ 63-7, teor. 1) $a > 0$ con

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0,$$

obteniendo: $\xi = (ax+by)/\sqrt{a}$, $\eta = \sqrt{(ac-b^2)/a}\,.\,y$, con jacobiano

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \sqrt{ac-b^2}.$$

Por ser (cfr. § 87-3)

$$\mathrm{J} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+\eta^2)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \pi = \sqrt{ac-b^2}\,\mathrm{I},$$

(§ 83-4), resulta en definitiva que las condiciones buscadas son $a > 0$ con $ac - b^2 = \pi^2$.

3. Integral de Poisson. — Es la

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

importante en el Cálculo de posibilidades y ya calculada en § 53-5. Método más sencillo es pasar a integral doble de integrando positivo para aplicar la propiedad estudiada en § 87-1, *c*. Así, consideremos la integral J_a de $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$ sobre el círculo C: $0 \leqslant r \leqslant a$, que vale (cfr. § 84-3, ejemplo 3):

$$\mathrm{J}_a = \int\!\!\int_{\mathrm{C}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r = \pi(1-e^{-a^2}).$$

Si llamamos

$$\mathrm{I}_a = \int_0^a e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

la integral de $e^{-x^2-y^2}$ sobre el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ es

$$\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\,.\int_0^a e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_a^2.$$

Como el cuadrado a que se refiere el primer miembro contiene y está contenido en cuartos de círculo de radio $\mathrm{R} \to \infty$ para $a \to \infty$, podremos escribir: $\lim \mathrm{I}_a^2 = \lim \frac{1}{4}\mathrm{J}_a = \frac{1}{4}\pi$ para $a \to \infty$, de donde

[87-4] $$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

4. Integrales de Fresnel. — Para calcular

[87-5] $$I = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\,dy \ ,$$

$$J = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy \ ,$$

cuya convergencia *condicional* ya conocemos (§ 80-8), a pesar de no tender a cero los integrandos $\operatorname{sen}(x^2)$, $\cos(x^2)$ para $x \to \infty$ (§ 80-2), expresemos

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\tau^2 y}\,d\tau \ ,$$

poniendo $x = \tau\sqrt{y}$ en la integral de POISSON [87-4].

Vimos en § 51-5, *a*, que $e^{ay}\,{\operatorname{sen} \atop \cos}\, by$ deriva de

$$\frac{e^{ay}}{a^2+b^2}\left({a \atop b}\operatorname{sen} by \mp {b \atop a}\cos by\right)$$

y para $a = -\tau^2 \neq 0$, $b = 1$, aplicados a $[0, \infty)$ dan

[87-6] $$\int_0^\infty e^{-\tau^2 y}\operatorname{sen} y\,dy = \frac{1}{1+\tau^4} \ ; \quad \int_0^\infty e^{-\tau^2 y}\cos y\,dy = \frac{\tau^2}{1+\tau^4} .$$

Aunque en [86-13] no era conmutable el orden de integración, a pesar de ser [86-11] uniformemente convergente respecto de y en $[0, +\infty)$, en cambio ahora es conmutable

[87-7] $$I = \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{e^{-\tau^2 y}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} y\,d\tau = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty \frac{e^{-\tau^2 y}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} y\,dy \ ,$$

a pesar de que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau^2 y}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} y\,dy$$

no exista en $\tau = 0$, ni sea uniformemente convergente respecto de τ en un conjunto que tenga $\tau = 0$ como punto de acumulación, pues no representa una función de τ continua en $\tau = 0$ (§ 86-4, teor. 1). La conmutabilidad [87-7] es consecuencia de la existencia de la integral *doble* del integrando en la región infinita $R = \{y \geqslant 0;\ \tau \geqslant 0\}$, probada por aplicación del criterio general de convergencia (§ 87-1, *b*). En efecto, basta excluir de R sendas fajas de anchura δ junto a $\tau = 0$ é $y = 0$ en la siguiente forma: Por el segundo teorema del valor medio (§ 79-2) es

$$\left|\int_0^\delta d\tau \int_p^q \frac{e^{-\tau^2 y}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} y\,dy\right| = \left|\int_0^\delta \frac{e^{-\tau^2 p}}{\sqrt{\pi}}\,d\tau \int_p^\xi \operatorname{sen} y\,dy\right| < \frac{2\delta}{\sqrt{\pi}} \ ,$$

para p y q cualesquiera, *independientes* de δ; por el primer teorema del valor medio (§ 48-6) y [87-4] se obtiene

$$\left|\int_0^\delta dy \int_p^q \frac{e^{-\tau^2 y}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} y\,d\tau\right| = \left|\int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} y}{2\sqrt{y}}\,dy\right| < \sqrt{\delta} \ ,$$

también para p y q cualesquiera, *indepedientes* de δ.

Por otra parte, en la región restante de R, la integral doble converge por ser el integrando infinitésimo exponencial (§ 87-2, nota 2, y § 37-4). Así hemos probado la existencia del límite doble de

$$F(T, Y) = \int_0^Y dy \int_0^T \frac{e^{-\tau^2 y}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} y\,d\tau = \int_0^T d\tau \int_0^Y \frac{e^{-\tau^2 y}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} y\,dy$$

para $(T, Y) \to \infty$ simultáneamente. Existen también los límites simples

$$G(T) = \lim_{Y\to\infty} F(T, Y) = \int_0^\infty \operatorname{sen} y\,dy \int_0^T \frac{e^{-\tau^2 y}}{\sqrt{\pi}}\,d\tau \ ,$$

$$H(Y) = \lim_{T\to\infty} F(T, Y) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\tau^2 Y}(\tau^2 \operatorname{sen} Y + \cos Y)}{\sqrt{\pi}\,(1+\tau^4)}\,d\tau \ ,$$

pues la primera integral infinita converge (condicionalmente) por el criterio de DIRICHLET (§ 80-8), ya aplicado a los últimos miembros de [87-5], al tender

$$\int_0^T e^{-\tau^2 y}\,d\tau$$

monótonamente a cero para $y \to +\infty$, y la segunda integral infinita converge absolutamente (§ 80-7).

De la existencia de la integral doble infinita y de los límites simples $G(T)$ y $H(Y)$ sigue la existencia de ambos miembros de [87-7] y su igualdad con el valor de la integral doble (§ 65-2, nota 1).

Los segundos miembros de [87-6] saben integrarse como funciones racionales, pues derivan respectivamente de (§ 52-1):

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\tau^2+\sqrt{2}\,\tau+1}{\tau^2-\sqrt{2}\,\tau+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,\tau}{1-\tau^2}$$

y

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\tau^2-\sqrt{2}\,\tau+1}{\tau^2+\sqrt{2}\,\tau+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2\tau-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2\tau+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right),$$

que entre $[0, \infty)$ proporcionan el mismo valor $\pi/(2\sqrt{2})$, el cual, aplicado a [87-7] y su análoga para el coseno da

[87-8] $$I = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx = J = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\pi/8} .$$

5. Integral de Cayley. — Si para [87-1] se toman límites excluyendo un número finito de rectángulos infinitésimos de lados paralelos a los ejes, conteniendo cada uno al menos un punto de infinitud, obtendríamos un concepto de integral propia que por admitir convergencia no-absoluta, no coincide con el más restrictivo dado anteriormente. Análogamente para el caso de dominio de integración infinito. Así para el cuadrante positivo, la definición rectangular sería:

[87-9] $$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\,dx\,dy = \lim \int_0^b \int_0^a f(x, y)\,dx\,dy$$

para $(a, b) \to \infty$, que por exigir menos, resulta más general que la dada en § 87-1.

Así, CAYLEY dió el ejemplo $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ que integrada según rectángulos $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, da mediante integrales de FRESNEL (§ 87-4) el valor:

$$\int_0^a \int_0^b \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^a \operatorname{sen}(x^2)\,dx \cdot \int_0^b \cos(y^2)\,dy \ +$$

$$+ \int_0^a \cos(x^2)\,dx \cdot \int_0^b \operatorname{sen}(y^2)\,dy$$

que para $(a, b) \to \infty$ tiende según [87-8] a $\frac{1}{4}\pi$. En cambio, si se integra según un cuarto de círculo $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $0 \leqslant r \leqslant R$, con $R \to \infty$, pasando a coordenadas polares se obtiene:

$$\iint_{D_n} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dS = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^R r \operatorname{sen} r^2\,dr = \tfrac{1}{4}\pi(1-\cos(R^2)) \quad ,$$

oscilante para $R \to \infty$.

Ni aun el concepto más general [87-9] dará convergencia independiente del modo de tomar los rectángulos en integrandos de signo variable.

EJEMPLO. La función escalonada que se conserva constante en cada cuadrado unitario, con los valores indicados en la fig. 300, integrada reiteradamente da

$$\int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f\,dx = +1 \quad ; \quad \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f\,dy = -1 \quad .$$

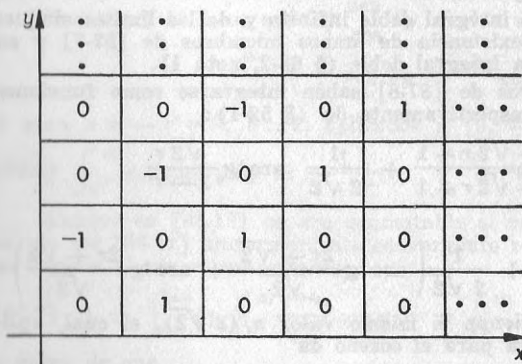


Fig. 300

Por cuadrados daría el valor cero; pero en realidad carece de significado numérico, por ser oscilante, ya que por grandes que se tomen a y b en $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, hay rectángulos en que vale $+1$, en otros -1 y en otros 0.

Tales distinciones desaparecen cuando el integrando es de signo constante (§ 87-1, *c*) y también cuando la integral impropia se reduce por definición directa o indirecta a absolutamente convergente (§ 87-2).

EJERCICIOS

1. Calcular $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{\sqrt{x+y}}$.

2. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

3. Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}(Ax^2+2Bxy+Cy^2)\,dx\,dy$,

$$(a>0,\ ac-b^2>0).$$

4. Estúdiese la existencia de la integral doble impropia

$$\iint \frac{1}{x^2+y^2} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

sobre el círculo unidad: *a*) Excluyendo el origen por un entorno circular infinitésimo de centro en él; *b*) Aplicando la definición más restrictiva de § 87-1; elíjase como dominio D_n el conjunto de anillos circulares de centro origen que cortan al semieje x positivo en los intervalos

$$\left[\frac{1}{(2n+1)\pi}\ ,\ 1\right],\ \left[\frac{1}{(2n+3)\pi}\ ,\ \frac{1}{(2n+2)\pi}\right],$$

$$\left[\frac{1}{(2n+5)\pi}\ ,\ \frac{1}{(2n+4)\pi}\right],\ \ldots\ ,\ \left[\frac{1}{(4n+1)\pi}\ ,\ \frac{1}{4n\pi}\right],$$

anillos unidos entre sí por pequeñas regiones angulares de amplitud δ_p en los anillos complementarios, compensadas uniendo éstos por otras regiones angulares de amplitud ε_p en los anillos considerados, de modo que

$$\varepsilon_p \int_{\frac{1}{(2p+1)\pi}}^{\frac{1}{2p\pi}} \frac{1}{r} \operatorname{sen} \frac{1}{r}\,dr = -\,\delta_p \int_{\frac{1}{2p\pi}}^{\frac{1}{(2p-1)\pi}} \frac{1}{r} \operatorname{sen} \frac{1}{r}\,dr \ ,$$

$$(p = n+1, \ldots, 2n).$$

5. Por método análogo al del ejercicio 4 demostrar que en el rectángulo limitado por $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, la integral doble de $(1/x)\operatorname{sen}(1/x)$ no existe según definición de § 87-1, mientras que la integral simple

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\,dx$$

(§ 80-9, ejemplo 2) existe según la definición de § 80-1. Hacer ver que excluyendo la línea singular $x=0$ por el rectángulo $x=0$, $x=\varepsilon$, $y=0$, $y=1$, existe el

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\,dx\,dy$$

6. Calcúlense en el cuadrante de coordenadas positivas las integrales

$$\iint \operatorname{sen}(ax^2+2bxy+cy^2)\,dx\,dy \ ,$$

$$\iint \cos(ax^2+2bxy+cy^2)\,dx\,dy \quad , \quad (a>0,\ ac-b^2>0) \quad ,$$

por rectángulos y por cuartos de círculo. Existencia de dichas integrales.

7. Hágase estudio análogo al del ejercicio 6 para las integrales

$$\iint \operatorname{sen}(xy)\,dx\,dy \quad , \quad \iint \cos(xy)\,dx\,dy$$

sobre el cuadrante de coordenadas positivas.

8. La *frecuencia* de un error x en una *distribución normal* es $ke^{-h^2x^2}$, lo que significa que la probabilidad de un error x entre a y b es

$$\int_a^b ke^{-h^2x^2}\,dx .$$

Siendo segura la existencia de algún error de cierta magnitud, debe ser

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-h^2x^2}\,dx = 1 \quad ,$$

de donde por [87-4] dedúzcase que $k = h/\sqrt{\pi}$.

9. Con la notación del ejercicio 8, el *error medio cuadrático* μ se define por

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 k e^{-h^2 x^2} dx \quad , \quad \text{con} \quad k = h/\sqrt{\pi}.$$

Deducir de esto y de § 86, ejercicio 11, que $\mu = 1/(h\sqrt{2})$.

10. Definida en [57-9] la *función error*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad ,$$

demostrar con la notación del ejercicio 8 que la probabilidad de un error entre $-c$ y c es $\Phi(ch)$. El *error probable* ε (de probabilidad $\frac{1}{2}$ de no ser superado) queda así definido por $\frac{1}{2} = \Phi(\varepsilon h)$. Mediante la inversión de la serie [57-10] se calcula $\varepsilon = 0{,}4769/h$.

NOTAS AL CAPÍTULO XXII

I. **Bibliografía.** — Incluyen el estudio de las integrales impropias y paramétricas los tratados generales de Análisis matemático (citados en Cap. XVIII, nota IV, 1 y 2) siendo muy cuidadoso en ésta como en las demás cuestiones el de HOBSON. También les prestan particular atención las partes iniciales de las obras especiales dedicadas a las integrales de FOURIER y aparentadas (cfr. Cap. XXV, nota IV, 5); entre éstas, contiene un desarrollo muy detallado la de

H. S. CARSLAW: *Introduction to the theory of* FOURIER'S *series and integrals and the mathematical theory of the conduction of heat* (3ª ed., Macmillan, Londres, 1931; reimpr.: Dover, Nueva York).



CAPÍTULO XXIII

INTEGRALES CURVILÍNEAS. ANÁLISIS VECTORIAL

§ 88. INTEGRAL CURVILÍNEA

1. Definición y reducción a integrales definidas. — Como para las funciones de una variable, también para las de dos variables hay un doble problema de Cálculo integral: la integral definida entre dos puntos (a, b), (a', b') (cfr. §§ 48 y 49), y el problema inverso de la derivación, o sea, el cálculo de una función conocidas sus derivadas (cfr. Cap. XIV).

Lo mismo que allí (§ 50), el primer problema se reduce al segundo, pero la analogía no es completa, pues carece de sentido hablar de función primitiva de una sola función; en cambio, se dirá que $U = U(x, y)$ es *función primitiva* o *función potencial* del par de funciones $P(x, y)$, $Q(x, y)$, cuando sea: $U_x = P$, $U_y = Q$.

Si el par P, Q admite dos funciones primitivas en un recinto, la diferencia de éstas es constante, pues siendo nulas sus derivadas parciales, debe ser independiente de x y de y.

a) Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ dos funciones continuas y uniformes en un recinto D. Llamaremos *arco elemental* a un arco regular (§ 34-6) C, contenido en D, tal que exista una representación paramétrica regular

[88-1] $x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad (T_0 \leqslant t \leqslant T_1) \quad ,$

para la cual las derivadas $x'(t)$, $y'(t)$ (existentes y no simultáneamente nulas ni infinitas en un mismo punto) (§ 34-6), sean *continuas*, y por tanto acotadas en dicho intervalo:

[88-2] $|x'(t)| < M \quad , \quad |y'(t)| < M.$

Curva elemental es la compuesta por un número finito de arcos elementales.

La observación de que *en la curva* C las funciones de dos variables $P(x, y)$, $Q(x, y)$ se reducen a funciones compuestas *de una variable t*:

[88-3] $P[x(t), y(t)] = P^*(t) \quad , \quad Q[x(t), y(t)] = Q^*(t)$

sugiere la siguiente definición de integral, análoga a la de integral definida (§ 48-3).

Para cada partición del intervalo $T_0 \leqslant t \leqslant T_1$:

[88-4] $$T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T_1 \quad ,$$

y llamando $x_r = x(t_r)$, $y_r = y(t_r)$, podemos considerar las sumas (cfr. [48-14]):

[88-5] $$\left\{\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{n} P^*(\tau_r)(x_r - x_{r-1}) = \\ &= \Sigma P[x(\tau_r), y(\tau_r)] \, . \, [x(t_r) - x(t_{r-1})] \quad , \\ &\sum_{r=1}^{n} Q^*(\tau_r)(y_r - y_{r-1}) = \\ &= \Sigma Q[x(\tau_r), y(\tau_r)] \, . \, [y(t_r) - y(t_{r-1})] \quad , \end{aligned}\right.$$

cuyos límites cuando tiende a cero la norma $\delta = \text{Máx}(t_r - t_{r-1})$ de la partición [88-1], llamaremos (si existen) integrales curvilíneas de $P(x, y)$ respecto de x, y de $Q(x, y)$ respecto de y, sobre el arco C, o a lo largo del arco C, llamado *camino de integración*, e indicaremos:

[88-6] $$\int_C P(x, y)\,dx \quad ; \quad \int_C Q(x, y)\,dy .$$

TEOR. *En las hipótesis hechas sobre* P, Q *y el arco* C, *las integrales curvilíneas* [88-6]:

1º) *Existen y están dadas por las integrales definidas*

[88-7] $$\left\{\begin{aligned} &\int_C P(x, y)\,dx = \int_{T_0}^{T_1} P^*(t)x'(t)\,dt \quad ; \\ &\int_C Q(x, y)\,dy = \int_{T_0}^{T_1} Q^*(t)y'(t)\,dt \end{aligned}\right.$$

que resultan de reemplazar las ecuaciones del camino de integración en el integrando, la diferencial, y los límites;

2º) *Son independientes de la representación paramétrica elegida para el arco* C.

DEM. 1º) Por el teorema de los incrementos finitos (§ 35-1) es

$$x_r - x_{r-1} = x(t_r) - x(t_{r-1}) = x'(\tau'_r)(t_r - t_{r-1}),$$

con

$$t_{r-1} < \tau'_r < t_r$$

y entonces la primera suma [88-5] se transforma así:

$$\Sigma P^*(\tau'_r)x'(\tau'_r)(t_r - t_{r-1}) +$$
$$+ \Sigma[P^*(\tau_r) - P^*(\tau'_r)]\,x'(\tau'_r)(t_r - t_{r-1}).$$

Cuando $\delta \to 0$, la primera de estas sumas tiende (§ 48-3) a la integral definida que figura en la primera [88-7] y la segunda tiende a cero, pues dado $\varepsilon > 0$ será para δ suficientemente pequeño, por la continuidad de $P(x, y)$, $x(t)$ é $y(t)$; $|P^*(\tau_r) - P^*(\tau'_r)| < \varepsilon/[M(T_1 - T_0)]$, y entonces

$$\left|\sum_{r=1}^{n} [P^*(\tau_r) - P^*(\tau'_r)]\,x'(\tau'_r)(t_r - t_{r-1})\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{M(T_1 - T_0)} \, . \, M(T_1 - T_0) = \varepsilon .$$

Análogamente para la otra integral [88-6].

2º) Resulta de [88-7] y § 51-3, *b*.

EJEMPLO 1. Calculemos $\int_C y\,dx$ a lo largo de la elipse de semiejes a y b situados en los ejes coordenados, recorrida en sentido positivo.

Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$x = a \cos t \quad , \quad y = b \operatorname{sen} t$$

desde $t = 0$ que da el vértice de la derecha, hasta $t = 2\pi$ que vuelve a dar el mismo, después de recorrida en sentido positivo; la integral se transforma así:

$$\int_C y\,dx = \int_0^{2\pi} b \operatorname{sen} t(-a \operatorname{sen} t)\,dt = -ab \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt \quad ,$$

y como la función primitiva de $\operatorname{sen}^2 t$ es $\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$, limitada entre 0 y 2π resulta $-\pi ab$ como valor de la integral.

NOTAS: 1. Las integrales de funciones irracionales cuadráticas calculadas en el § 51-4, *c*, son integrales curvilíneas a lo largo de circunferencias, y el cambio de variables que se hizo para efectuar las integraciones no es sino la expresión paramétrica de la respectiva circunferencia.

Sea, por ejemplo:

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, . \, dx = \int y \, . \, dx$$

poniendo

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{o sea:} \quad x^2 + y^2 = 1$$

el cambio de variables:

$$x = \cos t \quad , \quad y = \operatorname{sen} t$$

es justamente la expresión paramétrica de la circunferencia.

Lo mismo acontece en § 52-2, d_2, por ejemplo,

$$\int x\sqrt{1 - x^2 - 2x} \, . \, dx$$

que es una integral curvilínea sobre la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2x = 1$.

2. La demostración anterior subsiste en virtud de § 48-3, *d*, si sólo exigimos a $x'(t)$, $y'(t)$ que sean continuas salvo en un número finito de puntos, y la acotación [88-2]; en particular, para una curva elemental.

3. Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ son origen y extremo del camino C de integración, suelen usarse para la integral curvilínea las notaciones

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx \quad ; \quad \int_A^B P(x, y)\,dx \quad ; \quad \int_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} P(x, y)\,dx \quad ; \quad \text{etc.};$$

pero debe tenerse en cuenta que la integral curvilínea depende no sólo de los puntos A y B, sino del camino que los une.

EJEMPLO 2. Calcular

$$\int_{AB} x^2 y\,dx, \quad A(0,0), \quad B(1,1):$$

1º) Sobre el arco C_1 de parábola $y = x^2$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

2º) Sobre el segmento C_2 de recta $y = x$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

En ambos casos puede tomarse como parámetro t la abscisa x y resulta

$$\int_{C_1} x^2 y dx = \int_0^1 x^2 x^2 dx = \frac{1}{5} \quad ; \quad \int_{C_2} x^2 y dx = \int_0^1 x^2 x dx = \frac{1}{4}.$$

b) Con las mismas hipótesis sobre $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ se prueba la existencia de las integrales curvilíneas [88-6] como límites de las sumas [88-5], *con sólo suponer que el arco* C, *dado por* [88-1] *con* $x(t)$, $y(t)$ *continuas, es rectificable* (§ 55-1).

En efecto, en tal caso son $x(t)$, $y(t)$ de variación acotada (§ 55-9, *a* y *b*); será entonces $x(t)$ diferencia de dos funciones continuas crecientes en sentido estricto (§ 55-9, *d*):

$$x(t) = u(t) - v(t) \quad ,$$

y entonces la primera suma [88-5] se descompone en

$$[88\text{-}8] \qquad \Sigma P^*(\tau_r)(u_r - u_{r-1}) - \Sigma P^*(\tau_r)(v_r - v_{r-1}).$$

Por ser $u(t)$ y $v(t)$ crecientes en sentido estricto, existen y son continuas sus funciones inversas $t = f(u)$, $t = g(v)$. Entonces $P^*[f(u)]$, $P^*[g(v)]$ son funciones continuas de u y de v respectivamente, y en virtud de § 48-3 existe el límite de [88-8] dado por

$$[88\text{-}9] \qquad \int_C P(x,y)\,dx = \int_{u_0}^{u_1} P^*[f(u)]du - \int_{v_0}^{v_1} P^*[g(v)]dv \quad ,$$

siendo $u_i = u(T_i)$, $v_i = v(T_i)$, $(i = 0; 1)$.

Análogamente para la otra integral [88-6]. Ambas resultan ser integrales de RIEMANN-STIELTJES (§ 78-1).

NOTAS: 4. Para la existencia de $\int_C P(x, y)\,dx$, con las mismas hipótesis sobre $P(x, y)$ y $x(t)$, sólo se necesita la continuidad de $y(t)$; y análogamente para

$$\int_C Q(x, y)\,dy.$$

5. Puesto que las integrales curvilíneas pueden reducirse a integrales definidas, les son aplicables todas las extensiones del concepto de integral definida en una variable. Así, se podrá generalizar el concepto de integral curvilínea para el caso en que la curva C esté representada en la forma

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad T_0 \leqslant t < +\infty \quad ,$$

siendo rectificable, para cada $T > T_0$, el arco correspondiente a $T_0 \leqslant t \leqslant T$; o bien para el caso en que la función $P[x(t), y(t)]$ deje de ser continua en un número finito de puntos, pudiendo tener puntos de infinito.

2. Interpretación geométrica. — Nos limitaremos, en la integral $\int_C P(x, y)\,dx$, al caso en que C sea un arco uniforme dado por

$$y = \varphi(x) \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

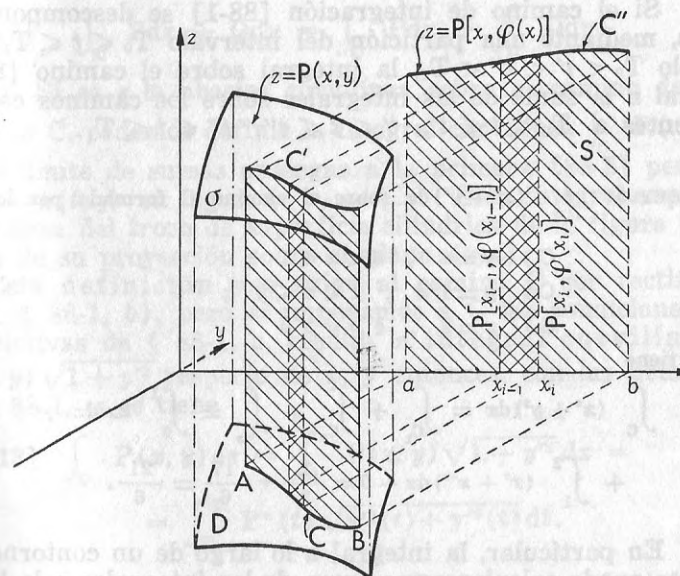


Fig. 301

Entonces puede tomarse x como parámetro, y así resulta

$$[88\text{-}10] \qquad \int_C P(x, y)\,dx = \lim_{\delta \to 0} S_n = \int_a^b P[x, \varphi(x)]\,dx \quad ,$$

siendo

$$[88\text{-}11] \qquad S_n = \sum_{r=1}^{n} P[\xi_r, \varphi(\xi_r)]\,(x_r - x_{r-1}) \quad , \quad (x_{r-1} \leqslant \xi_r \leqslant x_r).$$

La función continua $z = P(x, y)$ se representa por una superficie σ, y a los puntos (x, y) de la curva C corresponden mediante $z = P(x, y)$ puntos de σ que forman una curva C′ (intersección de σ con el cilindro vertical de directriz C, fig. 301).

Consideremos también la proyección C″ de C′ sobre el plano (x, z), paralelamente al eje y. Los términos de la suma [88-11] son las áreas de rectángulos en el plano (x, z), de bases $x_r - x_{r-1}$ y alturas iguales a ordenadas z intermedias sobre C″. Por tanto es inmediato que [88-10] da el área S del trapezoide en el plano (x, z), limitado por el arco C″, el eje x, y las rectas $x = a$, $y = 0$, y $x = b$, $y = 0$. Esto resulta también del último miembro de [88-10] observando que C″ tiene en el plano (x, z) la ecuación $z = P[x, \varphi(x)]$.

3. **Cálculo de integrales curvilíneas.** — El cálculo de las integrales curvilíneas se hace por reducción a integrales definidas (§ 88-1), pero como en muchos casos el camino de integración tiene trozos con distintas expresiones analíticas, conviene destacar que *la propiedad aditiva de intervalo de la integral definida* (§ 48-5, *a*), *y la definición* [48-25] *tienen propiedades análogas en la integral curvilínea.*

a) Si el camino de integración [88-1] se descompone en varios, mediante una partición del intervalo $T_0 \leqslant t \leqslant T_1$, por ejemplo $T_0 < t' < t'' < T_1$, la integral sobre el camino [88-1] es igual a la suma de las integrales sobre los caminos correspondientes a $T_0 \leqslant t \leqslant t'$, $t' \leqslant t \leqslant t''$, $t'' \leqslant t \leqslant T_1$.

EJEMPLO: $\int_C (x^2 + y^2)\,dx$ sobre el camino C formado por los arcos:

$$C_1)\quad y = x \;,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \;;$$
$$C_2)\quad y = 1/x \;,\quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \;;$$
$$C_3)\quad x = 2 \;,\quad \tfrac{1}{2} \geqslant y \geqslant 0 \;.$$

Se tiene

$$\int_C (x^2 + y^2)\,dx = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 (x^2 + x^{-2})\,dx + 0 = \frac{2}{3} + \frac{17}{6} = \frac{21}{6}.$$

b) En particular, la integral a lo largo de un contorno cerrado se puede calcular como suma de las integrales a lo largo de diversos arcos abiertos en que éste se descomponga, o bien por una sola integral de T_0 a T_1, si T_0 y T_1 son los valores del parámetro que determinan el punto inicial y el final de la curva, siendo ambos coincidentes (§ 88-1, ej. 1).

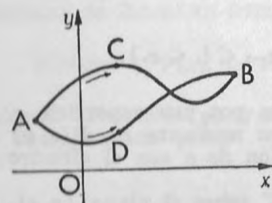


Fig. 302

c) Si se cambia el sentido de la integración sobre un camino abierto o cerrado, hay que permutar los extremos T_0, T_1, luego la integral cambia de signo.

d) Si la integral a lo largo de un camino cerrado es nula y A, B son dos puntos del mismo, las dos integrales a lo largo de los dos caminos AB son iguales; pues siendo (fig. 302):

$$\int_{ACB} + \int_{BDA} = 0 \quad \text{es:} \quad \int_{ACB} = \int_{ADB}.$$

Recíprocamente, esta igualdad para dos caminos entre dos puntos equivale a la anulación de la integral en el circuito que forman.

4. **Generalizaciones.** — *a*) Por lo general las integrales [88-6] no se presentan por separado, sino formando sumas de dos, una de cada tipo. Por ello convendrá llamar *integral curvilínea completa* a la suma de ambas [88-6], indicada por

$$[88\text{-}12]\qquad \int_C P dx + Q dy = \int_C P dx + \int_C Q dy.$$

b) Si es *s* la abscisa curvilínea sobre el camino de integración C, podemos definir la integral curvilínea $\int_C P(x, y)\,ds$ como límite de sumas análogas a la primera [88-5] pero con $s(t_r) - s(t_{r-1})$ en lugar de $x_r - x_{r-1}$. Esta integral representa el área del trozo de superficie cilíndrica de la figura 301, y no la de su proyección sobre el plano (x, z).

Esta definición sólo exige al camino C ser rectificable (cfr. § 88-1, *b*), pero si imponemos a C las condiciones más restrictivas de § 88-1, *a*, resulta la integral curvilínea de $P(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$ respecto de x, y entonces, con las notaciones de § 88-1, *a*, se tiene

$$[88\text{-}13]\qquad \int_C P(x, y)\,ds = \int_C P(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{T_0}^{T_1} P^*(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

c) Análogamente a lo visto en § 88-1, se puede definir la integral curvilínea $\int_C P(x, y, z)\,dx$, sobre una curva, en general alabeada:

$$[88\text{-}14]\qquad x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),\quad (T_0 \leqslant t \leqslant T_1).$$

d) Lo mismo que en *a*, se define en tres variables el primer miembro de la expresión siguiente, integral curvilínea completa, mediante el segundo miembro como suma de tres integrales curvilíneas:

$$[88\text{-}15]\qquad \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_C P dx + \int_C Q dy + \int_C R dz.$$

5. **Áreas y momentos por integrales curvilíneas.** — *a*) En § 54-1, *d*, vimos que si un recinto R está limitado por una curva simple cerrada C, al *contorno orientado* C, es decir con un sentido de recorrido sobre él, corresponde el área orientada A,

positiva o negativa según sea el sentido de **C** (fig. 303). Para el área *orientada* **A** hemos hallado las siguientes expresiones que ahora podemos interpretar como integrales curvilíneas:

$$[88\text{-}16]\quad \mathbf{A} = -\int_{\mathbf{C}} y dx = \int_{\mathbf{C}} x dy = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}} x dy - y dx.$$

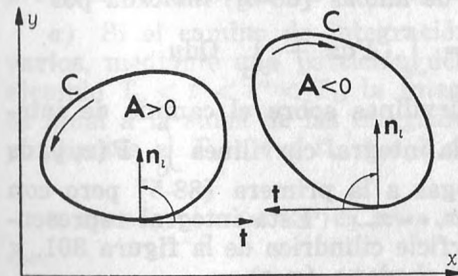


Fig. 303

La definición

DEF. α. *El sentido de* **C** *es positivo cuando al recorrer* **C**, *queda a la izquierda el interior del recinto, y negativo en caso contrario* (fig. 303), es sólo intuitiva y no satisfactoria desde el punto de vista matemático, pues no hemos definido la expresión "a la izquierda". Por eso la reemplazaremos por la siguiente, *equivalente a la anterior sólo con la orientación elegida para los ejes de coordenadas en el plano* (la que lleva el eje x sobre el eje y mediante un giro de $\frac{1}{2}\pi$ contrario al de las agujas del reloj; cfr. § 28-1).

DEF. β. *El sentido de* **C** *es positivo cuando el ángulo orientado desde la tangente* **t** *en el sentido de recorrido hasta la normal interior* $\mathbf{n}_i$ *es igual al que lleva el eje x a coincidir con el eje y*:

$$[88\text{-}17]\quad \text{ángulo } (\mathbf{t}, \mathbf{n}_i) = \text{ángulo } (x, y),$$

y negativo en caso contrario (fig. 303).

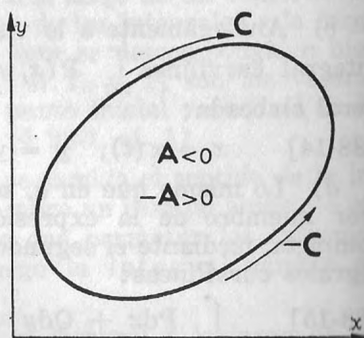


Fig. 304

Al mismo contorno **C** recorrido en sentido contrario al de **C** lo indicaremos —**C**. En la figura 304 el sentido de **C** es negativo y entonces **A** < 0, el de —**C** es entonces positivo y es —**A** > 0. Si cambiáramos el sentido de *uno* de los ejes x, y, o bien los permutáramos entre sí, resultaría **A** > 0, —**A** < 0.

b) Para las integrales curvilíneas tendremos (§ 88-3, *c*)

$$[88\text{-}18]\quad \int_{-\mathbf{C}} = -\int_{\mathbf{C}}$$

En adelante, cuando una integral curvilínea se tome sobre un contorno C lo supondremos orientado sin indicarlo en negrita, y mientras no se diga lo contrario, en sentido positivo.

c) Para integrales dobles son útiles las siguientes convenciones:

$$[88\text{-}19]\quad \iint_{-\mathrm{A}} f(x, y)\, dxdy = -\iint_{\mathrm{A}} f(x, y)\, dxdy, \quad (\mathrm{A} > 0),$$

y cuando no se indique la orientación del área, se conviene en determinarla por el orden de las diferenciales en el elemento de área (figura 305):

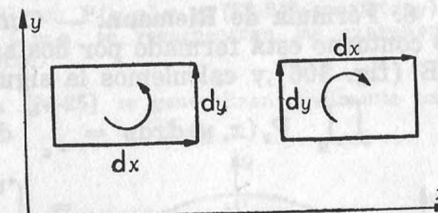


Fig. 305

$$[88\text{-}20]\quad \iint_{\mathrm{A}} f(x, y)\, dydx = -\iint_{\mathrm{A}} f(x, y)\, dxdy.$$

NOTAS: 1. Con el convenio [88-19] se tiene (§ 83-4):

$$[88\text{-}21]\quad \iint_{\mathrm{A}} f(x, y)\, dxdy = \iint_{\mathrm{A'}} f[x(u, v), y(u, v)]\, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, dudv\ ,$$

pues el jacobiano de la transformación es positivo si se conserva el signo del área orientada, y negativo en caso contrario. En particular [88-20] corresponde a $\partial(x, y)/\partial(y, x) = -1$.

2. La convención establecida para el signo del elemento de área (fig. 305) es independiente de la orientación del sistema de coordenadas, y puede resumirse en las expresiones simbólicas

$$[88\text{-}22]\quad [dxdy] = -[dydx] = dx\,.\,dy.$$

d) Análogamente, los momentos de primero y segundo orden del área S respecto de los ejes (§ 84-5 y 7), vienen dados, como ahora veremos, por las integrales curvilíneas:

$$\int_{\mathrm{C}} y^2 dx = \int_a^b [y_1^2 - y_2^2]\, dx = -2\mathrm{M}_x$$

$$\int_{\mathrm{C}} x^2 dy = \int_c^d [x_2^2 - x_1^2]\, dy = 2\mathrm{M}_y$$

$$\int_{\mathrm{C}} y^3 dx = \int_a^b [y_1^3 - y_2^3]\, dx = -3\mathrm{I}_x$$

$$\int_{\mathrm{C}} x^3 dy = \int_c^d [x_2^3 - x_1^3]\, dy = 3\mathrm{I}_y.$$

He aquí la demostración general, sin recurrir a las integrales dobles, como suele hacerse. Para un trapezoide $a\mathrm{AB}b$ sobre $[a, b]$ el momento respecto del eje y es (§ 79-1, *b*):

$$\int_A^B y\,.\,x^n\,.\,dx = \left[\frac{y\,.\,x^{n+1}}{n+1}\right]_A^B - \frac{1}{n+1}\int_A^B x^{n+1}\,.\,dy.$$

Al restar las dos expresiones para los dos trapezoides cuya diferencia es el recinto, se reduce el término integrado, común a ambas y queda la integral curvilínea sobre C positivo de $x^{n+1}\,.\,dy$ dividida por $n+1$. Para los momentos respecto del eje x, las integrales curvilíneas resultan sobre —C. En ambos casos los índice 2(1) indican la coordenada mayor (menor) entre ambos puntos que tienen igual la otra coordenada.

6. **Fórmula de Riemann.** — Consideremos un recinto R cuyo contorno está formado por dos arcos uniformes rectificables AB (fig. 306), y calculemos la siguiente integral doble:

$$\iint_R P_y(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} P_y(x,y)\,dy = $$

$$= \int_a^b [P(x,y_2) - P(x,y_1)]\,dx.$$

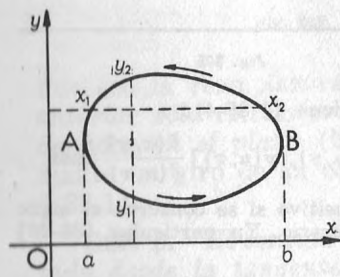


Fig. 306

Ahora bien: la suma de estas dos integrales es (§ 88-1) la integral curvilínea de la función $P(x,y)$ tomada en el arco superior AB y después en el arco inferior BA.

Por tanto, si adoptamos como sentido positivo en el contorno el que deja el recinto a la izquierda, resulta

$$[88\text{-}23] \qquad \iint_R P_y(x,y)\,.\,dxdy = -\int_C P(x,y)\,.\,dx \quad ,$$

fórmula que transforma una integral doble en una integral curvilínea.

Análogamente; calculemos esta integral doble:

$$\iint_R Q_x(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy\int_{x_1}^{x_2} Q_x(x,y)\,dx = $$

$$= \int_c^d dy[Q(x_2,y) - Q(x_1,y)] = $$

$$= \int_c^d Q(x_2,y)\,dy - \int_c^d Q(x_1,y)\,dy$$

y como estas dos integrales componen la integral curvilínea de la función $Q(x,y)$ a lo largo del contorno cerrado en sentido positivo, resulta:

$$[88\text{-}24] \qquad \iint_R Q_x(x,y)\,dxdy = \int_C Q(x,y)\,dy.$$

Reuniendo en una ambas igualdades [88-23] y [88-24] obtenemos la fórmula

$$[88\text{-}25] \qquad \iint_R (Q_x - P_y)\,dxdy = \int_C Pdx + Qdy \quad ,$$

llamada de RIEMANN, que transforma una integral curvilínea en una integral doble y viceversa, válida para el contorno C rectificable, siendo P, Q, P_y, Q_x continuas en el recinto cerrado R.

NOTAS: 1. Aplicando [88-23] con $P(x,y) = y$, [88-24] con $Q(x,y) = x$, y [88-25] con $P = -y$, $Q = x$, se reencuentran las expresiones [88-16] para el área de un recinto.

2. Las relaciones [88-23] a [88-25] se generalizan fácilmente para el caso de recintos cuyo contorno, supuesto rectificable, no esté formado por dos arcos uniformes. Basta con que R pueda descomponerse en un número finito de recintos, cada uno de los cuales tiene con cada recta paralela a un eje, a lo más *un* segmento común. Por ejemplo, para el recinto R: $1 < x^2 + y^2 < 2$ el contorno consta de dos circunferencias concéntricas, y el sentido positivo en él (que deja el recinto a la izquierda, cfr. § 88-5, a) es el indicado por las flechas llenas en la figura 307. Los ejes de coordenadas descomponen R en cuatro recintos a los que puede aplicarse la demostración dada para cualquiera de las [88-23] a [88-25], y sumando las cuatro igualdades se obtiene una para el recinto total R y su contorno, pues las integrales curvilíneas correspondientes a las flechas punteadas se anulan dos a dos por estar tomadas en sentidos contrarios.

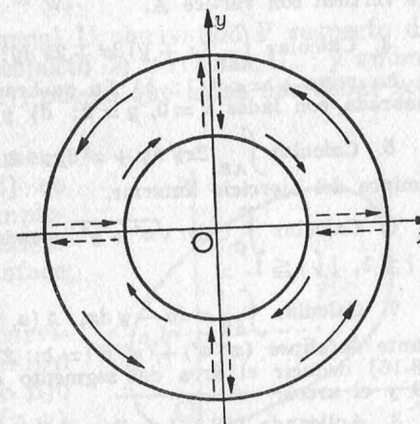


Fig. 307

3. Con el mismo recurso utilizado para deducir [88-23] y [88-24], a saber, la integración doble de una derivada parcial, se deducen de $uv_x + vu_x = (uv)_x$ y $uv_y + vu_y = (uv)_y$ las siguientes *fórmulas de integración por partes para integrales dobles*:

$$\iint_R uv_x dxdy = +\int_C uvdy - \iint_R vu_x dxdy \quad ;$$

$$\iint_R uv_y dxdy = -\int_C uvdx - \iint_R vu_y dxdy \quad .$$

4. La fórmula de RIEMANN, que muchos autores llaman de GREEN y otros impropiamente de GAUSS, fué extendida en diversos sentidos por

GREEN (nota II) y STOKES (§ 92-3, nota 1). Una expresión análoga en el espacio fué considerada por GAUSS (§ 92-1, nota 2); ver § 92-3, notas 2 y 3.

EJERCICIOS

1. Calcular $\int_{AB} x(x+2y)\,dx$; A(0; 0), B(2; 1) a lo largo de los caminos: *a*) $y=\frac{1}{2}x$; *b*) $y=x^2/4$.

2. Calcular $\int_{AB} x^2 \operatorname{cotg}^2 y\,dy$; A(0; 0), B(2; $\frac{1}{2}\pi$) sobre el camino $y=\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}x$.

3. Calcular la integral curvilínea $\int_{AB}(y-x)\,dx+y\,dy$; A(0; 0), B(1;2): *a*) Sobre el camino rectilíneo AB; *b*) Sobre una parábola de eje vertical con vértice A.

4. Calcular $\int_{AB}(x+y)\,dx+2x\,dy$; A(0; 1), B(1; 2) a lo largo de: *a*) La recta $y=x+1$; *b*) La quebrada con lados $y=1$, $x=1$; *c*) La quebrada con lados $x=0$, $y=2$; *d*) $y=x^2+1$.

5. Calcular $\int_{AB} 2xy\,dy+x^2\,dy$; A(0; 1), B(1; 2) sobre los mismos caminos del ejercicio anterior.

6. Calcular $\int_{C} ds/\sqrt{x^2+y^2}$ siendo C el contorno del cuadrado $|x|\leqq 1$, $|y|\leqq 1$.

7. Calcular $\int_{AB} x\,dy-y\,dx$, A(a, 0), B(0, b): 1º) Sobre el cuadrante de elipse $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$; 2º) Sobre la cuerda AB; 3º) De [88-16] deducir el área del segmento de elipse limitado por la cuerda AB y el arco.

8. Aplicando [88-16] hallar el área encerrada por la hoja de estrofoide $x=a\cos 2t$, $y=a\operatorname{tg} t\cos 2t$.

9. Área de la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ por una integral curvilínea.

10. 1º) Calcular $\int_{C} xy\,dx$ a lo largo de la circunferencia de centro (—1; 0) y radio $\sqrt{2}$, en sentido positivo. ¿Qué significado tiene? 2º) Lo mismo para $\int_{C} x^2 y\,dx$.

11. El momento de inercia polar (§ 84-7) de una curva C respecto de un punto P está dado por $\int_{C} r^2\,ds$ siendo $r=\mathrm{PM}$ la distancia de P a un punto genérico M de la curva. Calcular el momento polar de la astroide (§ 23-9) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ respecto del origen, y el radio de giro (§ 84-7) teniendo en cuenta § 55, ejercicio 2.

12. Calcular $\int_{C} y^2\,dx$ sobre una onda de cicloide (§ 34-6, ej. 2) y dar su significado físico.

13. Desarróllese la teoría de las integrales curvilíneas para curvas rectificables no derivables, mediante integrales de STIELTJES.

§ 89. INTEGRACIÓN DE DIFERENCIALES EXACTAS

1. Existencia de la función potencial. — Pasemos ahora al segundo problema señalado al comienzo del § 88-1. A diferencia de lo que ocurre en una variable donde toda función continua tiene primitivas (§ 50-1, *b*), dadas ahora las funciones P(x, y), Q(x, y) continuas e incluso derivables, no siempre existe una función potencial U = U(x, y) tal que

[89-1] $$\mathrm{U}_x=\mathrm{P}\ ,\quad \mathrm{U}_y=\mathrm{Q}.$$

TEOR. *La condición necesaria y suficiente para que en un recinto simplemente conexo las funciones* P *y* Q, *con derivadas* P_y, Q_x *continuas, admitan un potencial, es que sean idénticas esas derivadas cruzadas:*

[89-2] $$\mathrm{P}_y=\mathrm{Q}_x.$$

DEM. 1º Si existe el potencial U, derivando P respecto de x resulta U_{yx}; y ambos y resulta U_{xy}, y derivando Q respecto de x resulta U_{yx}; y ambos resultados son iguales (§ 69-2), puesto que estas derivadas son continuas.

2º Supongamos, recíprocamente, que la condición [89-2] se cumple en un cierto recinto simplemente conexo y veamos que existe una función U(x, y) que satisface al sistema [89-1].

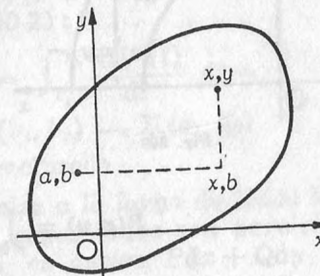


Fig. 308

Formemos la integral curvilínea [88-12] de la expresión P . dx + Q . dy desde un punto fijo (a, b) a un punto variable (x, y) siguiendo el camino más simple, formado por sendas paralelas a los ejes (fig. 308),

[89-3] $$\mathrm{V}(x,y)=\int_a^x \mathrm{P}(x,b)\,dx+\int_b^y \mathrm{Q}(x,y)\,dy\quad ;$$

ésta es una función de x é y puesto que a cada par (x, y) corresponde un solo valor de la integral, *ya que hemos fijado el camino.*

La derivada respecto de y es inmediata, puesto que la primera integral no depende de y, y la segunda tiene por derivada Q(x, y), es decir: $\mathrm{V}_y=\mathrm{Q}(x,y)$.

Recordando la regla para derivar bajo el signo integral (§ 86-2. *b*)

$$\mathrm{V}_x=\mathrm{P}(x,b)+\int_b^y \mathrm{Q}_x(x,y)\,dy=\mathrm{P}(x,b)+\int_b^y \mathrm{P}_y(x,y)\,dy=$$
$$=\mathrm{P}(x,b)+[\mathrm{P}(x,y)-\mathrm{P}(x,b)]=\mathrm{P}(x,y).$$

Resulta, pues, que la función $V(x, y)$ definida por la integral [89-3], suma de dos integrales simples, es una *función potencial* de P y Q. Cualquier otra función potencial tendrá la misma derivada respecto de x é y; por tanto difiere de $V(x, y)$ en una constante (§ 66-2). Es decir: la función potencial más general del par P, Q es: $U = V(x, y) + C$.

Si no se pueden unir los dos puntos (a, b) y (x, y) por una quebrada de dos lados contenida en el recinto, se toma de varios lados y la conclusión subsiste, al ser el valor de la integral curvilínea obtenida el mismo para todas esas quebradas, pues de una se pasa a otra (fig. 309) sustituyendo respectivamente dos lados consecutivos de un rectángulo por los otros dos; luego define una función uniforme $V(x, y)$. (Véase § 89-2, nota 2).

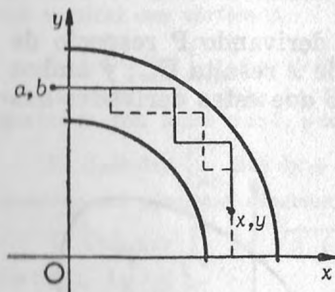


Fig. 309

NOTAS: 1. A este mismo resultado se llega integrando el sistema de ecuaciones diferenciales

$$U_x = P \quad , \quad U_y = Q \quad ,$$

pues de la segunda ecuación resulta:

$$U = \int_b^y Q(x, y)\,dy + \alpha(x)$$

siendo $\alpha(x)$ una función arbitraria de x que no contiene la y; derivando respecto de x y sustituyendo $U_x = P$, resulta la nueva condición:

$$P(x, y) = \int_b^y Q_x(x, y)\,dy + \alpha'(x)$$

y sustituyendo $Q_x = P_y$, resulta:

$$P(x, y) = \int_b^y P_y(x, y)\,dy + \alpha'(x) = P(x, y) - P(x, b) + \alpha'(x)$$

de donde:

$$\alpha'(x) = P(x, b) \quad \therefore \quad \alpha(x) = \int_a^x P(x, b)\,dx + C$$

y obtenemos el mismo resultado. Este método suele convenir en la práctica.

2. Con demostración más penosa, el teorema subsiste aún sin la continuidad de las derivadas P_y, Q_x, suponiendo sólo la *diferenciabilidad* (§ 66-4) de P y de Q.

EJEMPLO. Las funciones $P(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ verifican [89-2] en todo punto distinto del origen. La función potencial resulta $U(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$, que no es uniforme si el recinto contiene el origen.

2. Integrales curvilíneas de diferenciales exactas. — Que el par de funciones $P(x, y)$, $Q(x, y)$ admite función potencial equivale a que la expresión diferencial $P dx + Q dy$ coincide con la diferencial dU de una función $U = U(x, y)$, y se la llama *diferencial exacta*. En tal caso la integral curvilínea

$$\int_{AB} P dx + Q dy \quad ; \quad A(a_1, a_2) \quad , \quad B(b_1, b_2) \; ,$$

se transforma así:

$$[89\text{-}4] \qquad \int_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} U_x dx + U_y dy =$$

$$= \int_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} dU(x, y) = U(b_1, b_2) - U(a_1, a_2),$$

fórmula que generaliza la de BARROW y puede enunciarse:

TEOR. 1. *Si existe función potencial uniforme, el valor de la integral curvilínea entre dos puntos no depende del camino seguido en la integración y es el incremento de potencial entre ambos puntos extremos. La integral es nula sobre toda curva cerrada.*

En efecto, con las notaciones de § 88-1 y llamando $U^*(t)$ a la función compuesta $U[x(t), y(t)]$, la integral de [89-4] se transforma así (§§ 88-1, 67-1 y 50-2):

$$\int_{T_0}^{T_1} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_{T_0}^{T_1} \frac{dU^*(t)}{dt}\, dt =$$

$$= U^*(T_1) - U^*(T_0) = U(b_1, b_2) - U(a_1, a_2).$$

También se verifica el teorema recíproco

TEOR. 2. *Si son nulas las integrales a lo largo de todos los contornos contenidos en un recinto, cuyos lados son paralelos a los ejes, existe función potencial, es decir:* $P dx + Q dy$ *es una diferencial exacta.*

Definamos la función siguiente:

$$[89\text{-}5] \qquad V(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

extendiendo la integral hasta el punto variable (x, y) siguiendo una quebrada cualquiera de lados paralelos a los ejes, contenida en el recinto (fig. 309). En virtud de la hipótesis, el valor de la integral es el mismo para todas esas quebradas; luego define una función uniforme $V(x, y)$.

Para derivar respecto de x hay que conservar fijo y, es decir, prolongar la quebrada desde (x, y) paralelamente al eje x, luego resulta nula la segunda integral y la primera es la primitiva de P, luego $V_x = P$; análogamente, para derivar respecto de y se prolonga la quebrada paralelamente al eje y, resultando $V_y = Q$. La función uniforme $V(x, y)$ es, pues, una función potencial.

EJEMPLO 1. Calculemos la integral curvilínea

$$\int_{AB} (3x^2+y)\,dx+(x-4y)\,dy \quad ; \quad A(0,0) \quad ; \quad B(1,2).$$

Primer método: Puesto que $P_y = Q_x = 1$, hay función potencial y la podemos calcular así:

$$U(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} = x^3+xy-2y^2 \ ;$$

luego:

$$\int_{AB} = U(1,2) - U(0,0) = -5.$$

Segundo método (§ 89-1, nota 1):

$$U = xy - 2y^2 + \alpha(x)$$
$$\alpha'(x) = 3x^2 + y - y \quad ; \quad \alpha(x) = x^3 + C.$$

NOTAS: 1. Obsérvese que no ha sido preciso exigir la anulación de la integral en toda curva cerrada; basta que sea nula en todos los contornos de lados paralelos a los ejes y contenidos en un cierto recinto, para que exista función potencial y, por consiguiente, la integral será nula en toda curva cerrada contenida en el mismo *.

2. Los teoremas 1 y 2 son válidos aún si el recinto es múltiplemente conexo, pero en este caso el recinto contiene caminos entre los dos puntos que no se reducen uno a otro, como se explicó en § 89-1, y la función obtenida [89-5] puede ser multiforme, aunque se cumpla [89-2].

Los caminos quedan clasificados en grupos, según el número de vueltas en torno de las lagunas o contornos interiores, y el potencial obtenido por los caminos de cada grupo es el mismo, mientras que los correspondientes a diversos grupos difieren en ciertos números llamados *módulos de periodicidad*. Así, por ejemplo, en la teoría de la sustentación del ala de aeroplano, el recinto en cuestión es la parte de plano exterior al perfil del ala, y en este recinto doblemente conexo hay un solo módulo del que depende la fuerza de sustentación.

EJEMPLO 2. El par de funciones considerado en § 89-1, ejemplo, da la función potencial arc tg(y/x), y si el recinto contiene el origen, como éste es singular y debe excluirse, resulta un recinto doblemente conexo; si se parte de un punto (a,b) para llegar al (x,y) por un camino de argumento creciente, resulta un cierto valor de U, mientras que al seguir otro camino de argumento decreciente se llega a ese valor disminuído en 2π.

NOTA 3. Por los teoremas 1 y 2 resulta: *Condición necesaria y suficiente para que se anule sobre toda curva cerrada la integral de* $P dx + Q dy$, *es que ésta sea diferencial exacta.* Si además son P_y y Q_x continuas y el recinto es simplemente conexo, teniendo en cuenta el teorema de § 89-1, resulta una demostración más sencilla aplicando el teorema de RIEMANN [88-25]:

DEM. Que la igualdad $P_y = Q_x$ implica la anulación de la integral [88-25], salta a la vista. Recíprocamente, si esta integral es nula sobre todo contorno de lados paralelos a los ejes, debe ser $P_y = Q_x$ en todo punto, si se suponen *continuas las derivadas.* Pues si en un punto es $Q_x - P_y = a > 0$, en un entorno rectangular es $Q_x - P_y > \frac{1}{2}a$; y por tanto es positiva la integral [88-25] en este rectángulo, contra la hipótesis. A igual contradicción se llega suponiendo $Q_x - P_y$ negativo.

* Como acontece siempre que la condición suficiente es parte de la necesaria, el resto de ésta es consecuencia lógica de aquella parte.

3. Integrales curvilíneas completas de tres variables. — *a) Criterio para la existencia de potencial.* — Dadas ahora tres funciones $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, como en § 89-1, la igualdad de derivadas cruzadas caracteriza en los recintos simplemente conexos la existencia de una *función primitiva* o *función potencial* $U = U(x,y,z)$ tal que

$$[89\text{-}6] \qquad U_x = P \quad , \quad U_y = Q \quad , \quad U_z = R.$$

TEOR. 1. *Las condiciones necesarias y suficientes para que, en un recinto simplemente conexo, exista función potencial uniforme de las funciones diferenciables* P, Q, R, *son:*

$$[89\text{-}7] \qquad P_y = Q_x \quad , \quad P_z = R_x \quad , \quad R_y = Q_z.$$

En particular, P, Q, R, son diferenciables, si tienen derivadas continuas (§ 66-4). Demostremos este caso particular:

1º Desde luego deben verificarse estas igualdades si existe U; pues entonces: $P_y = U_{xy}$, $Q_x = U_{yx}$, y análogamente las otras.

2º Recíprocamente: si se verifican las condiciones anteriores [89-7] formemos la función siguiente:

$$V(x,y,z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

eligiendo como camino de integración la quebrada de lados paralelos a los ejes, tenemos a $V(x,y,z)$ expresada por tres integrales ordinarias:

$$[89\text{-}8] \quad V(x,y,z) = \int_a^x P(x,b,c)\,dx + \int_b^y Q(x,y,c)\,dy + \int_c^z R(x,y,z)\,dz$$

y recordando la regla de derivación bajo el signo integral (§ 86-2, *b*):

$$V_x = P(x,b,c) + \int_b^y Q_x(x,y,c)\,dy + \int_a^x R_x(x,y,z)\,dz =$$
$$= P(x,b,c) + \int_b^y P_y(x,y,c)\,dy + \int_c^z P_z(x,y,z)\,dz =$$
$$= P(x,b,c) + P(x,y,c) - P(x,b,c) + P(x,y,z) - P(x,y,c) =$$
$$= P(x,y,z).$$
$$V_y = Q(x,y,c) + \int_c^z R_y(x,y,z)\,dz = Q(x,y,c) + \int_c^z Q_z(x,y,z)\,dz =$$
$$= Q(x,y,c) + Q(x,y,z) - Q(x,y,c) = Q(x,y,z).$$
$$V_z = R(x,y,z).$$

Esta última resulta inmediatamente, pues sólo la tercera integral depende de z.

Hemos obtenido, pues, una función potencial $V(x,y,z)$ y cualquier otra difiere de ella en una constante (§ 66-2):

$$U = V(x,y,z) + C.$$

NOTA. Si el recinto no es un paralelepípedo, se elige una poligonal de lados paralelos a los ejes, como ya se hizo en casos anteriores; y si el recinto es simplemente conexo, resulta uniforme la función $V(x,y,z)$.

b) Integrales de diferenciales exactas. — Con frecuencia se presentan en Física y en Mecánica (ver § 91-4) integrales de esta forma:

$$\int_{(a_1, a_2, a_3)}^{(b_1, b_2, b_3)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

Si existe función potencial U, se prueba, como en § 89-2, teor. 1, que la integral curvilínea se reduce a:

$$[89\text{-}9] \quad \int_{(a_1, a_2, a_3)}^{(b_1, b_2, b_3)} U_x dx + U_y dy + U_z dz =$$

$$= \int_{(a_1, a_2, a_3)}^{(b_1, b_2, b_3)} dU = U(b_1, b_2, b_3) - U(a_1, a_2, a_3)\,;$$

es decir:

TEOR. 2. *Si existe función potencial uniforme, el valor de la integral curvilínea no depende del camino seguido para pasar del punto* (a_1, a_2, a_3) *al* (b_1, b_2, b_3) *y su valor es la diferencia de potencial en ambos puntos. La integral es nula en toda curva cerrada.*

También se verifica el teorema recíproco:

TEOR. 3. *Si son nulas las integrales a lo largo de todos los contornos contenidos en un recinto, cuyos lados son paralelos a los ejes, existe función potencial; es decir,* $P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz$ *es una diferencial exacta.*

Definamos la función siguiente

$$V(x, y, z) = \int_{(a, b, c)}^{(x, y, z)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

siguiendo como camino una quebrada cualquiera de lados paralelos a los ejes, contenida en el recinto; repitiendo el razonamiento hecho para dos variables (§ 89-2), resulta

$$V_x = P \quad , \quad V_y = Q \quad , \quad V_z = R$$

es decir, la función V es potencial de P, Q, R.

EJERCICIOS

1. Verificar que la expresión $ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy$ es diferencial exacta, y hallar la función potencial.

2. Lo mismo para:

   a) $(2x + 3y)\,dx + (3x + 2y)\,dy$;

   b) $(dx + dy)/(x + y)$.

3. Hallar la función potencial de la diferencial exacta

$$[(2x^3 + 2xy^2 + y)\,dx - (2x^2y + 2y^3 + x)\,dy]/(x^2 + y^2).$$

4. Si se cumple $P_y = Q_x$ con P y Q diferenciables y homogéneas de grado $m \neq -1$, la función potencial de la diferencial exacta $P\,dx + Q\,dy$ es: $U(x, y) = (xP + yQ)/(m + 1)$.

5. *a)* Calcular $\int_{OA} xy^4\,dx + x^2y^3\,dy$ siendo $O(0; 0)$, $A(1; 1)$, a lo largo de los siguientes caminos: quebradas de dos lados, paralelos a los ejes: 1º) Con primer lado sobre el eje x; 2º) Con primer lado sobre el eje y; 3º) Recta OA; 4º) $y^3 = x$; 5º) ¿Existe función potencial? *b)* Lo mismo para $\int_{AB} x^3y^2\,dx + x^2y^3\,dy$.

6. *a)* Calcular $I = \int_{OA} (x^3 + xy^2)\,dx + (x^2y + y^3)\,dy$ a lo largo de los caminos indicados en el ejercicio anterior; probar que hay función potencial y hallarla; *b)* Lo mismo para $J = \int_{OA} (2/3)\,xy^3\,dx + x^2y^2\,dy$.

7. Calcular $I = \int_{AB} (2y^2 + 1)\,dx + 4xy\,dy$; $A(0; 0)$, $B(3; 1)$, a lo largo del segmento AB, de las dos quebradas de lados paralelos a los ejes, y mediante la función potencial.

8. Lo mismo para $I = \int_{AB} e^{xy}(y\,dx + x\,dy)$; $A(0; 1)$, $B(2; 2)$.

9. Hallar la función potencial de la diferencial exacta
$$yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz.$$

10. *a)* Hallar la función potencial de
$$(y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz;$$
b) Resolver la ecuación diferencial
$$(y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz = 0.$$

11. Calcular $I = \int_{OA} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy - xy\,dz$ siendo $O(0; 0; 0)$ y $A(4; 8; 32/3)$, a lo largo de la recta OA, de una quebrada de lados paralelos a los ejes y de la curva $x = t$, $y = t^2/2$, $z = t^3/6$. Probar que existe función potencial y hallarla.

§ 90. INTEGRALES DE SUPERFICIE

1. **Orientabilidad de superficies.** — Para recintos planos hemos asignado un signo a las áreas de acuerdo con el sentido de recorrido de su contorno. Al considerar superficies (planas o alabeadas) *en el espacio* $\mathbf{E}_3$, las convenciones sobre el sentido de un contorno orientado, como las basadas en las saetas del reloj, o la de § 88-5, *a*, def. α, pierden significación *. Por ejemplo el mismo sentido de recorrido del contorno orientado C del dominio circular $\mathbf{D}$: $y^2 + z^2 \leqslant 1$, $x = 0$, deja el interior a la izquierda o a la derecha, según lo miremos desde un punto a uno u otro *"lado"* del plano $x = 0$. Pero entonces, si bien no podemos asignar unívocamente un signo al área de **D**, podemos asignar a **D** dos *caras*, una positiva y otra negativa, de acuerdo con la definición α del § 88-5 referida al recorrido de **C**.

* También la definición β pierde significación al salir del plano, pues refiere el sentido del contorno C al de un sistema *plano* de coordenadas.

La orientación de una superficie puede fijarse por un procedimiento que no hace referencia al contorno, y es entonces aplicable también a superficies cerradas. En un punto P de la superficie podemos fijar un sentido de rotación mediante un pequeño ciclo orientado C_P en la superficie y rodeando a P. Moviendo con continuidad ese ciclo sobre la superficie podemos asociar a cada punto de la misma un sentido de rotación siempre que no pueda llegarse a ningún punto Q con un ciclo C_Q y con su opuesto $-C_Q$. En tal caso la superficie se llamará *orientable*.

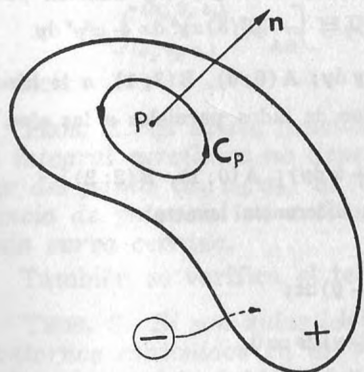


Fig. 310

A cada superficie orientable S corresponden dos superficies *orientadas* que indicaremos con S y −S. En cada punto P de éstas podemos considerar el vector normal **n** orientado de modo tal que desde su extremo se vea recorrer el ciclo C_P dejando su *interior* (trozo de S que contiene a P), por ejemplo, a la izquierda (cfr. § 88-5, def. α). Podemos entonces distinguir en una superficie orientable *dos caras*, la correspondiente al sentido de **n** se llama *cara positiva*, la otra *cara negativa* (indicadas +, —, en fig. 310). De allí el nombre de superficies *bilaterales* dado a las superficies orientables del espacio E_3 (ver nota 2).

Aunque no toda superficie es orientable (ver nota 1), en adelante, al considerar una superficie S, la supondremos orientable, y orientada cuando se la indique en negrita **S**.

NOTAS: 1. El ejemplo más sencillo de superficie *no orientable* o *de una sola cara* es la cinta de MOEBIUS que se obtiene uniendo los extremos de una cinta o banda, después de girar uno de ellos en π, invirtiendo sus caras (fig. 311).

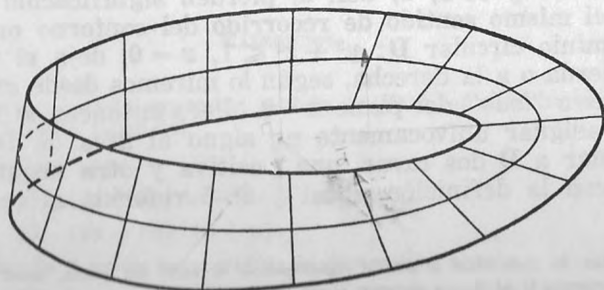


Fig. 311

Si recorremos una línea, por ejemplo, equidistante de los bordes (que forman una sola curva) llegaremos al punto de partida pero con el ciclo y la correspondiente normal invertidos, es decir en "la otra" cara, que es en realidad la misma. Córtese la superficie a lo largo de la curva trazada, tratando de imaginar previamente el resultado. Repítase la operación con *lo* que resulta.

Si a cada punto de la circunferencia

$$x = r\cos u \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\, u \quad , \quad z = 0 \quad , \quad (r > 1) \quad ,$$

aplicamos el vector *fijo* (variable con u):

$$\mathbf{d} = \mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}u\cos u\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}u\,\mathrm{sen}\,u\,\mathbf{j} + \cos\tfrac{1}{2}u\,\mathbf{k} \quad ,$$

coplanar con el eje z y que forma con él el ángulo $\tfrac{1}{2}u$, los vectores **d** y −**d** barren una cinta de MOEBIUS de anchura 2, de representación paramétrica

[90-1] $$x = r\cos u + v\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}u\cos u \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,u + v\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}u\,\mathrm{sen}\,u \quad ,$$
$$z = v\cos\tfrac{1}{2}u \quad ,$$

siendo:

$$0 \leqslant u \leqslant 2\pi \quad , \quad -1 \leqslant v \leqslant 1 \quad , \quad r > 1.$$

2. La *orientabilidad* de una superficie definida por la condición de que al mover sobre ella un ciclo orientado C no es posible volver a la posición inicial con el ciclo contrario −C, es entonces una propiedad intrínseca de la superficie. En cambio, la *bilateralidad* introducida con referencia a la normal **n**, sólo es definible por inmersión de la superficie en un espacio tridimensional; dependerá entonces de la índole de dicha inmersión. Aunque ambos conceptos coinciden en E_3, se demuestra en Topología que existen espacios tridimensionales (no euclídeos) donde hay superficies orientadas, pero de una cara.

3. La orientabilidad de superficies es un problema topológico muy delicado, pues exige dar un sentido preciso a la noción intuitiva de movimiento de un ciclo C_P.

Un subconjunto T de una variedad topológica V_2 de dos dimensiones con tres puntos A, B, C fijados en su frontera se llama *triángulo* si puede ponerse en correspondencia topológica con un triángulo plano, de modo que A, B, C se correspondan con los vértices de éste. *Vértices* y *lados* de T son los puntos A, B, C y los arcos simples que éstos determinan en su frontera.

La variedad V_2 se llama *variedad triangulable* o *superficie topológica* si en ella existe un conjunto finito o infinito numerable T de triangulos T_i tal que:

1) La reunión de los T_i es V_2;

2) La intersección de T_i y T_k $(i \neq k)$ es o bien vacía, o bien un vértice o bien un lado de T_i y de T_k;

3) Todo conjunto compacto en V_2 puede cubrirse por un número finito de estos triángulos T_i.

Dada en una superficie topológica S una triangulación T, llamaremos *cadena de triángulos* a toda sucesión finita

$$T_1, T_2, \ldots, T_n \quad ; \quad (T_i \varepsilon T)$$

tal que T_i y T_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ tengan un lado común. Si esto ocurre también con T_n y T_1 la cadena se llama *ciclo de triángulos*.

Dados dos triángulos con un lado común, una orientación del contorno de uno de ellos *se transmite* a una orientación del contorno del otro por la condición de que el lado común resulte recorrido en sentido contrario. Dada entonces una orientación del contorno de un triángulo T_1 de T, ésta se transmite a todo otro triángulo T_i de T por una cadena de triángulos que vaya de T_1 a T_i. Para que la orientación del contorno

de T_i quede unívocamente determinada es entonces necesario y suficiente que en todo ciclo de triángulos se vuelva al primero con la misma orientación de su contorno. En tal caso diremos que todo ciclo *conserva la orientación*. Finalmente, diremos que una superficie topológica S es orientable si en una triangulación T de S, todo ciclo de triángulos conserva la orientación.

Se han dado ejemplos para mostrar que no toda variedad topológica de dos dimensiones es triangulable. (Ver STOÏLOW, cit. en Cap. XXIX, nota IX-8, pág. 73).

2. **Integral sobre una superficie.** — *a*) Dado un trozo de superficie S, a toda descomposición o partición del mismo en un número finito de trozos $S_1, \ldots, S_n$, de áreas $S_1, \ldots, S_n$, corresponde un número $\delta > 0$, *norma* de la partición, definido como el máximo de los diámetros (§ 82-1) de los S_k.

Si la función $f(x, y, z)$ está definida en todos los puntos de S, llamaremos *integral de* $f(x, y, z)$ *sobre una cara de la superficie orientada* S al siguiente límite según la norma (Cap. XV, nota I, *b*) toda vez que exista:

$$[90\text{-}2] \quad \lim_{\delta \to 0} \Sigma f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) S_k = \iint_S f(x, y, z)\, dS \ ,$$

donde (ξ_k, η_k, ζ_k) es un punto cualquiera de S_k, el segundo miembro es la notación para la *integral de superficie*, y es $S_k > 0$ cuando la integral se considera extendida a la cara *positiva* de la superficie S, siendo en caso contrario, para la cara *negativa* de la superficie orientada S:

$$[90\text{-}3] \quad \iint_{-S} f dS = -\iint_S f dS .$$

Así tenemos que de las dos caras S_1 y S_2 que resultan de la orientabilidad de la superficie, podemos identificar $-S_1 = S_2$, $-S_2 = S_1$, al definir

$$-\iint_{-S_1} = \iint_{S_1} = -\iint_{S_2} = \iint_{-S_2} .$$

Cuando no se advierta lo contrario (cfr. [90-3]) convendremos en tomar S de modo que su cara positiva conserve el recorrido dextrógiro del plano paramétrico de representación (véase *c*).

TEOR. *Si la superficie* S, *de área finita está dada en la forma paramétrica*

$$[90\text{-}4] \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad [(u, v) \varepsilon D],$$

(o vectorial $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$) *por tres funciones* [90-4] *continuas conjuntamente con sus derivadas primeras en un dominio* D, *la integral* [90-2] *existe toda vez que* $f(x, y, z)$ *sea continua en el conjunto formado por los puntos de* S *y de su contorno* Γ.

DEM. Bastará probar que [90-2] se reduce a una integral doble ordinaria. Veremos que siendo

$$[90\text{-}5] \quad J_1 = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad J_2 = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad J_3 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

y $f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] = f^*(u, v)$, se tiene:

[90-6]

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f^*(u, v) \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, du dv =$$

$$= \iint_D f^*(u, v)\, |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|\, du dv =$$

$$= \iint_D f^*(u, v) \sqrt{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2}\, du dv =$$

$$= \iint_D f^*(u, v) \frac{J_3}{\cos \mathbf{n}z}\, du dv .$$

Como por [72-57] y $J_3/\cos \mathbf{n}z = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$ (que resulta de $J_1/\cos \mathbf{n}x = J_2/\cos \mathbf{n}y = J_3/\cos \mathbf{n}z$, § 72-7, *b*) coinciden los cuatro últimos miembros de [90-6], bastará demostrar la igualdad de los dos primeros. Llamando D_k a la parte de D que corresponde a S_k y teniendo presente que (§ 84-4)

$$[90\text{-}7] \quad S_k = \iint_{D_k} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, du dv \ ,$$

se tiene

$$\Sigma f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, S_k = \Sigma \iint_{D_k} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, du dv .$$

Bastará entonces demostrar que tiende a cero con la norma δ la diferencia

$$\Sigma f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, S_k - \iint_D f^*(u, v) \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, du dv =$$

$$= \Sigma \iint_{D_k} \{f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) - f(x, y, z)\} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, du dv \ ,$$

y esto resulta del último miembro con las hipótesis hechas, por la continuidad uniforme de $f(x, y, z)$.

b) Si la superficie está dada en forma explícita

$$[90\text{-}8] \quad z = \varphi(x, y) \quad , \quad (x, y) \varepsilon \mathbf{D} \ ,$$

que equivale a tomar en [90-4] $x = u$, $y = v$, resulta $J_3 \equiv 1$ y por [90-6]:

$$[90\text{-}9] \quad \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f[x, y, \varphi(x, y)] \frac{dx dy}{\cos \mathbf{n}z}$$

o bien, observando que si $z_x = p$, $z_y = q$, de la ecuación del

plano tangente $z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$ resulta
$- p_0/\cos \mathbf{n}x = - q_0/\cos \mathbf{n}y = 1/\cos \mathbf{n}z = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}$

[90-10] $$\iint_S f(x, y, z)\, dS =$$

$$= \iint_D f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy.$$

c) Es importante destacar cómo queda fijado el signo de la integral, que depende de la cara de la superficie S a la cual se extiende.

La orientación del dominio plano D queda en todos los casos determinado por la de S, y recíprocamente. Al recorrido dextrógiro del contorno de D le corresponderá en la representación [90-4] un recorrido del contorno de S y convendremos, cuando no se advierta lo contrario, en tomar S de modo que su recorrido de contorno resulte también dextrógiro respecto de su normal (§ 90-1). Entonces al recorrido dextrógiro del contorno de —S corresponderá el recorrido levógiro de D en la representación [90-4]. En [90-7] el signo del radical $\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ es + ó — según que el recorrido del contorno de **D** (en correspondencia con el dextrógiro de S o de —S según se trate de $\iint_S$ o de $\iint_{-S}$) sea dextrógiro o levógiro. En efecto, con esta determinación de signo del radical resulta para $D > 0$:

[90-11] $$\text{Si } f > 0 \quad , \quad \iint_S f dS > 0 \quad , \quad \iint_{-S} f dS < 0 \quad ,$$

como por otra parte es evidente por la definición.

Con el convenio dicho, si tomamos como **D** la cara $+xy$ (dextrógira respecto de $+z$) para la representación [90-8], se ha de tomar S en la cara superior (**n** hacia $z > 0$) y resulta ser —S la cara inferior. Entonces en [90-9], se ha de tomar $\cos \mathbf{n}z > 0$; si se considera $\cos \mathbf{n}z < 0$, el primer miembro de [90-9] se refiere a —S, cumpliéndose en ambos casos la relación de control [90-11].

NOTA. Si tomáramos como S la cara inferior, para $f > 0$ y el mismo triedro dextrógiro de referencia, siendo $\cos \mathbf{n}z < 0$ se ha de tomar **D** levógira escribiendo $[dy, dx] = -[dx, dy] < 0$, en [90-9] (cfr. § 88-5, nota 2).

d) El concepto de integral sobre una superficie desarrollado en *a*, es el análogo al de integral curvilínea $\int_C f(x, y)\, ds$ (§ 88-4, *b*). El análogo de $\int_C f(x, y)\, dx$ se obtiene conside-

rando una función $R = R(x, y, z)$, continua en el trozo S de la superficie de ecuación $z = \varphi(x, y)$ y su contorno, con la definición

[90-12] $$\iint_S R(x, y, z)\, dx dy = \iint_D R[x, y, \varphi(x, y)]\, dx dy,$$

donde ahora la orientación del dominio plano D está dada por el orden de las diferenciales dx, dy de acuerdo con lo establecido en § 88-5, *c*, de suerte que

[90-13] $$\iint_S R dy dx = -\iint_S R dx dy.$$

Se tiene también, en virtud de [90-9]:

[90-14] $$\iint_S R dx dy = \iint_S R \cos(\mathbf{n}z)\, dS \; ,$$

donde *el primer miembro se refiere a la integral del segundo miembro tomada en la cara* S *que corresponda al sentido de* **n** *incluído en su integrando.* Por ejemplo, si dicho sentido de **n** hace $\cos(\mathbf{n}z) > 0$, la cara S a que se refieren las integrales de los primeros miembros de [90-14] y [90-12] *es aquella cuya normal orientada forma ángulo agudo con el sentido del semieje* $+z$, *fijado por el giro dextrógiro xy menor que* π *del plano de proyección.* En cambio, para el primer miembro de [90-13] se habría de tomar el sentido del eje z fijado por el giro dextrógiro yx menor que π, sentido opuesto al anterior.

Con análogas definiciones para las integrales $\iint_S P dy dz$, $\iint_S Q dz dx$, se tiene para la *integral completa de superficie*, suma de las tres:

[90-15] $$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy =$$

$$= \iint_S [P \cos(\mathbf{n}x) + Q \cos(\mathbf{n}y) + R \cos(\mathbf{n}z)]\, dS.$$

Obsérvese el orden cíclico de las diferenciales en el primer miembro, necesario para que la integral de los tres términos del segundo miembro se refiera a la misma cara S de la superficie sobre la que se integra. Para $\iint_S Q dz dx$, si se toma $\cos(\mathbf{n}y) > 0$, la orientación correspondiente S es la determinada por el sentido de la normal que forma ángulo agudo con $+y$, fijado éste por el giro dextrógiro de zx (y no por el xz). Por ejemplo, si se considera un trozo de S cuya normal orientada esté en el octante $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$, en el segundo miembro de [90-15] los signos de los cosenos serán +, —, +.

3. Integral sobre superficie cerrada. Volumen orientado. — *a*) Análogamente a lo establecido en § 54-1 para el signo del área, la integral doble $\int\int_D \mathrm{f}(x,y)\,dxdy$ define el volumen $\mathbf{V}$ del cilindroide de base $\mathbf{D}$ y cotas $z = \mathrm{f}(x,y)$ con un *signo* determinado por los de $\mathbf{D}$ y z. Si es S la superficie que limita al cilindroide, considerando su cara S_e *exterior* al mismo, ($\mathbf{n}_e$ exterior) y el signo de $\mathbf{D}$ fijado por el orden $dxdy$ (+ dextrógiro), el volumen $\mathbf{V}$ con su signo vendrá dado por la integral de superficie

$$[90\text{-}16] \quad \mathbf{V} = \int\int_S z\,dxdy = \int\int_D \mathrm{f}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\int_S z\cos(\mathbf{n}_e z)\,dS\,,$$

donde S será la cara S_e ó $-S_e$ según sea $z > 0$ ó $z < 0$.

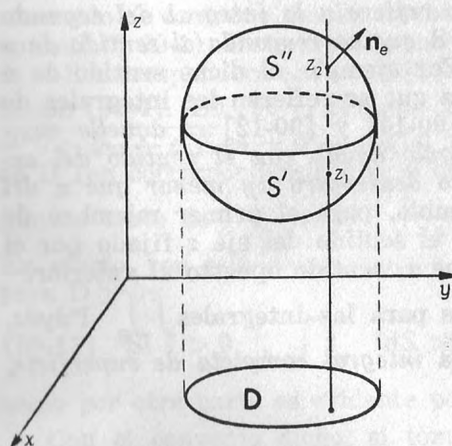


Fig. 312

b) Si el volumen está limitado por dos superficies uniformes S' y S'' (fig. 312), la normal exterior al cilindroide limitado por S' es *interior* al volumen y designando ahora por $\mathbf{n}_e$ la normal *exterior al volumen* y por $S_e = S'_e + + S''_e$ su cara correspondiente, se tendrá si $z_2 > z_1$:

$$[90\text{-}17] \quad \mathbf{V} = \int\int_D z_2\,dxdy - \int\int_D z_1\,dxdy = \int\int_{S''} z_2\,dxdy +$$

$$+ \int\int_{S'} z_1\,dydx = \int\int_{S''_e} z_2\cos(\mathbf{n}_e z)\,dS +$$

$$+ \int\int_{S'_e} z_1\cos(\mathbf{n}_e z)\,dS = \int\int_{S_e} z\cos(\mathbf{n}_e z)\,dS > 0\,.$$

Si en cambio $z_2 < z_1$ se ha de sustituir S_e por $-S_e$, resultando $\mathbf{V} < 0$.

Es cómodo atribuir también una orientación a S, independiente de la de $\mathbf{D}$ en el primer miembro de [90-14], de manera que el orden $dxdy$ fije el sentido dextrógiro de su proyección $+\mathbf{D}$ y la cara S dé ya directamente a qué sentido de $\mathbf{n}$ nos referimos en el segundo miembro de [90-14]. Entonces

$$\int\int_{S''} z_2\,dxdy = \int\int_{S''_e} z_2\,dxdy \quad ; \quad \int\int_{S'} z_1\,dydx = \int\int_{S'_e} z_1\,dxdy$$

y por [90-17] se puede también escribir

$$[90\text{-}18] \quad |\,\mathbf{V}\,| = \int\int_{S''_e} z_2\,dxdy + \int\int_{S'_e} z_1\,dxdy = \int\int_{S_e} z\,dxdy.$$

Considerando la normal interior $\mathbf{n}_i$, correspondiente a la cara interior S_i, será

$$[90\text{-}19] \quad |\,\mathbf{V}\,| = -\int\int_{S_i} z\,dxdy = -\int\int_{S_i} z\cos(\mathbf{n}_i, z)\,dS.$$

DEF. Un volumen se dice *orientado positivamente* si se lo evalúa según [90-17] como limitado por la cara *exterior* de la superficie de contorno. Pondremos $V = |\mathbf{V}|$, indicando, a veces, con V el correspondiente conjunto espacial.

Si es $\mathbf{r}$ el radio vector que sitúa los puntos x, y, z de la superficie S, se tendrá correlativa y análogamente a [90-15], que es:

$$[90\text{-}20] \quad \mathbf{V} = \int\int_{S_e} z\,dxdy = \int\int_{S_e} x\,dydz = \int\int_{S_e} y\,dzdx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\int_{S_e} (x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy) =$$

$$= \frac{1}{3}\int\int_{S_e} \{x\cos(\mathbf{n}_e, x) + y\cos(\mathbf{n}_e, y) + z\cos(\mathbf{n}_e, z)\}\,dS =$$

$$= \frac{1}{3}\int\int_{S_e} |\,\mathbf{r}\,|\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_e)\,dS.$$

Esta fórmula puede considerarse la análoga para el volumen de la [88-16] dada para las áreas.

EJEMPLO. Para la esfera de radio r, donde la dirección y sentido de $\mathbf{n}_e$ coincide con los de $\mathbf{r}$, y por tanto es $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_e) = +1$, se tiene

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\,r\int\int_{S_e} dS = \frac{1}{3}\,r\,.\,4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

c) La integral [90-17] es caso particular de la que se obtiene cuando en lugar de z se considera sobre S una función continua cualquiera $\mathrm{R}(x,y,z)$. Entonces la [90-14] para el caso de superficie cerrada se traduce en la

$$[90\text{-}21] \quad \int\int_{S_e} \mathrm{R}\,dxdy = \int\int_{S_e} \mathrm{R}\cos(\mathbf{n}_e, z)\,dS =$$

$$= \int\int_D \mathrm{R}(x,y,z_2)\,dxdy - \int\int_D \mathrm{R}(x,y,z_1)\,dxdy.$$

Análogamente a [90-15] se obtiene para superficie cerrada orientada *positivamente* (es decir, extendiendo la integral a la cara *exterior*):

$$[90\text{-}22] \quad \iint_{S_e} P dy dz + Q dz dx + R dx dy =$$

$$= \iint_{S_e} [P \cos(\mathbf{n}_e, x) + Q \cos(\mathbf{n}_e, y) + R \cos(\mathbf{n}_e, z)] dS.$$

EJERCICIOS

1. Calcular $\iint_{S_e} z\,dS$ sobre la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$.

2. Calcular $\iint_{S_e} (x + y) z\,dS$ extendida al octante de coordenadas positivas de la superficie esférica de centro en el origen y radio a.

3. Calcular $\iint_S \frac{x + y}{z} dS$ sobre la superficie del ejercicio anterior.

4. Calcular

$$\iint_{S_e} \left[\frac{x \cos(\mathbf{n}, x)}{a^2} + \frac{y \cos(\mathbf{n}, y)}{b^2} + \frac{z \cos(\mathbf{n}, z)}{c^2} \right] z\,dS$$

sobre la mitad $z \geqslant 0$ del elipsoide $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$, siendo $\mathbf{n}$ la normal exterior en el punto (x, y, z).

5. ¿Qué condición deben cumplir P, Q, R para que

$$\iint_S [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z)]\,dS ,$$

siendo $\mathbf{n}$ la normal a la superficie S, no dependa de esta superficie sino de la curva que es su borde?

6. Calcular la integral de superficie

$$I = \iint_S \frac{dS}{r^4}$$

siendo S la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y r la distancia del punto variable en S al punto fijo $P(0; 0; k)$, $|k| < 1$.

§ 91. DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

1. Propiedades de la derivación en campos escalares. — La operación grad (§ 66-6), aplicable a campos escalares y que conduce a un vector en cada punto, se comporta en muchos aspectos como la derivación; de allí la notación D también usada para representar el gradiente.

a) Sea el vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ que fija el punto $M(x, y, z)$ desde el origen. Multiplicando el *vector diferencial de* $\mathbf{r}$:

$$[91\text{-}1] \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} :$$

escalarmente por grad U, tendremos

$$[91\text{-}2] \quad \text{grad}\,U \,.\, d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU.$$

Por la arbitrariedad de dx, dy, dz resulta recíprocamente

$$[91\text{-}3] \quad \text{De } \mathbf{g} \,.\, d\mathbf{r} = dU \quad \text{sigue} \quad \mathbf{g} = \text{grad}\,U.$$

b) Si F(U, V, . .) es una función diferenciable de U, V, . . ., que a su vez son funciones diferenciables de las coordenadas x, y, z, se tiene

$$[91\text{-}4] \quad \text{grad}\,F = \frac{\partial F}{\partial U} \text{grad}\,U + \frac{\partial F}{\partial V} \text{grad}\,V + \ldots$$

En efecto, multiplicando escalarmente el segundo miembro, por $d\mathbf{r}$, se tiene por [91-2]

$$\left(\frac{\partial F}{\partial U} \text{grad}\,U + \frac{\partial F}{\partial V} \text{grad}\,V + \ldots \right) d\mathbf{r} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial U} dU + \frac{\partial F}{\partial V} dV + \ldots = dF,$$

y aplicando [91-3] resulta [91-4]. La conservación de la diferenciabilidad se ha justificado en § 67-2.

c) En forma análoga se demuestran las relaciones:

$$[91\text{-}5] \quad \text{grad}(U + V) = \text{grad}\,U + \text{grad}\,V,$$

$$[91\text{-}6] \quad \text{grad}(U \,.\, V) = U \,.\, \text{grad}\,V + V \,.\, \text{grad}\,U.$$

d) De la expresión [66-13] del gradiente en coordenadas resulta: Si U y V son funciones de x, y, z tales que

$$[91\text{-}7] \quad \text{grad}\,U = \text{grad}\,V,$$

se tiene (§ 66-2)

$$[91\text{-}8] \quad U = V + \text{const.}$$

2. Campos vectoriales. Líneas de fuerza. — *a*) Si una fuerza

$$[91\text{-}9] \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

está definida en todos los puntos del espacio, o de un cierto recinto, tendremos lo que se llama un *campo de fuerzas*. Análogamente podemos considerar un campo de velocidades en el movimiento de un flúido, o de intensidades en conducción del calor o de la electricidad, etc. Nos convendrá considerar independientemente del significado del vector $\mathbf{f}$, un *campo vectorial* [91-9] que puede darse mediante tres funciones:

$$[91\text{-}10] \quad P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z), \quad R = R(x, y, z).$$

Estas funciones pueden depender también del tiempo t (ejemplo: campo gravitatorio de un conjunto de astros, varia-

ble al moverse éstos); si no dependen del tiempo, el campo se llama *estacionario*.

b) Una representación aproximada de un campo vectorial se obtiene considerando un gran número de puntos a cada uno de los cuales se aplica el vector correspondiente. Esta imagen puede mejorarse en varios aspectos mediante la idea de línea de fuerza sugerida por la familiar experiencia de las limaduras de hierro en un campo magnético.

Una *línea de fuerza* es una curva que tiene en cada uno de sus puntos la dirección del campo en ese punto, es decir, en cada uno de sus puntos el correspondiente vector le es tangente. En otras palabras, las líneas de fuerza son las envolventes de los vectores del campo.

La determinación de las líneas de fuerza se logra integrando un sistema de dos ecuaciones diferenciales. En efecto, por ser paralelos los vectores $t\,ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, y [91-9], se obtiene (§ 60-8, d_1):

$$[91\text{-}11] \qquad \frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}\,.$$

EJEMPLO 1. Para el campo gravitatorio de una partícula en el origen las componentes son $(m/r^2)(x/r) = mx/r^3$, my/r^3, mz/r^3. Las ecuaciones diferenciales de las líneas de fuerza resultan $dx/x = dy/y = dz/z$, y se obtienen de inmediato las integrales $\ln y = \ln x + \ln C_1$, $\ln z = \ln x + \ln C_2$, o sea $y = C_1 x$, $z = C_2 x$; es decir las líneas de fuerza son las rectas por el origen.

NOTAS: 1. Como es poco usada la denominación general de *líneas de campo* hablaremos de *líneas de fuerza* para un campo vectorial cualquiera. Cuando el campo es de velocidades (por ejemplo: movimiento de un flúido) las líneas suelen llamarse *líneas de flujo*, y en general no coinciden con las trayectorias de las partículas (ver nota 3).

2. El concepto de línea de fuerza condujo a FARADAY a muchos de sus importantes descubrimientos en electricidad y magnetismo.

3. En el movimiento de un flúido, *cada partícula* se mueve según una ley $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, y como además cada partícula puede individualizarse por su posición $M_0(x_0, y_0, z_0)$ en un instante $t = t_0$, el movimiento de todas las partículas puede describirse con tres funciones del tiempo, cada una con tres parámetros:

$$[9\text{-}12] \qquad x = x(t; x_0, y_0, z_0),\quad y = y(t; x_0, y_0, z_0),\quad z = z(t; x_0, y_0, z_0).$$

Las ecuaciones

$$[91\text{-}13] \qquad x' = x'(t; x_0, y_0, z_0),\quad y' = y'(t; x_0, y_0, z_0),\quad z' = z'(t; x_0, y_0, z_0)$$

dan en todo instante la velocidad de la partícula que estaba en M_0 en el instante $t = t_0$. Para conocer en función del tiempo la velocidad de la partícula que en cada instante pasa por un punto fijo $M(x, y, z)$ del espacio, es necesario conocer la posición de cada una de esas partículas en $t = t_0$, para lo cual se resuelven las ecuaciones [91-12] respecto de x_0, y_0, z_0 y se reemplazan los resultados en [91-13], dando

$$[91\text{-}14] \qquad x' = P(t; x, y, z),\quad y' = Q(t; x, y, z),\quad z' = R(t; x, y, z).$$

Estas ecuaciones definen el *campo de velocidades*, en general variable con el tiempo. Para cada instante $t = \text{const.}$, las líneas del campo o líneas del flujo son las curvas integrales del sistema de ecuaciones diferenciales

$$[91\text{-}15] \qquad \frac{dx}{P(t; x,y,z)} = \frac{dy}{Q(t; x,y,z)} = \frac{dz}{R(t; x,y,z)}\,, \quad t = \text{const}$$

En cambio las *trayectorias* de las partículas, también llamadas *líneas de corriente*, son las curvas integrales del sistema [91-14], donde t es la *variable* independiente. Por consiguiente *las líneas de corriente son en general distintas de las líneas de flujo*. Hay coincidencia si la dirección del campo en cada punto no varía con el tiempo y en especial en *campos estacionarios*, donde la velocidad en cada punto es independiente del tiempo.

En cambio, en un campo de *fuerzas*, aún estacionario, la trayectoria de una partícula no coincide en general con una línea de fuerza. Basta considerar la caída de un cuerpo con velocidad inicial no vertical.

EJEMPLO 2. En el campo

$$[91\text{-}16] \qquad x = x_0 + \tfrac{1}{2}t^2\,,\quad y = y_0 + \tfrac{1}{2}t^2\,,\quad z = z_0 + t\,,$$

al derivar se eliminan ya los parámetros x_0, y_0, z_0, obteniéndose para cada instante la velocidad en cada punto del espacio:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = t\,,\quad \frac{dz}{dt} = 1.$$

Como esta velocidad depende del tiempo, el campo no es estacionario. Las líneas de flujo en cada instante son las curvas integrales del sistema

$$\frac{dx}{t} = \frac{dy}{t} = \frac{dz}{1}\,,\quad (t = \text{const.}),$$

o sea las rectas de ecuaciones

$$x = tz + C_1\,,\quad y = tz + C_2\,,\quad (t = \text{const.}).$$

En cambio las trayectorias o líneas de corriente son las parábolas [91-16].

3. Divergencia. — Dado en coordenadas cartesianas el campo vectorial $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, llamaremos *divergencia de* $\mathbf{v}$ al escalar

$$[91\text{-}17] \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,.$$

Para que esta definición tenga interés es necesario probar que div v es independiente del sistema de coordenadas en que se representa v, y ello resulta del significado geométrico de la divergencia. Veremos (§ 92-1, b_2) que si v es por ejemplo el campo de velocidades en el movimiento de un flúido, div v representa la velocidad de expansión por unidad de volumen en cada punto.

No obstante daremos ahora una demostración directa. El flúido que en $t = t_0$ ocupaba un dominio D_0, ocupa en cada instante t un dominio D cuyo volumen, teniendo en cuenta la correspondencia [91-12] entre los puntos de D_0 y los de D, es (§ 84-1)

$$V(t) = \iiint_D dxdydz = \iiint_{D_0} J(t;\, x_0, y_0, z_0)\, dx_0dy_0dz_0 \ ,$$

siendo J el jacobiano de la transformación [91-12]:

$$[91\text{-}18] \qquad J(t;\, x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} .$$

Si dJ/dt es continua se tiene

$$[91\text{-}19] \qquad \frac{dV}{dt} = \iiint_{D_0} \frac{dJ}{dt}\, dx_0dy_0dz_0 \ ;$$

a su vez dJ/dt se calcula primero, para $t = t_0$, por la regla de derivación de un determinante (§ 32-5)

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_0} & \frac{\partial Q}{\partial x_0} & \frac{\partial R}{\partial x_0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{t_0} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y_0} & \frac{\partial Q}{\partial y_0} & \frac{\partial R}{\partial y_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{t_0} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z_0} & \frac{\partial Q}{\partial z_0} & \frac{\partial R}{\partial z_0} \end{vmatrix}_{t_0} ,$$

o sea

$$[91\text{-}20] \qquad \left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\partial P}{\partial x_0} + \frac{\partial Q}{\partial y_0} + \frac{\partial R}{\partial z_0}\right)_{t=t_0} .$$

En efecto, como para $t = t_0$, x, y, z se reducen a x_0, y_0, z_0, se tiene para $t = t_0$:

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \frac{\partial y}{\partial y_0} = \frac{\partial z}{\partial z_0} = 1 \ , \quad \frac{\partial x}{\partial y_0} = \dots = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial P}{\partial x_0} \ , \ \dots$$

Como [91-20] vale para cualquier valor de t_0, podemos suprimir en [91-20] $t = t_0$, y [91-19] da

$$[91\text{-}21] \qquad \frac{dV}{dt} = \iiint_D \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right] dV$$

y entonces, siendo μ el valor medio de

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

en D, se tiene:

$$[91\text{-}22] \qquad \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \mu .$$

Si D contiene siempre el punto M y tiende a cero su diámetro, el límite del primer miembro de [91-22] es la velocidad de expansión por unidad de volumen en M, y el del segundo la divergencia.

Si para todos los movimientos es $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, el flúido se llama *incompresible*. Para ver cómo entonces las líneas de flujo pueden dar una idea [por ahora cualitativa y que más tarde (§ 92-1, nota 1) precisaremos] de la intensidad del campo, consideremos una curva cerrada C, las líneas de flujo que se apoyan en ella forman una superficie que llamaremos *tubo de vectores* (en un campo de fuerzas, *tubo de fuerzas*). Si el movimiento es estacionario las trayectorias o líneas de corriente son las líneas de campo o de flujo (§ 91-2, nota 3) y entonces el flúido fluye dentro del tubo sin cruzarlo. Si además el flúido es incompresible (o al menos en el movimiento considerado es $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$), la velocidad debe aumentar cuando el tubo se estrecha y recíprocamente. En general: *en un campo estacionario con divergencia nula, la intensidad en los puntos de una línea de fuerza crece o decrece según que las líneas se aproximen o se separen.*

4. **Circulación. Campos conservativos; potencial.** — *a*) *Circulación en un campo vectorial.* — Si en el campo vectorial [91-9] consideramos un arco de curva AB tendremos un vector del campo aplicado a cada uno de sus puntos, y podremos considerar la integral curvilínea

$$[91\text{-}23] \qquad \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \ ,$$

donde el segundo miembro resulta de observar que el integrando del primero es el producto escalar de los vectores [91-9] y $d\mathbf{s} = dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}$. Esta integral curvilínea [91-23] se llama *circulación del vector* f *a lo largo del arco* AB.

La aplicación física más importante se obtiene en un campo de fuerzas. En tal caso la integral [91-23] se conoce como *trabajo* de la fuerza f sobre una partícula que se desplaza a lo largo del arco AB.

NOTAS: 1. Esta denominación se justifica considerando a [91-23] como un límite de sumas de acuerdo con la definición de integral curvilínea (§ 88).

2. Una partícula de masa $m = 1$ sobre la que actúa la fuerza [91-9] se mueve de acuerdo con las ecuaciones de la Dinámica

$$[91\text{-}24] \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = P \ , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Q \ , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = R .$$

Multiplicando estas ecuaciones por dx/dt, dy/dt, dz/dt respectivamente, y sumando, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] =$$

$$= P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt} .$$

El primer miembro es la derivada de la energía cinética $T = \frac{1}{2}v^2$, de modo que integrando de t_0 a t_1, y llamando A, B; T_A, T_B a las respectivas posiciones y energías cinéticas de la partícula, tendremos:

$$[91\text{-}25] \quad T_B - T_A = \int_{t_0}^{t_1} \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz ,$$

es decir, la variación de energía cinética es igual a la circulación en el campo de fuerzas, o sea al trabajo del campo sobre la partícula, a lo largo de AB.

b) *Campos conservativos; potencial.* — El cálculo de la circulación requiere en general conocer el camino, y éste en general no se conoce de antemano. De ahí la importancia de los *campos conservativos*, caracterizados por el hecho de que la circulación entre dos puntos *no depende del camino* que los une. En tal caso, fijado un punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, para cada punto $M(x, y, z)$ la circulación

$$[91\text{-}26] \quad \int_{M_0 M} P dx + Q dy + R dz = U(x, y, z) = U(M)$$

tiene un valor determinado, y así define una función uniforme $U(x, y, z)$ que por lo visto en § 89-3 es una función primitiva o función potencial de la terna de funciones P, Q, R, y que ahora llamaremos *potencial* del campo conservativo.

NOTAS: 3. En un campo conservativo *de fuerzas*, la función —U se llama *energía potencial* en M, y la ecuación [91-25] establece que la suma de las energías cinética y potencial es constante durante el movimiento de la partícula, al estar el trabajo del campo dado por la diferencia de potenciales igual al del extremo menos el del origen del camino.

4. En *ciertos* campos newtonianos (ver § 93-1, nota 1) se llama *potencial* a la energía potencial.

El potencial determina por completo el campo, supuesto éste continuo, es decir, con componentes continuas, pues (§ 89-3)

$$[91\text{-}27] \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \text{o sea} \quad \mathbf{f} = \text{grad}\, U ;$$

es decir: *la componente del campo conservativo en una dirección cualquiera es igual a la derivada del potencial en esa dirección.*

Entonces un campo conservativo puede determinarse por una única función, el potencial U. Recíprocamente (§ 89-3), si existe en un recinto simplemente conexo una función uniforme $\varphi = \varphi(x, y, z)$ tal que

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \text{o sea} \quad \mathbf{f} = \text{grad}\, \varphi ,$$

siendo P, Q, R continuas, es **f** un campo conservativo y φ un potencial del mismo.

Si U es una función potencial, lo es también la función $V = U + C$, siendo C una constante arbitraria, y recíprocamente dos potenciales U y V de un mismo campo **f** difieren en una constante, pues (§ 66-2):

$$\text{grad}(U - V) = \text{grad}\, U - \text{grad}\, V = \mathbf{f} - \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Es decir: *El potencial está determinado a menos de una constante aditiva arbitraria.* En ciertos casos se fija esta constante mediante una convención oportuna (ver § 93-1, nota 2).

Si un campo vectorial [91-9] cuyas componentes P, Q, R admiten derivadas primeras continuas es conservativo, resulta de [91-27]

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

que conjuntamente con las otras dos relaciones análogas dan la siguiente condición necesaria [y también suficiente si P, Q, R son diferenciables (§ 89-3, *a*)], para que el campo simplemente conexo sea conservativo:

$$[91\text{-}28] \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} .$$

NOTA 5. Las curvas (superficies) de nivel del campo escalar plano (espacial) $U = U(x, y)$, $[U = U(x, y, z)]$ (§ 64-2, *b*) se llaman *curvas* (*superficies*) *equipotenciales* del campo conservativo $\mathbf{f} = \text{grad}\, U$. Como el campo tiene la dirección de la normal **n** a ellas, y su intensidad es $\partial U/\partial \mathbf{n}$, se tiene: *la intensidad del campo es inversamente proporcional a la distancia infinitésima entre superficies equipotenciales.*

5. **Rotor. Campos irrotacionales.** — Vimos (§ 91-4, *a*) que la circulación [91-23] se interpreta en un campo de *fuerzas* como *trabajo* de una partícula que se desplaza. Otra interpretación sugestiva de la circulación a lo largo de una curva abierta o cerrada se obtiene en un campo de velocidades

$$[91\text{-}29] \quad \mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

de un flúido (o también de un sólido, ver ejemplo), pues en tal caso da *una medida de la circulación general* (positiva o negativa) *del flúido a lo largo de la curva en el sentido elegido.* Si en un recinto simplemente conexo la curva C es cerrada y la circulación por ella no se anula, ello indica que en una superficie limitada por C el movimiento tiene un carácter general rotatorio; por tal razón cuando la circulación se anula sobre toda curva cerrada C el movimiento, y también el campo **v**, se llama *irrotacional*, pero esa condición equivale (§ 89-3, *b*) a que el campo sea *conservativo* (§ 91-4, *b*).

En el caso general, si la curva cerrada C se contrae hacia un punto M de modo que tienden a cero tanto el área σ de una superficie S que la tenga por borde, como su diámetro, la circulación sobre ella tiende a cero, pero no así en general su cociente por el área σ. El límite de este cociente depende de la dirección **n** de la normal a S, veremos (§ 92-2) que en forma tal que define un *vector*, llamado *circulación en el punto* M, o *rotor* del campo en M, indicado por rot **v**, cuya componente según **n** es (fig. 313):

$$[91\text{-}30] \qquad (\text{rot}\,\mathbf{v})_n = \text{rot}_n\mathbf{v} = \lim \frac{1}{\sigma}\int_C \mathbf{v}\,.\,d\mathbf{s}.$$

EJEMPLO. En un sólido que gira alrededor del eje z con velocidad angular 1, la circulación sobre la circunferencia $x^2+y^2=r^2$, $z=z_0$, en el sentido de la rotación, es $2\pi r^2$, dividida por el área del círculo da 2. En toda curva situada en un plano por el eje z la circulación es 0, el vector rot **v** vale en el origen de coordenadas: $0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

Para calcular la componente de rot **v** según z, tomemos en el plano (x, y) el cuadrado limitado por las rectas $x=\pm h$, $z=0$, é $y=\pm h$, $z=0$, la circulación en el sentido positivo (dextrógiro) es (fig. 314):

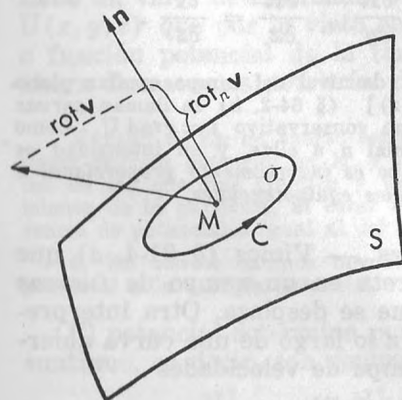


Fig. 313

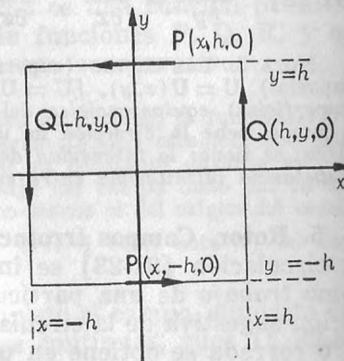


Fig. 314

$$\int_{-h}^{h} Q(h,y,0)\,dy + \int_{h}^{-h} P(x,h,0)\,dx +$$
$$+\int_{h}^{-h} Q(-h,y,0)\,dy + \int_{-h}^{h} P(x,-h.0)\,dx =$$
$$=\int_{-h}^{h}[Q(h,y,0)-Q(-h,y,0)]\,dy -$$
$$-\int_{-h}^{h}[P(x,h,0)-P(x,-h,0]\,dx.$$

Aplicando sucesivamente los teoremas del valor medio del Cálculo integral y del Cálculo diferencial, esta expresión se transforma en las siguientes, siendo ξ, η, ξ', η' números comprendidos entre $-h$ y h:

$$[Q(h,\eta,0)-Q(-h,\eta,0)]2h -$$
$$-[P(\xi,h,0)-P(\xi,-h,0)]2h =$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}Q(\xi',\eta,0)-\frac{\partial}{\partial y}P(\xi,\eta',0)\right]4h^2 \quad ,$$

de suerte que después de dividir por el área $4h^2$ del cuadrado se tiene el límite:

$$\text{rot}_z\mathbf{v} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Como las otras componentes resultan por permutación cíclica se tiene:

$$[91\text{-}31] \qquad \text{rot}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

NOTA. La condición [91-28] para que un campo sea conservativo o irrotacional, equivale en virtud de [91-31] a la condición rot **v** = **0**.

6. El operador nabla de Hamilton y sus aplicaciones. — *a*) HAMILTON introdujo el operador simbólico (*nabla, delta invertida* o *del*) definido así:

$$[91\text{-}32] \qquad \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

que permite resumir en forma clara y sencilla todas las operaciones vectoriales que estamos considerando:

a_1) *Aplicado a un escalar* U, *resulta el gradiente*; en efecto

$$\nabla\,U = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U = \mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z},$$

o sea:

$$[91\text{-}33] \qquad \nabla U = \text{grad}\,U.$$

a_2) *A un vector, aplicado escalarmente resulta la divergencia*; en efecto

$$\nabla.\mathbf{f} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}) =$$
$$=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

y por [91-17]

[91-34] $\nabla \cdot \mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{f}$.

a_3) *Aplicado vectorialmente resulta el rotor*; en efecto

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

y por [91-31]

[91-35] $\nabla \wedge \mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{f}$.

b) Si **u** y **v** son vectores y Φ un escalar, variables, valen para el operador nabla las siguientes identidades:

[91-36] $\nabla \cdot (\Phi \mathbf{u}) = (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{u} + \Phi (\nabla \cdot \mathbf{u})$;

[91-37] $\nabla \wedge (\Phi \mathbf{u}) = (\nabla \Phi) \wedge \mathbf{u} + \Phi (\nabla \wedge \mathbf{u})$;

[91-38] $\nabla \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\nabla \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$;

o sea

[91-36'] $\operatorname{div}(\Phi \mathbf{u}) = (\operatorname{grad} \Phi) \cdot \mathbf{u} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{u}$;

[91-37'] $\operatorname{rot}(\Phi \mathbf{u}) = (\operatorname{grad} \Phi) \wedge \mathbf{u} + \Phi \operatorname{rot} \mathbf{u}$;

[91-38'] $\operatorname{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}$.

DEM. Basta transformar las expresiones de los primeros miembros en coordenadas:

b_1) $\operatorname{div}(\Phi \mathbf{u}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi P) + \cdots = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} P + \cdots + \Phi \dfrac{\partial P}{\partial x} + \cdots$

b_2) $\operatorname{rot}(\Phi \mathbf{u}) =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \Phi P & \Phi Q & \Phi R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} + \Phi \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} .$$

b_3) Se tiene, entendiendo que un determinante simbólico con una línea

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

o bien **i**, **j**, **k**, se interpreta desarrollándolo por dicha línea:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{v} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} + \mathbf{u} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

c) *Otras relaciones.* — c_1) El operador ∇ se comporta en muchas identidades como un vector; por ejemplo

$$\nabla \wedge \nabla U = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u}) = 0 \quad ;$$

o en notación ordinaria

[91-39] $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$;

[91-40] $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$.

Ahora bien, [91-39] expresa que un campo conservativo es irrotacional, lo que es cierto (§ 91-5) conjuntamente con la inversa: si $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, existe $U = U(x, y, z)$ tal que $\mathbf{v} = \operatorname{grad} U$. En cuanto a [91-40], se demuestra en coordenadas, y expresa que el rotor es de divergencia nula o solenoidal (§ 92-1, *c*; § 92-3). También vale la propiedad recíproca: *todo vector solenoidal puede expresarse como el rotor de otro vector.*

DEM. Habrá que probar que si **v** es solenoidal, es decir $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, existen vectores **u** tales que $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$.

En efecto, si $\mathbf{v} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, busquemos un $\mathbf{u} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ tal que $R(x, y, z) \equiv 0$, debiendo ser entonces

$$X = -\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

para que sea $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$.

Tomemos

$$Q = -\int_{z_0}^{z} X(x, y, \zeta)\, d\zeta \quad ; \quad P = \int_{z_0}^{z} Y(x, y\, \zeta)\, d\zeta + a(x, y) \quad ,$$

en tal forma que aplicando

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \equiv 0 \quad ,$$

resulte

$$Z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) d\zeta - \frac{\partial \alpha}{\partial y} =$$

$$= \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Z}{\partial z}\, \partial \zeta - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = Z(x, y, z) - Z(x, y, z_0) - \frac{\partial a}{\partial y} \quad ,$$

para lo cual será necesario y suficiente tomar $\partial \alpha / \partial y = -Z(x, y, z_0)$, es decir

$$a(x, y) = -\int_{y_0}^{y} Z(x, \eta, z_0)\, d\eta .$$

Por tanto, un vector $\mathbf{u} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ tal que sea $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$, es el determinado por

$$P \equiv \int_{z_0}^{z} Y(x, y, \zeta)\, d\zeta - \int_{y_0}^{y} Z(x, \eta, z_0)\, d\eta \quad ,$$

$$Q \equiv - \int_{z_0}^{z} X(x, y, \zeta)\, d\zeta \quad , \quad R \equiv 0.$$

Fácil es ver que para $\Phi(x, y, z)$, función diferenciable arbitraria, toda solución $\mathbf{w}$ tendrá la forma $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \operatorname{grad} \Phi$.

c_2) Si se tiene en cuenta (§ 72-4) el tensor derivado $\nabla \mathbf{u}$, lo que da una tercera manera de aplicar el operador ∇ a un vector (además de las indicadas en a_2 y en a_3), se tienen las siguientes identidades:

[91-41] $$\nabla (\Phi \mathbf{u}) = (\nabla \Phi)\mathbf{u} + \Phi \nabla \mathbf{u} \quad ;$$

[91-42] $$\nabla (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u} \quad ;$$

[91-43] $$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad ;$$

[91-44] $$\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \quad ;$$

[91-45] $$(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \quad ;$$

[91-46] $$\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}).$$

Conviene asociar la primera de estas relaciones (donde el primer término del segundo miembro es un producto tensorial de vectores, § 63-2, *e*) con [91-36] y [91-37], y las dos siguientes con [91-38]. También conviene observar que [91-44] y [91-46] son equivalentes en virtud de [91-45], donde en notación también muy usual, $\mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{u})$ significa el anteriormente llamado producto del tensor $\nabla \mathbf{u}$ por el vector $\mathbf{v}$ (§ 63-2, *a*), mientras que $(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ significa el producto del tensor conjugado al $\nabla \mathbf{u}$ por el vector $\mathbf{v}$ (véanse desarrollos en Índice de símbolos, pág. 601).

d) *Operador de* LAPLACE. — El operador Δ (*delta*) de LAPLACE, aplicable a un escalar, se define por:

[91-47] $$\Delta U = \nabla^2 U = \nabla \cdot (\nabla U) = \operatorname{div} \operatorname{grad} U \quad ,$$

o en coordenadas:

[91-48] $$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} .$$

En muchas cuestiones de Matemática y aplicaciones a la Física y a la Técnica se presenta la *ecuación diferencial de* LAPLACE

[91-49] $$\Delta U = 0.$$

Las funciones U que satisfacen esta ecuación se llaman *armónicas* (cfr. § 93-1,*b*, y nota II, b_2).

NOTA. En 1785 publicó LAPLACE esta ecuación en coordenadas polares (§ 92-4, ej. 4) en relación con el potencial newtoniano (§ 93-1, *b*; *Oeuvres*, vol. 10, pág. 362) y más tarde (1789) en coordenadas cartesianas. Esta ecuación había sido considerada ya por LAGRANGE en 1761 en un problema de hidrodinámica. Por esta época consideró D'ALEMBERT la ecuación *en dos variables independientes*:

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = 0.$$

También se usa la notación Δ_2 para el operador $\Delta = \nabla^2$.

EJERCICIOS

1. En el campo de velocidades $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ hallar: 1º) Las trayectorias de las partículas; 2º) Las líneas del campo.

2. Lo mismo para el campo de velocidades $\mathbf{v} = tx\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

3. Determinar el potencial del campo vectorial plano, de componentes $X = (2/3)x^3 + xy^2$, $Y = x^2 y + (2/3)y^3$.

4. Lo mismo para el campo $X = y + z$, $Y = z + x$, $Z = x + y$.

5. Puede ser $\operatorname{rot} \mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ aún siendo el campo $\mathbf{f}$ de dirección constante, y también $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ en un campo de velocidades $\mathbf{v}$ donde las partículas se muevan en un mismo sentido según circunferencias con un eje común. Probar que ello ocurre en los campos

$$\mathbf{f} = y\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{v} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) / (x^2 + y^2) \quad ,$$

en todo el espacio para el primero, y en todo recinto que excluya al eje z para el segundo.

6. El campo $\mathbf{v}$ del ejercicio anterior admite el potencial *multiforme* $U = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$. (Cfr. § 89-1, ej 2, y § 89-2, nota 2).

7. Comprobar que las funciones $(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{arc\,tg}(y/x)$, son armónicas.

8. Verificar que la función

$$U = \frac{r - a}{b - a} \cdot \frac{Bb}{r} + \frac{b - r}{b - a} \cdot \frac{Aa}{r}$$

con $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ satisface a la ecuación de LAPLACE, y toma los valores constantes A y B sobre las esferas $r = a$, $r = b$ respectivamente.

9. Probar que si U es solución de la ecuación de LAPLACE, lo es también

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U$$

si $P(x, y, z)$ es un polinomio en x, y, z.

10. Probar que si $F(x, y, z)$ satisface a la ecuación de LAPLACE, lo mismo ocurre con

$$\frac{1}{r} F\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$$

siendo $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

11. Probar que si $f(t)$ admite derivada segunda no idénticamente nula, $f(ax + by + cz)$ es armónica si y sólo si $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

12. Toda función homogénea de grado n en x, y, z, que satisfaga a la ecuación de LAPLACE [91-49] se llama (THOMSON y TAIT, 1879) *armónica esférica sólida de grado n*; (cfr. § 93 ejercicio 19). Verificar que lo son $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, 1, $ax + by + cz$, $x^2 + yz - y^2$, $(x + iy)^n$, con grados -1, 0, 1 (si $abc \neq 0$), 2, n, respectivamente.

13. Probar que si U es armónica esférica sólida de grado n, $r^h U$, con $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, satisface a la ecuación de LAPLACE [91-49] si y sólo si $h = 0$ ó $h = -2n - 1$, obteniéndose en el último caso una armónica esférica sólida de grado $-n - 1$ (LORD KELVIN).

§ 92. TEOREMAS INTEGRALES Y APLICACIONES

1. **Transformación de integrales triples.** — *a) Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.* — Dado un campo vectorial uniforme w, si se considera un área σ normal a la dirección de w, se llama *flujo* de w sobre σ al producto $\sigma \,.\, |\mathbf{w}| = \sigma w$.

Si el área es oblicua al vector w, y el ángulo de incidencia es (n, w), se llama flujo al producto

$$w \,.\, \sigma \,.\, \cos(\mathbf{n}, \mathbf{w}) = \sigma \,.\, \text{proy. de } \mathbf{w} \text{ sobre } \mathbf{n} = w_n \,.\, \sigma$$

cuyo signo depende del sentido que se adopte para la normal n. El flujo es un escalar y su significado físico depende de la magnitud que represente el vector. Si es la velocidad de un flúido, el flujo es la cantidad de éste que pasa por σ en la unidad de tiempo; si representa una radiación luminosa, calorífica, etc., el flujo es la cantidad de energía que pasa a través de σ en la unidad de tiempo, etc.

Dada una superficie curva cualquiera y un campo vectorial w de componentes variables (X, Y, Z) funciones de (x, y, z) el flujo elemental correspondiente a cada elemento de superficie dS es $w_n \,.\, dS$, y el límite de la suma de flujos elementales se llama *flujo* de w a través de la superficie. Su expresión es, por tanto:

$$[92\text{-}1] \qquad \text{Flujo} = \iint_S w_n \, dS = \iint_S \mathbf{n} \,.\, \mathbf{w} \, dS =$$

$$= \iint_S [X \cos(\mathbf{n}, x) + Y \cos(\mathbf{n}, y) + Z \cos(\mathbf{n}, z)] dS =$$

$$= \iint_S X dy dz + Y dz dx + Z dx dy \quad ,$$

según vimos en [90-15], con las convenciones de signo allí consideradas. Si la superficie S es cerrada, se aplica el convenio establecido en § 90-3, es decir, el flujo *saliente* de la superficie cerrada se considera *positivo*, y el *entrante* se toma *negativo*, es decir, a w_n le atribuimos signo + si la proyección de w sobre la normal está dirigida hacia el *exterior* del recinto, y signo — si está dirigida hacia adentro. Esto se expresa brevemente diciendo: w_n es la proyección de w sobre la normal exterior $\mathbf{n}_e$. Así, los dos últimos miembros de [92-1] se interpretan según [90-22].

b) Teorema de GAUSS *o de la divergencia.* — Ya hemos expresado en [91-21] la velocidad de expansión o derivada con respecto al tiempo, del volumen de un flúido, obteniendo

$$[92\text{-}2] \qquad \frac{dV}{dt} = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV .$$

El primer miembro se puede calcular de otra manera pensando en el movimiento de la superficie que limita al flúido primitivamente en un recinto R de volumen V. Si suponemos que R tiene una cara plana P de normal exterior $\mathbf{n}_e$ y superficie ΔS, y que en sus puntos es v = const, el crecimiento del volumen a través de P por unidad de tiempo es (fig. 315)

$$h \,.\, \Delta S = v \cos(\mathbf{v}, \mathbf{n}_e) \,.\, \Delta S = v_n \,.\, \Delta S.$$

Para un recinto R cualquiera limitado por una superficie con plano tangente en todos sus puntos tendremos un valor aproximado de dV/dt considerando un poliedro inscripto y para cada una de sus caras, como valor constante de la velocidad, el correspondiente en el campo a uno de sus puntos. Si el campo v es continuo, este valor aproximado $\Sigma v_n \Delta S$ tiende al valor exacto dV/dt cuando tiende a cero el máximo de los diámetros de las caras, y el ángulo de éstas con los planos tangentes. Por otra parte, la suma $\Sigma v_n \Delta S$ tiende a una integral de superficie, resulta así:

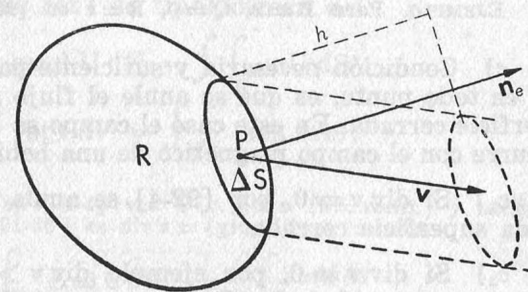


Fig. 315

$$[92\text{-}3] \qquad \frac{dV}{dt} = \iint_{S_e} v_n \, dS \quad ,$$

y de aquí por [92-8] resulta el *teorema de* GAUSS o *de la divergencia*:

$$[92\text{-}4] \qquad \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \iint_{S_e} v_n \, dS = \iint_{S_e} \mathbf{n}_e \,.\, \mathbf{v} \, dS \quad ,$$

o en notación escalar [91-29], llamando n_1, n_2, n_3, a las componentes de la normal exterior a la superficie S, y siendo $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$:

$$[92\text{-}5] \qquad \iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \iint_{S_e} (n_1 P + n_2 Q + n_3 R) \, dS .$$

Expresa [92-4] que *la integral de la divergencia de un campo vectorial en un recinto R es igual a la integral sobre la superficie que lo limita, de la componente del campo según la normal exterior.*

El primer miembro de [92-4] suele llamarse *divergencia total* en R, y la integral $\int\int v_n\, dS$, extendida a una superficie cerrada o abierta, es el *flujo* del campo a través de la superficie. Entonces el teorema de GAUSS establece que *la divergencia total en un recinto es igual al flujo a través de la superficie que lo limita.*

EJEMPLO. Para $P = x$, $Q = y$, $R = z$ en [92-5] resulta [90-20].

c) Condición necesaria y suficiente para que div v se anule en todo punto, es que se anule el flujo a través de toda superficie cerrada. En este caso el campo se llama *solenoidal* (tal ocurre con el campo magnético de una bobina o solenoide).

c_1) Si div v $\equiv 0$, por [92-4] se anula el flujo a través de toda superficie cerrada.

c_2) Si div v $\not\equiv 0$, por ejemplo div v > 0 en $M_0(x_0, y_0, z_0)$, por la continuidad de $\partial P/\partial x, \ldots$, será div v > 0 en todo un entorno de M_0 y por [92-4] será > 0 el flujo a través de la superficie que lo limita.

En el movimiento de un flúido esto sólo puede ocurrir si el flúido se expande o dilata, con una velocidad dada por [92-3]. Aplicando entonces el teorema de GAUSS a un entorno infinitésimo de M_0 resulta: *En el movimiento de un flúido, la divergencia de la velocidad representa en cada punto la velocidad de expansión por unidad de volumen.*

NOTAS: 1. Consideremos en un campo solenoidal un recinto R formado por el trozo de un tubo de vectores entre dos secciones S_1 y S_2. Si bien no todo campo admite superficies (como las equipotenciales de un campo conservativo) normales a la dirección del campo en todo punto, podemos suponer que S_1 y S_2 son *aproximadamente normales* al campo en el sentido de que los ángulos de sus normales n_1 y n_2 con v, tienden a cero al angostarse el tubo. Para ello una de las normales es interior y otra exterior a R, y como el flujo a través de las paredes del tubo es nulo, tendremos, por ser el campo solenoidal:

$$\int\int_{S_1} v_n\, dS = \int\int_{S_2} v_n\, dS \ ;$$

y entonces, llamando $\sigma^{(1)}$ y $\sigma^{(2)}$ a dos secciones infinitésimas de un mismo tubo, y $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ a las intensidades del campo en ellas, tendremos:

[92-6] $$v^{(1)}\sigma^{(1)} = v^{(2)}\sigma^{(2)} \ ,$$

es decir, *en un campo solenoidal las intensidades en los puntos de un tubo de vectores de sección infinitésima, son inversamente proporcionales a las áreas de las secciones normales.*

2. La relación [92-5], también llamada fórmula de GAUSS o de OSTROGRADSKI, puede escribirse también en la forma (ver § 90-3, *c*):

$$\int\int\int_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx dy dz = \\ = \int\int_{S_e} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \ ,$$

donde debe observarse el orden de las diferenciales en el segundo miembro, en relación con lo visto en § 88-5, *c*.

d) *Fórmulas del gradiente y del rotor.* — Las integrales triples de grad U y de rot f se transforman así:

[92-7] $$\int\int\int_R \text{grad U}\, dV = \int\int_S \mathbf{n} U\, dS \ ,$$

[92-8] $$\int\int\int_R \text{rot f}\, dV = \int\int_S \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}\, dS .$$

DEM. d_1) Haciendo en [92-4] $\mathbf{v} = U(x, y, z)\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ = const.) y teniendo en cuenta que por [91-36'] es div v = (grad U) . a, resulta

$$\mathbf{a} \cdot \int\int\int_R \text{grad U}\, dV = \mathbf{a} \int\int_S \mathbf{n} U\, dS \ ,$$

y como esta igualdad de productos escalares vale para todo a, resulta [92-7].

d_2) Haciendo en [92-4] $\mathbf{v} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ = const.) y teniendo en cuenta que por [91-38'] es div ($\mathbf{f} \wedge \mathbf{a}$) = a rot f, resulta

$$\mathbf{a} \cdot \int\int\int_R \text{rot f}\, dV = \int\int_S (\mathbf{n}, \mathbf{f}, \mathbf{a})\, dS = \mathbf{a} \cdot \int\int_S \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}\, dS \ ,$$

y como esta igualdad de productos escalares vale para todo a, resulta [92-8].

2. Carácter intrínseco de los operadores diferenciales grad, div, rot. — Que los operadores diferenciales grad, div, rot, definidos por sus expresiones en coordenadas cartesianas [66-13], [91-17] y [91-31] son en realidad independientes del sistema de coordenadas, resulta muy fácilmente de las fórmulas [92-4], [92-7] y [92-8], dando esta última también el carácter semitensorial (§ 63-2, *e*) de rot f. Ello resulta de la invariancia de las expresiones que figuran en los segundos miembros con respecto al sistema de coordenadas.

Por ejemplo, si div v tuviera en otro sistema de coordenadas otro valor Div v, como el segundo miembro de [92-4] tiene el mismo valor en ambos sistemas, será para todo recinto R:

$$\int\int\int_R \text{Div v}\, dV = \int\int\int_R \text{div v}\, dV \quad \text{ó} \quad \int\int\int_R (\text{Div v} - \text{div v})\, dV = 0.$$

Si fuera en un punto M, Div v $\neq$ div v siendo ambas continuas, tendría la diferencia Div v — div v signo constante en un entorno E de P, y no podría anularse su integral sobre E.

3. **Teorema de Stokes.** — Consideremos en un campo vectorial $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ una curva C y una superficie S que la tenga por borde. Si $\mathbf{n}$ es la normal a S, definimos en § 91-5 rot v en cada punto de S como un límite de circulación por unidad de superficie encerrada; entonces cabe preguntar si recíprocamente no será posible, conociendo rot v en cada punto de S, reconstruir la circulación a lo largo de su borde C. Dividiendo S en trozos ΔS_i de áreas ΔS_i y contornos C_i mediante una red de curvas (figura 316), y eligiendo los sentidos de circulación y de $\mathbf{n}$ de acuerdo con la orientación del triedro de coordenadas, y un punto M_i en cada trozo ΔS_i; tendremos por [91-30]

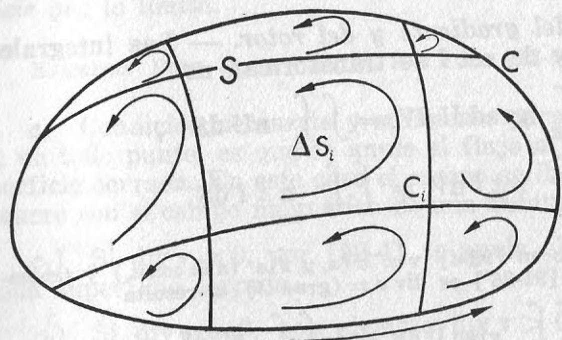


Fig. 316

$$[92\text{-}9] \qquad \Big[\operatorname{rot}_n \mathbf{v}\Big]_{M_i} = \frac{1}{\Delta S_i}\int_{C_i} \mathbf{v}\,.\,d\mathbf{s} + \varepsilon_i \ ,$$

donde ε_i tiende a cero con el diámetro de ΔS_i. La suma de las circulaciones sobre los C_i es simplemente la circulación a lo largo de C, pues las integrales sobre los arcos comunes a dos ΔS_i, se destruyen mutuamente al tomarse dos veces en sentidos contrarios. Resulta entonces por [92-9]:

$$[92\text{-}10] \qquad \int_C \mathbf{v}\,.\,d\mathbf{s} = \Sigma\Big[\operatorname{rot}_n \mathbf{v}\Big]_{M_i}\Delta S_i - \Sigma\varepsilon_i\Delta S_i \,.$$

Pasando al límite para máximo diámetro de ΔS_i tendiendo a cero de modo tal que máx $\varepsilon_i \to 0$, resulta la *fórmula de* STOKES

$$[92\text{-}11] \qquad \int_C \mathbf{v}\,.\,d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{v}\, dS \ ,$$

o sea: *la circulación a lo largo de una curva simple cerrada es igual al flujo del rotor a través de una superficie cualquiera que la tenga por borde*, eligiendo los sentidos de circulación y normal de acuerdo con el triedro de coordenadas con el que definimos el rotor. Este flujo es entonces el mismo a través de dos superficies S_1 y S_2 con el mismo borde C y que no se corten en puntos fuera de C; como la normal exterior a la superficie cerrada $S_1 + S_2$ se obtiene invirtiendo el sentido de la normal

en *una* de las superficies S_1 ó S_2, resulta que rot v es *solenoidal*, en concordancia con la identidad [91-40].

NOTAS: 1. Llamando n_1, n_2, n_3 a los cosenos directores de la normal $\mathbf{n}$ en el sentido elegido, se tienen, para la fórmula de STOKES en coordenadas cartesianas, las dos formas siguientes (ver §§ 88-4, *d*, y 90-2, *d*, y cfr. § 92-1, nota 2):

$$[92\text{-}12] \qquad \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \{(R_y - Q_z)n_1 + (P_z - R_x)n_2 + (Q_x - P_y)n_3\}\,dS =$$

$$= \iint_S (R_y - Q_z)\,dy\,dz + (P_z - R_x)\,dz\,dx + (Q_x - P_y)\,dx\,dy \,.$$

2. Si la superficie S es un recinto *R* del plano (x, y), [92-12] da la fórmula [88-25] de RIEMANN.

Aplicando la fórmula de GAUSS - OSTROGRADSKI (§ 92-1, nota 2) a un volumen cilíndrico de altura infinitésima, comprendido entre los planos de alturas z y $z + dz$ y suponiendo $R \equiv 0$ se obtiene,

$$[92\text{-}13] \qquad \iint_R (P_x + Q_y)\,dx\,dy = \int_C P\,dy - Q\,dx \ ,$$

donde el signo — resulta de lo dicho en § 88-5, *c*.

De [92-13] resulta nuevamente la fórmula de RIEMANN [88-25] cambiando P, Q, por Q, —P.

3. En un campo vectorial $\mathbf{v} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ en el plano (x, y), pongamos $\operatorname{div}\mathbf{v} = P_x + Q_y$. Considerando el contorno C de un recinto *R*, llamemos t_1, t_2; n_1, n_2, a los cosenos directores de la tangente y de la normal *exterior*, de

$$dx = t_1 ds = -n_2 ds \ , \quad dy = t_2 ds = n_1 ds \ ,$$

resulta por [92-13]

$$[92\text{-}14] \qquad \iint_R \operatorname{div}\mathbf{v}\, dS = \int_C (Pn_1 + Qn_2)\,ds = \int_C \mathbf{v}\,.\,\mathbf{n}\, ds = \int_C v_n\, ds \ ,$$

donde el último miembro se llama *flujo* del campo a través de la curva C. Por su analogía con [92-4] suele llamarse a [92-14] *fórmula de* GAUSS *en el plano*, pero no es sino otra forma de la fórmula de RIEMANN [88-25].

4. **Los operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas.** — *a*) Si las ecuaciones:

$$[92\text{-}15] \qquad x = f(u_1, u_2, u_3), \quad y = g(u_1, u_2, u_3), \quad z = h(u_1, u_2, u_3),$$

donde f, g, h son funciones uniformes, y con derivadas continuas, son resolubles unívocamente en las u_i:

$$[92\text{-}16] \qquad u_i = u_i(x, y, z) \ , \quad (i = 1, 2, 3) \ ,$$

a cada punto $M(x, y, z)$ del espacio (o de una región donde las condiciones anteriores se cumplen) corresponde por [92-16] una terna de números u_1, u_2, u_3, y recíprocamente a cada terna u_i corresponde por [92-15] un punto $M(x, y, z)$, de modo que

los u_i constituyen un sistema de coordenadas para la determinación de los puntos en el espacio. Se las llama *coordenadas curvilíneas* porque cuando dos de ellas toman valores fijos: $u_2 = u_2^0$, $u_3 = u_3^0$, al variar la otra, las ecuaciones paramétricas

[92-17] $$x = f(u_1, u_2^0, u_3^0) \quad ; \quad y = g(u_1, u_2^0, u_3^0) \quad ; \quad z = h(u_1, u_2^0, u_3^0)$$

representan una línea, en general curva, llamada *curva* u_1 (cfr. § 77-2, *a*). Análogamente se definen las demás *curvas de coordenadas*: curvas u_2 (u_3 = const., u_1 = const.) y curvas u_3 (u_1 = = const., u_2 = const.).

Dado un sistema de valores $u_i = u_i^0$, cada una de las ecuaciones [92-16] representa una superficie, las tres tienen un solo punto común, de coordenadas curvilíneas u_i^0, y dos a dos se cortan según líneas u_i, por ejemplo, las dos primeras se cortan según una línea u_3.

Nos limitaremos al caso más frecuente en las aplicaciones, en que para cada punto, las tres superficies [92-16] que pasan por él se cortan ortogonalmente, y entonces son mutuamente ortogonales las tres líneas u_i por cada punto. El elemento de arco a lo largo de cada una es $ds_i = h_i\, du_i$ donde las $h_i^2 = g_{ii}$ (cfr. § 77-2, *a*) son funciones u_1, u_2, u_3. Cuando las tres coordenadas u_i varían simultáneamente, se tiene (cfr. §§ 76-1 y 83-6, *a*):

[98-18] $$ds^2 = \Sigma\, ds_i^2 = \Sigma\, h_i^2\, du_i^2 .$$

EJEMPLOS: 1. Para las coordenadas cilíndricas r, λ, z, (§ 84-3), se tiene:

[92-19] $$x = r\cos\lambda \quad ; \quad y = r \operatorname{sen}\lambda \quad ; \quad z = z \ ,$$

y resulta:

$$dx = \cos\lambda\, dr - r\operatorname{sen}\lambda\, d\lambda \quad ; \quad dy = \operatorname{sen}\lambda\, dr + r\cos\lambda\, d\lambda \quad ; \quad dz = dz \quad ;$$

entonces:

[92-20] $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\lambda^2 + dz^2$$

y por consiguiente

[92-21] $$h_1 = h_r = 1 \quad ; \quad h_2 = h_\lambda = r \quad ; \quad h_3 = h_z = 1.$$

2. Para las coordenadas esféricas (§ 84-2): radio r, colatitud θ y longitud λ. se tiene:

[92-22] $$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\lambda \quad ; \quad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\lambda \quad ; \quad z = r\cos\theta \ ,$$

y resulta

[92-23] $$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\lambda^2 \ .$$

con lo que se tiene

[92-24] $$h_1 = h_r = 1 \quad ; \quad h_2 = h_\theta = r \quad ; \quad h_3 = h_\lambda = r\operatorname{sen}\theta .$$

b) Al variar dos de las coordenadas curvilíneas u_i, u_k entre u_i, u_k y $u_i + du_i$, $u_k + du_k$ respectivamente, permaneciendo constante la otra coordenada, se tiene un rectángulo curvo infinitésimo (fig. 317) de área:

[92-25] $$dS_{ik} = ds_i\, ds_k = h_i\, h_k\, du_i\, du_k .$$

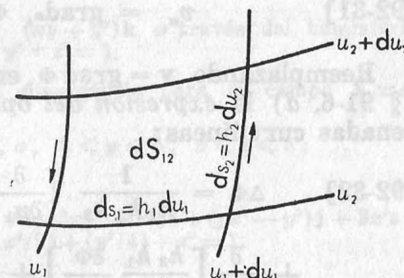


Fig. 317

Si las tres coordenadas u_i varían entre u_i y $u_i + du_i$, (i = 1,2, 3), se tiene un paralelepípedo infinitésimo de volumen:

[92-26] $$dV = ds_1\, ds_2\, ds_3 = h_1\, h_2\, h_3\, du_1\, du_2\, du_3 .$$

Aplicando a este paralelepípedo el teorema de la divergencia [92-4] y transformando el primer miembro por el teorema del valor medio del Cálculo integral, resulta, siendo M un punto del paralelepípedo y S su superficie:

[92-27] $$(\operatorname{div} \mathbf{v})_M\, h_1\, h_2\, h_3\, du_1\, du_2\, du_3 = \int\!\!\int_S v_n\, dS$$

El flujo a través de las caras perpendiculares a la línea u_1 será por [92-25]:

$$(v_{u_1}\ h_2\, h_3\, du_2\, du_3)_{u_1+du_1} - (v_{u_1}\ h_2\, h_3\, du_2\, du_3)_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2\, h_3\, v_{u_1})\, du_1\, du_2\, du_3 + o(du_1\, du_2\, du_3).$$

Reemplazando esta expresión y las dos análogas en [92-27], resulta, siendo du_1, du_2 y du_3 infinitésimos, la *expresión de la divergencia* en coordenadas curvilíneas:

[92-28] $$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2\, h_3\, v_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3\, h_1\, v_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1\, h_2\, v_{u_3})\right].$$

EJEMPLO 3. Se tiene en coordenadas cilíndricas (ejemplo 1):

[92-29] $$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_z}{\partial z} .$$

y en coordenadas esféricas (ejemplo 2):

[92-30] $$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}$$

c) Dado un escalar $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$, su **gradiente** $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\Phi$ tiene por componente en una dirección cualquiera, la derivada de Φ en esa dirección: $v_s = \operatorname{grad}_s \Phi = \partial\Phi/\partial s$, y en-

tonces las *componentes del gradiente* en coordenadas curvilíneas son:

[92-31] $$v_{u_i} = \text{grad}_{u_i}\, \Phi = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}.$$

Reemplazando $\mathbf{v} = \text{grad}\, \Phi$ en [92-28] resulta entonces (§ 91-6, *d*) la *expresión del operador* Δ *de* LAPLACE en coordenadas curvilíneas:

[92-32] $$\Delta\Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\right] + \frac{\partial}{\partial u_3}\left[\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\right]\right\}.$$

EJEMPLO 4. Se tiene en coordenadas cilíndricas (ejemplo 1):

[92-33] $$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},$$

y en coordenadas esféricas (ejemplo 2):

[92-34] $$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) +$$
$$+ \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2}.$$

d) Para obtener las componentes de rot v en coordenadas curvilíneas apliquemos el teorema de STOKES al rectángulo curvo infinitésimo de la figura 317. La circulación del campo sobre los lados donde se mantiene constante u_1 vale

$$(v_{u_2}\, ds_2)_{u_1+du_1} - (v_{u_2}\, ds_2)_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 v_{u_2})\, du_1\, du_2 + o(du_1\, du_2).$$

Análogamente, la circulación sobre las otras dos caras es un infinitésimo equivalente a

$$-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 v_{u_1})\, du_1\, du_2.$$

Dividiendo la suma de las partes principales de estos infinitésimos por el área $dS_{12} = h_1 h_2\, du_1\, du_2$ se obtiene la componente $\text{rot}_{u_3}\, \mathbf{v}$:

[92-35] $$\text{rot}_{u_3}\, \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 v_{u_2}) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 v_{u_1})\right].$$

Las otras dos componentes resultan por permutación cíclica de los sub-índices.

EJERCICIOS

1. Calcular el flujo del vector $(xy + y^2)\mathbf{k}$ a través del hemisferio $z > 0$ de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. Verificar el teorema de la divergencia para el campo $X = x$, $Y = 1$, $Z = 0$ para las regiones:

1º) Paralelepípedo $a \leqslant x \leqslant a'$, $b \leqslant y \leqslant b'$, $c \leqslant z \leqslant c'$;

2º) Esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$.

3. Calcular el flujo del vector $\mathbf{v} = (3xy^2 - x^3)\mathbf{i} + (yz^2 - y^3)\mathbf{j} + 3x^2z\,\mathbf{k}$ a través de la superficie cerrada $(x^2/9) + (y^2/4) + z^2 = 1$.

4. Evaluar

$$\int_S \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right) z\, dS$$

sobre la mitad $z > 0$ del elipsoide $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$, siendo α, β, γ los cosenos directores de la normal exterior en el punto (x, y, z).

5. Demostrar que una superficie cerrada rígida permanece en equilibrio cuando en toda su extensión actúa una presión exterior uniforme.

6. Si R es una región del espacio limitada por una superficie convexa S, mediante la descomposición

$$\iiint \frac{\partial Z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint dx\, dy \int \frac{\partial Z}{\partial z}\, dz$$

probar que

$$\iiint_R \frac{\partial Z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_S Z\, dx\, dy.$$

Deducir la fórmula de GAUSS-OSTROGRADSKI en la forma de § 92-1, nota 2, y con ello el teorema de GAUSS [92-4].

7. Un campo es *central* si la fuerza pasa por un punto fijo P (*centro*) y su magnitud y sentido sólo dependen de la distancia a P. Probar que el único campo central de centro P, continuo salvo en P y con divergencia nula salvo en P, es el campo newtoniano de una partícula en P (masa > 0 ó < 0).

8. Un campo es *axial* si la fuerza es siempre perpendicular a una recta fija (*eje*), y su magnitud y sentido dependen sólo de la distancia r a ella. Hallar la ley de la fuerza si el campo es continuo y con divergencia nula, salvo en el eje.

9. Dado el vector $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + (x^2 + xz^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{k}$, calcular el flujo de su rotor a través de la bóveda de VIVIANI. Verificar que es $\text{div rot}\, \mathbf{v} \equiv 0$.

10. 1º) Probar que un campo constante $X = Y = 0$, $Z = -g$ es conservativo, dando el potencial; 2º) Lo mismo para todo campo central (ejercicio 7); 3º) Lo mismo para todo campo axial (ejercicio 8).

§ 93. APLICACIONES FÍSICAS

1. **Campos newtonianos.** — *a) Carácter conservativo; potencial.* — El campo gravitatorio de una partícula unidad en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene en $M(x, y, z)$ las componentes:

$$[93\text{-}1] \quad P = \frac{1}{r^2}\frac{x_0 - x}{r} = \frac{x_0 - x}{r^3}\ , \quad Q = \frac{y_0 - y}{r^3}\ ,$$

$$R = \frac{z_0 - z}{r^3}\ ,$$

siendo

$$r = M_0M = [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]^{1/2}.$$

Es fácil verificar que:

$$[93\text{-}2] \quad P = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\ , \quad Q = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\ , \quad R = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\ ,$$

y entonces el campo es conservativo, con función potencial $U = 1/r$:

$$[93\text{-}3] \qquad \mathbf{f} = \operatorname{grad} U.$$

En consecuencia, son conservativos los campos gravitatorios de distribuciones de masas: sobre una curva C con densidad lineal μ, sobre una superficie S con densidad superficial σ, sobre un volumen V con densidad τ, y derivan de potenciales:

$$[93\text{-}4] \quad U = \int_C \frac{\mu}{r}\,ds \ ; \quad U = \iint_S \frac{\sigma}{r}\,dS \ ;$$

$$U = \iiint_V \frac{\tau}{r}\,dV.$$

Por [93-3] se obtiene entonces para cada una de las distribuciones anteriores la expresión del campo

$$[93\text{-}5] \quad \mathbf{f} = -\int_C \frac{\mu}{r^2}\,\mathbf{u}_r\,ds \ ; \quad \mathbf{f} = -\iint_S \frac{\sigma}{r^2}\,\mathbf{u}_r\,dS \ ;$$

$$\mathbf{f} = -\iiint_V \frac{\tau}{r^2}\,\mathbf{u}_r\,dV\ ,$$

siendo $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$ el versor en la dirección de $\mathbf{r}$.

NOTAS: 1. Para que las fórmulas [93-4] valgan en todos los campos newtonianos, cuando elementos de igual signo se atraen (como en campos gravitatorios), o se repelen (como en campos eléctricos), se suelen adoptar las siguientes convenciones:

1º) En todos los campos de fuerzas conservativos $\mathbf{f} = \operatorname{grad}\varphi$, se llama a φ *función de fuerzas*;

2º) En *campos abstractos*, el potencial es $U = \varphi$;

3º) En campos newtonianos, el potencial en M de un elemento unidad en M_0 es $U = 1/r = 1/M_0M$, y entonces:

3_1) Si elementos de igual signo se atraen, $U = \varphi$ = energía potencial con signo cambiado;

3_2) Si elementos de igual signo se repelen, $U = -\varphi$ = energía potencial.

2. La constante aditiva que entra en la definición del potencial suele fijarse en los campos newtonianos mediante una convención oportuna. Si la distribución de masas es tal que el potencial en M tiende a un límite *finito* cuando M tiende a infinito en una dirección cualquiera, se fija la constante de modo que este límite sea 0. Esto es posible en particular cuando las masas están contenidas en una región acotada del espacio.

3. Las distribuciones de masas que hemos considerado sobre una superficie S, y lo mismo los respectivos potenciales y campos, se llaman *de simple capa*, por oposición a las distribuciones *de doble capa* (nota I).

b) Carácter solenoidal fuera de las masas; ecuación de LAPLACE. En un campo gravitatorio es $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$ en los puntos del espacio no ocupado por masas. Basta observar que para el campo [93-1] de una partícula se tiene:

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x_0 - x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y_0 - y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z_0 - z}{r^3} =$$

$$= -\frac{3}{r^3} + 3\frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}{r^5} =$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Luego para el potencial de gravedad se tiene en el espacio no ocupado por masas:

$$[93\text{-}6] \qquad \operatorname{div}\mathbf{f} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0\ ,$$

o sea (§ 91-6, *d*), es U función armónica o solución de la ecuación de LAPLACE

$$[93\text{-}7] \qquad \Delta U = 0.$$

c) Integral de GAUSS. — En el campo gravitatorio de una masa m situada en un punto N, el flujo a través de una superficie S que la rodea, es igual al flujo a través de una esfera E con centro N e interior a S, pues en el espacio entre E y S es $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$. Pero si r es el radio de E y $\mathbf{n}$ la normal *exterior*, es $\mathbf{f} = (m/r^2)(-\mathbf{n})$, de modo que $f_n = -m/r^2$ y el flujo vale

$$-\frac{m}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = -4\pi m.$$

Por el carácter aditivo del flujo (respecto de la suma de vectores) y paso al límite, resulta de aquí que el flujo del campo gravitatorio de una distribución cualquiera de masa to-

tal M, a través de una superficie cerrada que la contenga en su interior, y hacia afuera, está dado por la *integral de* GAUSS:

[93-8] $$\int\int_S f_n \, dS = -4\pi M.$$

d) Punto interior a las masas. Ecuación de POISSON. — d_1) No es evidente que las conclusiones a que llegamos en *a* subsistan cuando el punto M es interior a las masas; en tal caso son impropias las integrales [93-4] y [93-5], pues los factores $1/r$ y $1/r^2$ tienden a infinito para $r \to 0$. Sin embargo, para el caso de distribuciones espaciales estas integrales son convergentes, y las conclusiones de *a*, subsisten. Más precisamente se tiene:

Las relaciones [93-3], [93-4] *y* [93-5] *correspondientes a distribuciones espaciales o en volumen subsisten cuando el punto* M *es interior a las masas, siendo tanto el potencial* U *como el campo* f *funciones continuas del punto* M *en todo el espacio.*

Esta propiedad es consecuencia del teorema 2 de § 87-2.

d_2) En el interior de un dominio V ocupado por masas de densidad τ, deja de valer la ecuación de LAPLACE [91-49]. Para todo dominio V_1, limitado por una superficie S_1, tendremos en virtud de la integral de GAUSS [93-8] y del teorema de GAUSS [92-4], observando que

$$M = \int\int\int_{V_1} \tau \, dV:$$

[93-9] $$\int\int\int_{V_1} \operatorname{div} f \, dV = -4\pi \int\int\int_{V_1} \tau \, dV.$$

Resulta de aquí por ser V_1 un dominio cualquiera: $\operatorname{div} f = -4\pi\tau$, o sea la *ecuación de* POISSON, que generaliza la de LAPLACE:

[93-10] $$\Delta U = -4\pi\tau.$$

2. **Derivadas locales y derivadas sustanciales.** — Al estudiar el movimiento de un flúido podemos considerar los valores que toma en función del tiempo una magnitud escalar w o vectorial w (por ejemplo la velocidad v) ya sea en un punto fijo del espacio (punto de vista *local* o de EULER), ya sea en una misma partícula móvil (punto de vista *molecular* o de LAGRANGE). A estos puntos de vista corresponden respectivamente los conceptos de línea de flujo y de línea de corriente. En general los problemas técnicos se presentan bajo el aspecto euleriano, por ejemplo, en las corrientes en canales interesa esencialmente el comportamiento en secciones dadas.

Entre las derivadas

$$\textit{local} \ \frac{\partial w}{\partial t} \ ; \ \text{y} \ \textit{sustancial} \ \dot{w} = \frac{dw}{dt},$$

que resultan de considerar la variación de w ya sea en un punto fijo, ya sea en una misma partícula móvil, existe la siguiente relación

[93-11] $$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} P + \frac{\partial w}{\partial y} Q + \frac{\partial w}{\partial z} R,$$

siendo P, Q, R las componentes de la velocidad v.

DEM. La partícula móvil M que en un instante t ocupa la posición $H(x, y, z)$, transcurrido un intervalo infinitésimo dt ocupará la posición $K = H + v dt$, de coordenadas $x + P dt$, $y + Q dt$, $z + R dt$. Entonces el incremento de la función $w = w(t; x, y, z)$, o sea

$$w(t + dt; x + P dt, y + Q dt, z + R dt) - w(t; x, y, z),$$

es, supuesta w diferenciable (§ 67-2) un infinitésimo equivalente a

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} P + \frac{\partial w}{\partial y} Q + \frac{\partial w}{\partial z} R\right] dt,$$

y como aquel incremento es por otra parte equivalente a $\dot{w}\, dt$, resulta [93-11].

La relación [93-11] puede escribirse también

[93-12] $$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + v \cdot \nabla w = \frac{\partial w}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} w,$$

y la análoga que resulta de [93-11] reemplazando w por un vector w puede escribirse también

[93-13] $$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbf{w},$$

indicando, como es usual, con $v \cdot \nabla w$ el producto $(\nabla w) v$ (§ 63-2) del tensor derivado ∇w (§72-4) por el vector v, o sea (cfr. [63-10]):

$$P \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + Q \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + R \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}.$$

Por ejemplo, la aceleración a de una partícula del flúido tiene, desde el punto de vista euleriano, la expresión

[93-14] $$a = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} P + \frac{\partial v}{\partial y} Q + \frac{\partial v}{\partial z} R = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v.$$

3. **Presión interior.** — *a*) Para comprender el estudio dinámico de los flúidos, vamos a investigar las propiedades de las tensiones interiores. Si M es un punto de una masa flúida

en reposo y se traza por él un plano cualquiera, éste sufre por ambas caras presiones iguales y opuestas. Consideremos en ese plano un entorno de M y dividamos por su área la resultante de las presiones que una parte del flúido ejerce sobre la otra; este cociente puede considerarse como presión media. Al tender a cero dicho entorno, se admite que este cociente tiende a un límite, el cual se llama *presión hidrostática* en el punto M, correspondiente a la orientación del plano elegido.

La propiedad característica de los líquidos perfectos sin rozamiento es el hecho experimental de la perpendicularidad de la presión al plano respectivo; y esta propiedad constituye el fundamento de la Hidrostática. En los líquidos en movimiento pueden presentarse tensiones oblicuas, pero sus componentes tangenciales se desprecian en un primer estudio, y la normal recibe el nombre de *presión hidrodinámica*.

Consideremos con vértice en M un tetraedro infinitésimo con tres caras perpendiculares a los ejes x, y, z, de áreas S_x, S_y, S_z. Sea S el área de la cuarta cara, $\mathbf{n}$ su normal exterior, y p_x, p_y, p_z, p las presiones sobre cada cara. Como condición de equilibrio del tetraedro se tiene:

$$pS\cos(\mathbf{n}, x) = p_x S_x \quad , \quad pS\cos(\mathbf{n}, y) = p_y S_y$$
$$pS\cos(\mathbf{n}, z) = p_z S_z \quad ,$$

y como por otra parte es

$$S_x = S\cos(\mathbf{n}, x) \quad ,$$
$$S_y = S\cos(\mathbf{n}, y) \quad ,$$
$$S_z = S\cos(\mathbf{n}, z) \quad ,$$

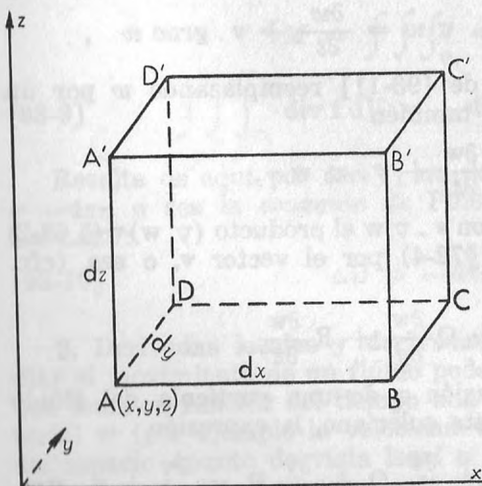


Fig. 318

resulta

[93-15] $p = p_x = p_y = p_z$

es decir: *la presión en cada punto es independiente del plano considerado.*

b) Consideremos el prisma rectangular infinitésimo de la figura 318, de caras paralelas a los planos coordenados. Las fuerzas sobre las caras perpendiculares al eje x son:

cara ADD'A': $\quad p\,dy\,dz$

cara BCC'B': $\quad -\left(p + \dfrac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz.$

Por consiguiente, la componente según x de la fuerza $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$ por unidad de volumen será $-\partial p/\partial x$, y análogamente para las otras dos, de modo que:

[93-16] $$f_1 = -\frac{\partial p}{\partial x}\ , \quad f_2 = -\frac{\partial p}{\partial y}\ , \quad f_3 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

o sea

[93-17] $$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} p \quad ,$$

es decir, el campo de fuerzas $\mathbf{f}$ es conservativo con potencial $-p$; las superficies equipotenciales son las de presión constante. En particular la superficie libre del líquido es equipotencial.

c) *Flúidos en equilibrio. Caso de flúidos pesados.* — c_1) Para que un flúido esté en reposo, las fuerzas exteriores $\mathbf{f}^*$ deben equilibrar a las fuerzas $\mathbf{f}$ provenientes de la distribución de presiones. Será entonces por [93-17]:

[93-17] $$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} p \quad ,$$

Entonces: *un flúido sólo puede estar en reposo bajo la acción de fuerzas conservativas, o sea, de un campo irrotacional. Las presiones quedan entonces determinadas por* [93-18] *a menos de una constante aditiva.*

c_2) Para un flúido de densidad ϱ bajo la acción de la gravedad es $\mathbf{f}^* = -\varrho g\mathbf{k}$, y entonces

[93-19] $$\operatorname{grad} p = -\varrho g\mathbf{k}, \quad \text{o sea:}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho g \quad .$$

siendo las superficies equipotenciales o isobáricas planos horizontales.

Si el flúido es incompresible, es decir ϱ independiente de p, lo que ocurre aproximadamente con muchos líquidos, se tiene

$$p = -\varrho g z + C.$$

Si el flúido es un gas ideal, de la ecuación $pV = nRT$, donde n es el número de moles, resulta

[93-20] $$p = \frac{\varrho}{\mu}RT$$

siendo μ el peso molecular. Reemplazando en [93-19] e integrando (§ 51-1, fórmula 2), resulta la *ley de decrecimiento esponencial de la presión con la altura z*

[93-21] $$p = p_0 e^{-(\mu g/RT)z} \quad ,$$

y de aquí, por [93-20], la ley de decrecimiento de la densidad.

4. Ecuaciones de la hidrodinámica. — *a*) Llamando $\mathbf{f}^*$ a las fuerzas exteriores por unidad de volumen, la fuerza *total* que actúa sobre el volumen infinitésimo dV será por [93-17], $(\mathbf{f}^* + \mathbf{f})\,dV = (\mathbf{f}^* - \operatorname{grad} p)\,dV$. Teniendo en cuenta la expresión [93-14] de la aceleración resulta, por la ley de NEWTON

de la Dinámica la *ecuación del movimiento* de EULER, que puede expresarse en la forma euleriana

$$[93\text{-}22] \qquad \varrho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\,.\,\nabla\,\mathbf{v}\right] = \mathbf{f}^* - \operatorname{grad} p\ ,$$

o lagrangiana

$$[93\text{-}23] \qquad \varrho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}^* - \operatorname{grad} p\,.$$

b) Busquemos ahora la condición para que el flúido que en la unidad de tiempo ha incrementado el volumen V, haya atravesado la superficie que lo limita. El incremento de masa en la unidad de tiempo es

$$\iiint_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dV\ ;$$

por otra parte, en dicha unidad de tiempo, por el elemento dS penetra el volumen $-v_n dS$ ($\mathbf{n}$ normal exterior), luego por toda la superficie atraviesa la masa

$$-\iint_S \varrho v_n\,dS\ .$$

y resulta

$$\iiint_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dV = -\iint_S \varrho v_n\,dS\ ,$$

y aplicando a la segunda integral el teorema de GAUSS [92-4]:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{v})\right] dV = 0.$$

De aquí resulta, por ser arbitrario el volumen V, la *ecuación de continuidad,* de EULER, en la forma euleriana

$$[93\text{-}24] \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{v}) = 0.$$

Si hay manantiales (sumideros) de caudal específico e (masa por unidad de tiempo y de volumen; signo — para sumidero), en el segundo miembro de [93-24] debe figurar $-e$ en lugar de 0. En general, $e = e(x, y, z, t)$, como en el caso de condensación de un gas.

De [93-12] y [91-36′] resulta la ecuación de continuidad de EULER en la forma lagrangiana

$$[93\text{-}25] \qquad \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

En un flúido incompresible es $d\varrho/dt = 0$ y por [93-25] el campo de velocidades $\mathbf{v}$ es solenoidal. Si el movimiento es además irrotacional existe un potencial U tal que $\mathbf{v} = \operatorname{grad} U$ y

resulta $\Delta U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, és decir: *En el movimiento irrotacional de un flúido incompresible, el potencial de velocidades satisface a la ecuación de* LAPLACE.

En un flúido cualquiera, si el movimiento es estacionario es $\partial\varrho/\partial t = 0$, y por [93-24] resulta solenoidal el vector $\varrho\mathbf{v}$.

c) Para las cinco magnitudes que determinan el movimiento del flúido, a saber: $\mathbf{v}$ (con tres componentes), p y ϱ, tenemos cinco ecuaciones: de movimiento (con tres componentes), de continuidad, y la ecuación de estado del líquido o gas. El *problema hidrodinámico* consiste en determinar con estas cinco ecuaciones, las cinco funciones P, Q, R, p, ϱ, de modo tal que se cumplan determinadas condiciones iniciales y de contorno, y bajo la acción de fuerzas exteriores $\mathbf{f}^*$ prefijadas.

EJERCICIOS

1. *a*) Atracción de un segmento rectilíneo homogéneo $0 \leqslant x \leqslant l$, $y = z = 0$, de densidad lineal μ, sobre una masa 1 en un punto $P(x, 0, 0)$ de la recta que lo contiene; *b*) Deducir que la atracción en P es la misma que la de toda su masa M concentrada en un punto Q (*partícula equivalente*) cuya distancia a P es igual a la media geométrica de las distancias de P a los extremos del segmento; *c*) Considerar los casos límites en que P: c_1) se acerca a un extremo del segmento; c_2) se aleja indefinidamente sobre su recta.

2. Hallar el potencial newtoniano de la varilla del ejercicio anterior; probar que es

$$U = \mu \ln \frac{\sqrt{(l-x)^2 + y^2 + z^2} + l - x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x}$$

y que puede ponerse

$$U = \frac{2M}{l} \operatorname{arg\,cotgh} \frac{r_1 + r_2}{l}$$

siendo r_1 y r_2 las distancias a los extremos de la varilla. Deducir que las superficies equipotenciales son elipsoides de revolución con sus focos en esos extremos.

3. *Interpretación newtoniana del potencial logarítmico.* — 1º) Probar que una varilla infinita (eje z) de densidad lineal constante μ atrae a una masa unitaria a distancia r de ella con una fuerza de intensidad $2\mu/r$; 2º) Los puntos del plano (x, y) son atraídos hacia el origen con una fuerza $2\mu/\sqrt{x^2 + y^2}$; probar que deriva de un potencial (*potencial logarítmico*) y hallarlo.

4. En el potencial de una varilla (ejercicio 2) en un punto P, verificar: 1º) Si P tiende a un punto de la varilla $U \to \infty$; 2º) Si la longitud tiende a infinito en ambos sentidos permaneciendo fijos P, la recta sostén y la densidad lineal μ, entonces $U \to \infty$; 3º) Observar que en este caso no se puede satisfacer la condición $U \to 0$ para $P \to \infty$, pero probar que si el potencial es primero modificado por la sustracción de una constante adecuada, digamos el valor de U en algún punto fijo a distancia 1 de la recta de acción, el potencial así alterado tiende a un límite finito al prolongar la varilla infinitamente en ambos sentidos. Probar que este

límite es $2\mu \ln(1/r)$ siendo r la distancia de P a la varilla (cfr. ejercicio 3).

5. 1º) Hallar la atracción de un arco de circunferencia de radio r y ángulo central 2α con densidad lineal μ, constante, en el centro; 2º) Probar que la partícula equivalente (ver ejercicio 1) dista $r\sqrt{\alpha/\operatorname{sen}\alpha}$ del centro.

6. 1º) Probar que una varilla circular homogénea $y^2 + z^2 = r^2$, $z = 0$, de masa M, tiene en un punto $P(x, 0, 0)$ de su eje, potencial $P = M/d$ con $d = \sqrt{r^2 + x^2}$; 2º) Hallar la fuerza y probar que existe sobre el eje una partícula equivalente (ejercicio 1) en un punto Q, hallar la distancia $D = PQ$.

7. 1º) Hallar el potencial de un disco circular homogéneo $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $z = 0$, de masa total M, en un punto $P(0, 0, z)$ de su eje y verificar: 2º) La integral para el potencial en el centro del disco es convergente; 3º) El potencial es siempre continuo en el eje; 4º) Su derivada en el sentido del eje tiene un salto $-4\pi\sigma$ en el origen.

8. 1º) Hallar directamente o utilizando el ejercicio anterior la atracción de un disco circular homogéneo de radio r, en el plano xy y con centro en el origen, sobre $P(0, 0, z)$; 2º) Límites para $z \to 0^+$, $z \to 0^-$, y valor en $P(0, 0, 0)$.

9. Utilizando el resultado del ejercicio anterior, hallar la atracción en el vértice producida por un cono circular recto homogéneo.

10. Utilizando el ejercicio 8 calcular la atracción de un cilindro macizo de densidad τ sobre un punto *exterior* de su eje [cilindro $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 < b \leqslant z \leqslant c$], sobre el punto $P \equiv O(0, 0, 0)$]; 2º) Atracción de un cilindro maciso sobre un punto *interior* de su eje; 3º) Verificar que en los dos casos anteriores la fuerza varía con continuidad al moverse el punto sobre el eje (cfr. ejercicio 1, c_1) pero la derivada respecto de la cota del punto experimenta un salto $4\pi\tau$ al entrar o salir de la masa.

11. Probar que el potencial de una esfera hueca homogénea es, en puntos exteriores, el mismo que si su masa estuviera concentrada en el centro, y en puntos interiores, constante e igual al límite del potencial en el exterior.

12. Hallar, directamente o utilizando el ejercicio anterior, la atracción de una esfera hueca homogénea $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$: 1º) En un punto $P(0. 0. a)$ fuera de la superficie $(a \neq r)$ probando que la esfera atrae a una partícula exterior como si toda su masa estuviera concentrada en su centro, y no ejercita fuerza sobre una partícula interior; 2º) En un punto $P(0, 0, r)$ de la superficie, probando que la fuerza depende sólo de la densidad superficial y no del radio.

13. Calcular la densidad media de la tierra supuesta esférica y con densidad sólo dependiente de su distancia al centro, teniendo en cuenta la definición del metro (10^{-7} del cuadrante del meridiano) y los valores en el sistema c. g. s. de la aceleración de la gravedad $g = 981\,\text{cm}\,.\,\text{sg}^{-2}$ y de la constante de gravitación $k = 6{,}66\,.\,10^{-8}$ ($F = kmM/r^2$ y entonces k es la fuerza en dinas con que se atraen dos masas de 1 g a la distancia de 1 cm).

14. Suponiendo la tierra esférica de radio R con densidad que a la distancia r del centro vale $\tau = A - Br^n$ (siendo $\tau = 2{,}2$ en la superficie y $\tau_0 = 5{,}5$ en el centro), probar que la atracción en un punto interior está dada por

$$\frac{gr}{R}\;\frac{5(n+3) - 9r^n/R^n}{5n+6} ,$$

donde g es el valor de la gravedad en la superficie. Caso en que $n = 1$.

15. Probar que en coordenadas cilíndricas (r, λ, z) (§ 84-3) considerando las componentes de la velocidad $\mathbf{v}$: v_t (*tangencial*, normal al plano meridiano), v_r (*radial*, en el meridiano y normal al eje) y v_z (*axial*, paralela al eje), la ecuación de continuidad de EULER en la forma euleriana [93-24] se escribe

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\varrho r v_r) + \frac{\partial}{\partial \lambda}(\varrho v_t) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho r v_z)\right] = 0 ,$$

v para un flúido incompresible:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\;\frac{\partial v_t}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Ejercicios sobre polinomios de LEGENDRE (Cap. XVI, nota III) *y funciones conexas, en relación con la teoría del potencial.*

16. Calculando la distancia r entre los puntos en coordenadas esféricas (§ 84-2) $P(\varrho, \lambda, \theta = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi)$, $Q(\varrho', \lambda', \theta' = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi')$ deducir del teorema del coseno de la Trigonometría plana, el teorema del coseno de la Trigonometría esférica.

17. Con las notaciones del ejercicio anterior, siendo ω el ángulo POQ, $t = \cos\omega$ y $P_n(t)$ los polinomios de LEGENDRE, probar que

$$[93\text{-}26] \quad \frac{1}{r} = P_0(t)\,\frac{1}{\varrho'} + P_1(t)\,\frac{\varrho}{\varrho'^2} + \ldots + P_n(t)\,\frac{\varrho^n}{\varrho'^{n+1}} + \ldots$$

18. Probar que cada término de [93-26]

$$H_n = H_n(x, y, z) = P_n(t)\,\varrho^n/\varrho'^{n+1}$$

es un polinomio homogéneo de grado n en las coordenadas x, y, z de P.

19. Probar que los polinomios homogéneos $H_n(x, y, z)$ (ejercicio 18) son funciones armónicas, es decir, satisfacen a la ecuación de LAPLACE. Se las llama *armónicas esféricas sólidas*, aunque esta denominación se usa a veces para toda solución homogénea de la ecuación de LAPLACE (ver § 91, ejercicio 12).

20. Por ser $H_n(x, y, z)$ homogénea de grado n en x, y, z puede ponerse en la forma

$$[93\text{-}27] \quad H_n(x, y, z) = \varrho^n Y_n(\lambda, \theta).$$

Probar que $Y_n(\lambda, \theta)$, llamada *armónica esférica de superficie* (surface spherical harmonic) de grado n, satisface a la ecuación diferencial:

$$[93\text{-}28] \quad \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2} + n(n+1)\operatorname{sen}^2\theta\,Y_n = 0.$$

21. Para $Q(0; 0; 1)$ resulta de [93-26] y [93-27] que $P_n(t)$ es una armónica esférica de superficie, independiente de λ por ser $\omega = \theta$ y entonces $t = \cos\theta$. Aplicando [93-28] a este caso, obtener la ecuación diferencial de los polinomios de LEGENDRE:

$$[93\text{-}29] \quad \frac{d}{dt}\left[(1 - t^2)\,\frac{dP_n}{dt}\right] + n(n+1)P_n = 0.$$

22. *a*) De la identidad

$$[93\text{-}30] \quad (1 - 2h\cos\omega + h^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - he^{i\omega})^{-\frac{1}{2}}(1 - he^{-i\omega})^{-\frac{1}{2}} ,$$

obtener la *expresión de los polinomios de* LEGENDRE *como polinomios trigonométricos*:

$$[93\text{-}31] \quad P_n(\cos\omega) = 2c_0c_n\cos n\omega + 2c_1c_{n-1}\cos(n-2)\omega + 2c_2c_{n-2}\cos(n-4)\omega + \ldots ,$$

siendo c_k los coeficientes del desarrollo de de $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ en serie de potencias de x; *b*) De aquí deducir que el máximo de $P_n(t)$ para $-1 \leqslant t \leqslant 1$ se alcanza en $t=1$ y entonces (Cap. XVI, nota III, *e*) es 1.

23. Probar que el potencial en $P(x, y, z)$ de una distribución de masas de densidad continua τ en un dominio D, es desarrollable en una serie de armónicas esféricas:

[93-32] $$U = \iiint_D \tau \frac{1}{r}\, dV = H_0(x, y, z) + H_1(x, y, z) + \cdots,$$

con

[93-33] $$H_n(x, y, z) = \varrho^n \iiint_D \tau \frac{P_n(t)}{\varrho'^{n+1}} \operatorname{sen}\theta'\, d\varrho'\, d\lambda'\, d\theta',$$

($t = \cos\omega$ variable en la integración), convergente en todo punto interior de la esfera con centro en el origen, supuesto exterior a D, hasta el punto más próximo de D, y uniformemente convergente en toda esfera concéntrica menor.

24. Si M es una masa uniformemente distribuída sobre la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, probar que el potencial newtoniano correspondiente es

$$U = \frac{M}{a}\left\{ P_0(\cos\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right) P_1(\cos\theta) - \frac{1.1}{2.4}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos\theta) - \cdots \right\}, \quad \text{si } r < a;$$

$$U = \frac{M}{a}\left\{ \frac{a}{r} P_0(\cos\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos\theta) - \frac{1.1}{2.4}\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{a}{r}\right)^6 P_5(\cos\theta) - \cdots \right\}, \quad \text{si } r > a.$$

25. Probar que $(z + ix\cos\alpha + iy\operatorname{sen}\alpha)^n$ es una armónica esférica sólida de grado n, y deducir de ello que $\{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\cos(\lambda - \alpha)\}^n$, ($\lambda$ = longitud, θ = colatitud), es una armónica esférica de superficie.

NOTAS AL CAPÍTULO XXIII

I. Potencial newtoniano de doble capa. — Consideremos un trozo S de superficie bilateral dada por el vector variable $\mathbf{s} = \mathbf{s}(u, v)$ definido en un dominio del plano (u, v) (§ 72-7), y tal que en todos los puntos tiene plano tangente cuyos cosenos directores varían con continuidad. Orientemos S fijando un sentido al versor normal $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v) = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$.

Para cada valor de la constante $l > 0$ consideremos la superficie S_1 dada por el vector $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1(u, v) = \mathbf{s}(u, v) + l\mathbf{n}(u, v)$, que supondremos no se corta a sí misma para l suficientemente pequeño (fig. 319).

Supongamos que sobre las superficies S y S_1 están distribuídas cargas eléctricas con densidades $\sigma = \sigma(u, v)$ y $\sigma_1 = \sigma_1(u, v)$ tales que si

dS y dS_1 son elementos de área correspondientes, sean iguales y opuestas las respectivas cargas, $\sigma_1 dS_1 = -\sigma\, dS$, lo que ocurre aproximadamente en los condensadores.

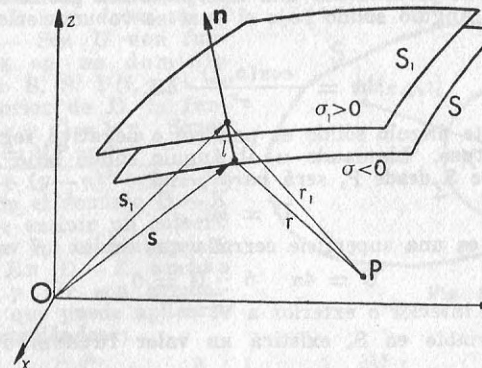


Fig. 319

El potencial de estas cargas en un punto P (fig. 319) es (§ 93-1, *a*):

[XXIII-1] $$U = \iint_S \frac{\sigma}{r} dS + \iint_{S_1} \frac{\sigma_1}{r_1} dS = \iint_S \sigma l \frac{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}}{l}\, dS.$$

Supongamos ahora que S_1 se acerca a S (es decir, $l \to 0$), pero a la vez crecen las cargas *de modo tal que el producto* $\sigma . l$ *tienda uniformemente en* S *a una función* $\mu(u, v)$; como además es

$$\lim_{l \to 0} \frac{1}{l}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

resulta en el límite el potencial

[XXIII-2] $$U = \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

llamado *potencial de doble capa*, de *momento* μ.

Para dar una forma más intuitiva a [XXIII-2] observemos que si (ξ, η, ζ) son las coordenadas cartesianas del punto variable sobre la superficie S, es

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial n} =$$
$$= -[\cos(\mathbf{r}, x)\cos(\mathbf{n}, x) + \cos(\mathbf{r}, y)\cos(\mathbf{n}, y) + \cos(\mathbf{r}, z)\cos(\mathbf{n}, z)] =$$
$$= -\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})$$

pues

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, x),$$

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\sqrt{(\xi - x)^2 + \ldots} = \frac{\xi - x}{r} = -\cos(\mathbf{r}, x); \ \ldots;$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2},$$

y [XXIII-2] toma la forma:

[XXIII-3] $$U = \iint_S \mu \frac{\cos(n, r)}{r^2} dS.$$

Esta expresión permite dar una interpretación geométrica sencilla al potencial U. El ángulo sólido bajo el cual se ve un elemento de superficie desde P es

$$d\omega = \frac{\cos(n, r)}{r^2} dS.$$

Así calculado este ángulo sólido es positivo o negativo según que (n, r) sea agudo u obtuso. Llamando ω al ángulo sólido bajo el cual se ve toda la superficie S desde P, será *para* $\mu = 1$:

[XXIII-4] $$U = \omega \; ,$$

y entonces si S es una superficie cerrada que limita un volumen V será

[XXIII-5] $$U = 4\pi \quad \text{ó} \quad U = 0$$

según que P sea interior o exterior a V.

Si μ es variable en S, existirá un valor intermedio $\bar{\mu}$ tal que $U = \bar{\mu}\,\omega$.

II. **Fórmulas de Green y consecuencias.** — *a*) Si las funciones $U = U(x, y, z)$, $V = V(x, y, z)$ tienen derivadas segundas continuas en un dominio D, que incluye su contorno S, de normal exterior $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$, aplicando el teorema de la divergencia [92-4] al vector $\mathbf{v} = U \operatorname{grad} V$, y observando [91-36′], [91-47] y que

$$(U \operatorname{grad} V).\mathbf{n} = U\left(\frac{\partial V}{\partial x} n_1 + \frac{\partial V}{\partial y} n_2 + \frac{\partial V}{\partial z} n_3\right) = U \frac{\partial V}{\partial n},$$

obtenemos la *primera fórmula de* GREEN:

[XXIII-6] $$\iiint_D [U\Delta V + \operatorname{grad} U \operatorname{grad} V]\, dx\, dy\, dz = = \iint_S U \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Restando de esta igualdad la que resulta de permutar U con V se obtiene la *segunda fórmula de* GREEN:

[XXIII-7] $$\iiint_D (U\Delta V - V\Delta U)\, dx\, dy\, dz = = \iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) dS.$$

b) *Teoremas integrales para funciones armónicas.* — *b*₁) Haciendo $V = 1$ en [XXIII-7], $V = U$ en [XXIII-6] y suponiendo *que* U *es una función armónica*, resulta

[XXIII-8] $$\left\{ \begin{aligned} &\iint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0 \\ &\iint_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS = \iiint_D (\operatorname{grad} U)^2\, dx\, dy\, dz. \end{aligned} \right.$$

De [XXIII-7] resulta también *si* U *y* V *son armónicas en el interior de S*:

[XXIII-9] $$\iint_S \left[U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right] dS = 0.$$

*b*₂) *Expresión de una función armónica en* D *por datos en el contorno* S. — Sea U una función armónica en un dominio D de contorno S. Si $P(\xi, \eta, \zeta)$ es un punto interior de D, la función $V = V(x, y, z) = 1/r$, donde $r = MP = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ es armónica en el dominio D — K que resulta de excluir un entorno esférico K de P, de contorno Σ (fig. 320). En D — K ambas funciones U y $1/r$ son armónicas, de modo que puede aplicarse [XXIII-9], obteniéndose:

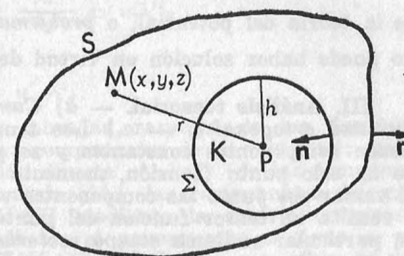


Fig. 320

[XXIII-10] $$\iint_\Sigma \left\{U \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right\} dS = = \iint_S \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right\} dS.$$

En Σ es $r = h$, $\partial/\partial h = -\partial/\partial n$ (fig. 320). El primer miembro de [XXIII-10] se transforma así, tomando coordenadas esféricas (§ 84-2) de origen P:

$$\iint_\Sigma \left\{\frac{U}{h^2} - \frac{1}{h}\frac{\partial U}{\partial n}\right\} dS = \iint_\Sigma \left\{U - h\frac{\partial U}{\partial n}\right\} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\lambda \; ,$$

y para $h \to 0$ tiende a $4\pi U_P = 4\pi U(\xi, \eta, \zeta)$, de modo que resulta por [XXIII-10] la *tercera fórmula de* GREEN:

[XXIII-11] $$U_P = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right\} dS \; ,$$

que expresa una función armónica en el interior de un dominio D mediante datos (U y $\partial U/\partial n$) sobre el contorno S.

También expresa [XXIII-11] que *toda función armónica puede expresarse como potencial newtoniano.* Más precisamente, una función armónica en un dominio D se puede expresar como *suma de potenciales newtonianos de distribuciones sobre su contorno* S, *uno de simple capa* (§ 93-1, nota 3) *de densidad*

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n}$$

y otro de doble capa (nota I) *de momento* $-U/4\pi$.

Debe advertirse sin embargo, que [XXIII-11] no implica que pueda determinarse una función armónica en D prefijando los valores de U y de $\partial U/\partial n$ en S, por ejemplo, poniendo

[XXIII-12] $$U = f(x, y, z) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial n} = g(x, y, z) \quad , \quad (x, y, z)\,\varepsilon S.$$

En efecto, con la sola condición $U = f(x, y, z)$ en S, con f continua, puede determinarse U unívocamente en D. En esto consiste el *primer problema de contorno* de la teoría del potencial, o *problema de* DIRICHLET, que tiene solución única.

También con la sola condición $\partial U/\partial n = g(x, y, z)$ en S, con g continua *y tal que* $\int\int_S g\, dS = 0$, puede U determinarse en D, a menos de una constante aditiva. En esto consiste el ***segundo problema de contorno*** de la teoría del potencial, o *problema de* NEUMANN. Si es $\int\int_S g\, dS \neq 0$ no puede haber solución en virtud de la primera [XXIII-8].

III. Análisis tensorial. — *a) **Campos tensoriales en coordenadas cartesianas ortogonales.*** — a_1) Los tensores que hemos estudiado en § 63 tienen componentes constantes y se presentan al considerar propiedades de un solo punto (tensión, momento de inercia, etc.); pero claro es que al variar ese punto las componentes varían en función de sus coordenadas y resulta un tensor función del punto, o brevemente un *campo tensorial*; en particular se llama *campo vectorial*, o *campo escalar*, en los dos casos más sencillos.

EJEMPLOS. La temperatura y la presión de un flúido en cada punto son ejemplos de campos escalares.

El campo gravitacional de centro O es vectorial; en cambio, los vectores funciones de una variable u, estudiados en § 73, no forman campo vectorial.

Desde ahora designaremos las coordenadas ortogonales con índices superiores: x^1, x^2, x^3. Indicamos asimismo con x'^1, x'^2, x'^3 las coordenadas en un nuevo sistema, también ortogonal, obtenido por rotación, y por $\lambda^i_k = \cos(x'^i, x^k)$ los cosenos de los ángulos de los ejes de uno y otro sistema (donde el índice *inferior* en λ^i_k se refiere al eje en el sistema *antiguo*). Las fórmulas de rotación [61-6] son

[XXIII-13] $$x'^i = \lambda^i_k x^k ,$$

usando una convención debida a EINSTEIN (1915) según la cual el símbolo de sumación se suprime cuando se refiere a un índice que figura una vez como subíndice y otra vez como índice superior en el término general, entendiéndose que en tal caso debe sumarse respecto de dicho índice, llamado entonces *índice mudo.* Para representar en forma semejante (es decir, usando la convención precedente que obliga a distinguir entre índices inferiores y superiores) la transformación inversa dada en § 61-1 por [61-7] debemos considerar la matriz traspuesta (§ 61-4, *a*)

$$\{\lambda'^i_k\} = \{\lambda^k_i\} = \{\cos(x'^k, x^i)\}$$

donde el índice *inferior* se refiere al eje en el sistema *nuevo*. Tendremos así:

[XXIII-14] $$x^i = \sum_{k=1}^{3} \lambda'^i_k x'^k = \lambda'^i_k x'^k.$$

a_2) *Velocidad y gradiente.* — He aquí dos ejemplos importantes de campo vectorial:

1º) Si un sólido se mueve, las coordenadas de cada punto son funciones de t; y como los coeficientes de la fórmula de rotación de ejes son constantes, se pueden derivar éstas, término a término, y por tanto las componentes v^i y v'^i de la velocidad satisfacen a la misma ley lineal [63-1] adoptada en § 63-1, *a*, como definición de vector:

[XXIII-15] $$v'^i = \frac{dx'^i}{dt} = \frac{d}{dt}(\lambda^i_k x^k) = \lambda^i_k \frac{dx^k}{dt} = \lambda^i_k v^k.$$

2º) El gradiente (§ 66-6) de un campo escalar $\Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi'(x'^1, x'^2, x'^3)$ tiene como componentes en uno y otro sistema las derivadas que indicaremos por:

[XXIII-16] $$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} , \quad u'_i = \frac{\partial \Phi'}{\partial x'^i} ,$$

y al cambiarse de ejes, resulta de [XXIII-14]:

[XXIII-17] $$u'_k = \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} = u_i \lambda'^i_k$$

y análogamente de [XXIII-13]

[XXIII-18] $$u_k = u'_i \lambda^i_k .$$

a_3) Encontramos aquí una novedad respecto de las fórmulas [XXIII-15] de transformación de las componentes de la velocidad: mientras en [XXIII-15] la transformación directa $v^k \rightarrow v'^i$ (de las componentes antiguas a las nuevas) tiene matriz $\{\lambda^i_k\}$, las componentes del gradiente se transforman por [XXIII-17] mediante la matriz traspuesta $\{\lambda'^i_k\}$. (Con nuestras notaciones sólo en el primer caso el signo = separa, como en [XXIII-13] y [XXIII-14], las letras con tilde de las otras). Para caracterizar estas distintas leyes de transformación, diremos que las u_i, u'_i constituyen las componentes en uno y otro sistema de coordenadas, de un *vector* o *tensor simple covariante*, mientras que las v^i, v'^i que se transforman como las coordenadas (y análogamente las coordenadas mismas) son las componentes de un *vector* o *tensor simple contravariante*.

a_4) *Derivación de vectores.* — Puesto que el gradiente, considerado como derivada de un campo escalar, es un campo vectorial, parece natural definir como derivada de un vector al cuadro o matriz cuyas nueve componentes sean las derivadas $a^i_k = \partial a^i / \partial x^k$ de las tres componentes a^i del vector. Vimos en § 72-4, *b*, que esta matriz tiene carácter tensorial, es decir, define un tensor doble, ***suponiendo coordenadas cartesianas ortogonales*** *.

Condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea constante. es la anulación de su tensor derivado. Pues la anulación del tensor derivado equivale a la anulación de todas las derivadas de las tres componentes.

a_{41}) *Derivada de un gradiente.* — Si el vector a es el gradiente del escalar u, las componentes son las derivadas parciales de u, que designaremos así: $a^1 = u_1$, $a^2 = u_2$, $a^3 = u_3$.

En tal hipótesis, suponiendo continuas las derivadas segundas, son iguales las derivadas cruzadas:

[XXIII-19] $$a^h_k = a^k_h = u_{hk} \equiv \partial^2 u / \partial x^h \partial x^k$$

es decir: *el tensor derivado de un gradiente es simétrico.*

Generalización. — Las 27 derivadas de las 9 componentes de una díada forman una matriz cúbica; y repitiendo el cálculo anterior, con ligeras variantes, se ve que esta matriz obedece a la ley lineal de transformación y representa, por tanto, un tensor triple o tríada, siempre con la hipótesis de coordenadas cartesianas rectangulares.

Fácil ejercicio es la repetición de la demostración anterior para cualquier número de índices, y resulta:

En coordenadas cartesianas rectangulares, las derivadas parciales de un tensor de rango r forman otro tensor de rango r + 1, llamado derivado de aquél.

a_{42}) *Divergencia.* — Este concepto, fundamental en el Cálculo vecto-

* No acontece lo mismo en coordenadas oblicuas o curvilíneas; para lograrlo es preciso introducir términos complementarios, formando así la *derivada covariante* y la *contravariante*.

rial clásico, aparece de modo muy natural y con mayor alcance en este Cálculo generalizado. En efecto,

$$\text{[XXIII-20]} \qquad \operatorname{div} \mathbf{a} = a^1{}_1 + a^2{}_2 + a^3{}_3$$

es invariante por ser el escalar dado por la contracción (§ 63-2, *d*) del tensor derivado. Si las coordenadas son oblicuas o curvilíneas, no subsiste esta propiedad invariante.

Dado un tensor doble $A = (a^{ij})$ de componentes variables, se define de dos modos el *vector divergencia.* Las componentes d_1, d_2, d_3 de éste son las sumas de derivadas:

$$d_i = a^{i1}{}_i + a^{i2}{}_i + a^{i3}{}_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3),$$

es decir: las tres componentes del vector divergencia son las sumas de las derivadas que forman cada fila del tensor respecto de la variable de igual índice, esto es, la primera componente es la suma de derivadas de la primera fila respecto de x^1, y análogamente las otras.

Derivando por columnas resulta, análogamente, otro vector divergencia del mismo tensor A. Por tanto, si éste es simétrico, sus dos divergencias coinciden.

Omitimos la demostración del carácter tensorial de la divergencia, que el lector puede hacer como ejercicio, y nos limitamos a mencionar estas importantes aplicaciones:

1ª *La divergencia del tensor de esfuerzos es igual a la fuerza unitaria en cada punto.*

2ª Si sobre cada punto de un medio continuo deformable, de densidad constante o variable ϱ, actúa la fuerza unitaria **F**, y son a_{ij} las componentes de la tensión T, funciones del punto, las tres ecuaciones clásicas de equilibrio quedan resumidas en esta sola: $\operatorname{div} \mathbf{T} = -\mathbf{F}$.

3ª Si el medio continuo está en movimiento, y es **v** la velocidad de cada punto, las tres ecuaciones del movimiento están condensadas en ésta: $\operatorname{div} \mathbf{T} = -\mathbf{F} + d\mathbf{v}/dt$.

Esta ecuación es fundamental en Elastodinámica, como la anterior lo es en Elastostática.

a_{13}) *Rotor.* — Las componentes de rot **a**, es decir, $a^2{}_3 - a^3{}_2$, $a^3{}_1 - a^1{}_3$, $a^1{}_2 - a^2{}_1$, son las componentes situadas a un lado de la diagonal en el tensor deducido del tensor derivado por la operación de restarle su conjugado.

b) *Tensores en coordenadas curvilíneas.* — b_1) *Diferenciales y derivadas.* — Análogamente a lo visto en § 92-4, *a*, para E_3, podemos definir en un espacio euclídeo E_n de *n* dimensiones (Cap. XVII, nota II) un sistema de coordenadas curvilíneas $(u^1, \ldots, n^n)$. Consideremos una transformación de coordenadas a otro sistema $(u'^1, \ldots, u'^n)$ dado por *n* funciones, continuas conjuntamente con sus derivadas parciales primeras:

$$\text{[XXIII-21]} \qquad u'^i = \lambda^i(u^1, \ldots, u^n).$$

Para que la transformación [XXIII-21] sea invertible en un cierto campo, deberá ser en él:

$$\text{[XXIII-22]} \qquad J = \frac{\partial(u'^1, \ldots, u'^n)}{\partial(u^1, \ldots, u^n)} \neq 0$$

y entonces se expresan recíprocamente:

$$\text{[XXIII-23]} \qquad u^i = \lambda'^i(u'^1, \ldots, u'^n).$$

El caso más sencillo es el estudiado en *a*, en que las coordenadas cartesianas se transforman mediante funciones *lineales de coeficientes constantes.* En cambio, la transformación dada por [XXIII-21] y [XXIII-23] no es en general lineal. Como la forma lineal de las transformaciones ha jugado un papel fundamental en *a*, parecería que el problema allí resuelto para coordenadas cartesianas se complica tanto para las coorde-

nadas generales que todos nuestros resultados serían inaplicables. Sin embargo, vamos a ver que lo dicho en a_1, a_2 y a_3 subsiste con muy leves modificaciones. Esta feliz generalización se debe al hecho siguiente: por complicadas que sean las funciones λ^i, λ'^i, las relaciones existentes *entre sus diferenciales* son *lineales*, aunque de coeficientes *no constantes*, pero para cada punto el Cálculo tensorial es el mismo ya expuesto.

1º) Poniendo

$$\text{[XXIII-24]} \qquad \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} = \lambda^i{}_k(u^1, \ldots, u^n) \quad , \quad \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} = \lambda'^i{}_k(u'^1, \ldots, u'^n) \quad ,$$

resulta de [XXIII-23] y [XXIII-21]:

$$\text{[XXIII-25]} \qquad du^i = \lambda'^i{}_k \, du'^k \quad , \quad du'^i = \lambda^i{}_k \, du^k .$$

2º) Consideremos en E_n un campo escalar

$$\Phi(u^1, \ldots, u^n) = \Phi'(u'^1, \ldots, u'^n).$$

Poniendo (cfr. a_2, 2º):

$$\text{[XXIII-26]} \qquad \Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \quad , \quad \Phi'_i = \frac{\partial \Phi'}{\partial u'^i}$$

resulta

$$\text{[XXIII-27]} \qquad \Phi_k = \sum_i \frac{\partial \Phi'}{\partial u'^i} \cdot \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} = \Phi'_i \, \lambda^i{}_k \quad ;$$

$$\Phi'_k = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \, \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} = \Phi_i \, \lambda'^i{}_k .$$

b_2) La notable similitud de [XXIII-25] y [XXIII-27] con las transformaciones vistas en a_1 y a_2, permiten repetir casi textualmente lo dicho en a_3: diremos que las Φ_i, Φ'_i constituyen las componentes en uno y otro sistema de coordenadas, de un *vector* o *tensor simple covariante*, mientras que las du^i, du'^i son las componentes de un *vector* o *tensor simple contravariante.*

Es claro que en este caso las dos matrices de coeficientes $\{\lambda^i{}_k\}$, $\{\lambda'^i{}_k\}$, no sólo tienen elementos variables, sino que no son traspuestas ni guardan relación sencilla.

b_3) ¿Debemos concluir que hay dos tipos de vectores, unos covariantes y otros contravariantes? Adoptando coordenadas cartesianas ortogonales la distinción entre las dos leyes de transformación es sólo aparente, pues, por ejemplo, permutando en [XXIII-17] los índices *i*, *k* y comparando con [XXIII-15] se ve que las transformaciones $v^k \to v'^i$ y $\Phi_k \to \Phi'_i$ tienen la misma matriz, pues $\lambda'^k{}_i = \lambda^i{}_k$. Esto indica ya que la diversidad de tipos de vectores se refiere a las coordenadas y no a los entes en sí mismos. En efecto, todo vector puede darse, como ahora veremos, por sus componentes covariantes o contravariantes, y lo mismo los tensores de rango más elevado que pueden definirse por sus leyes de transformación, que generalizan las [XXIII-25] y [XXIII-27]; por ejemplo, un tensor $(1 + 2)$-ple = triple, contravariante respecto de un índice y covariante respecto de dos índices, será un ente asociado a $n^{1+2} = n^3$ componentes en cada sistema de coordenadas, y tal que llamando $T^i{}_{jk}$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$ a las componentes respecto de las coordenadas u^i y $T'^r{}_{st}$ a las componentes respecto de las coordenadas u'^i, vale la ley de transformación:

$$\text{[XXIII-28]} \qquad T'^r{}_{st} = T^i{}_{jk} \, \lambda^r{}_i \, \lambda'^j{}_s \, \lambda'^k{}_t .$$

En la misma forma vista en § 63-2, *e*, para tensores en coordenadas cartesianas ortogonales en E_3, pueden engendrarse tensores de rango tan alto como se quiera, partiendo de los vectores mediante el producto tensorial.

La operación de *producto tensorial* de vectores (§ 63-2, *e*) se generaliza obviamente a tensores de rangos cualesquiera. Finalmente, tomando como tensor fundamental el g_{ik} formado por los coeficientes de la primera forma fundamental de E_n: $ds^2 = g_{ik}\, du^i\, du^k$, la composición o producto tensorial de un vector contravariante por él, combinada con la operación de contracción o saturación de índices (§ 63-2, *d*) da como resultado un vector covariante. Convendremos en que ambos vectores son uno mismo, dado por sus *componentes contravariantes* o por sus *componentes covariantes*:

[XXIII-29] $$g_{ik}\, v^k = v_i.$$

Análogas convenciones se adoptan para tensores de rango mayor.

IV. Formas diferenciales exteriores y teorema de Stokes. — *a*) *Cálculo de* GRASSMANN-CARTAN *en* E_2. — Retomando las consideraciones de § 88-5, *c*, y notas 1 y 2, consideremos, cambiando las notaciones por otras más aptas para lo que sigue, la fórmula de cambio de variables en una integral doble (§ 83-4):

[XXIII-30] $$\iint_A du^1\, du^2 = \iint_{A'} \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(x^1, x^2)}\, dx^1\, dx^2 \ ,$$

para la transformación biunívoca $u^i = u^i(x^1, x^2)$ de A′ en A. Si la simbolizamos por

[XXIII-31] $$du^1\, du^2 = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(x^1, x^2)}\, dx^1\, dx^2 \ ,$$

las igualdades

$$\partial(u^1, u^2)/\partial(x^1, x^2) = -\,\partial(u^2, u^1)/\partial(x^1, x^2) = -\,\partial(u^1, u^2)/\partial(x^2, x^1)$$

conducen a las expresiones simbólicas:

[XXIII-32] $$du^1\, du^2 = -\, du^2\, du^1 \quad , \quad dx^1\, dx^2 = -\, dx^2\, dx^1.$$

Definamos ahora las *formas diferenciales* en $E_2(x^1, x^2)$: las de *grado cero* o *escalares* serán las funciones $\alpha_0 = a(x^1, x^2)$, las de *grado uno* o *pfaffianos*, las expresiones de la forma

[XXIII-33] $$\alpha_1 = a_1(x^1, x^2)\, dx^1 + a_2(x^1, x^2)\, dx^2 \ ,$$

y las de *grado dos*, de la forma

$$\alpha_2 = a(x^1, x^2)\, dx^1\, dx^2 = -\, a(x^1, x^2)\, dx^2\, dx^1.$$

Dotaremos al conjunto de estas formas diferenciales de una estructura algebraica (llamada *álgebra exterior* en E_2) definiendo la *suma* de formas diferenciales de igual grado mediante la suma de coeficientes homólogos, o coeficientes de iguales diferenciales, por ejemplo la suma de [XXIII-33] y $\beta_1 = b_1\, dx^1 + b_2\, dx^2$ será

$$\alpha_1 + \beta_1 = (a_1 + b_1)\, dx^1 + (a_2 + b_2)\, dx^2 \ ,$$

y el *producto exterior* Λ con el convenio de que debe operar en forma asociativa, distributiva respecto de la suma, conmutativa con escalares, estar sujeto a las reglas (que completan la segunda [XXIII-32]):

[XXIV-34] $$dx^1 \Lambda\, dx^2 = -\, dx^2 \Lambda\, dx^1 \quad ; \quad dx^1 \Lambda\, dx^1 = dx^2 \Lambda\, dx^2 = 0 \ ,$$

y finalmente la convención de que la foma α_2 es

$$\alpha_2 = a(x^1, x^2)\, dx^1 \Lambda\, dx^2.$$

Con estas reglas el producto exterior de las *formas diferenciales exactas de grado uno o diferenciales de escalares*:

[XXIII-35] $$du^1 = \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\, dx^2 \quad , \quad du^2 = \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\, dx^2 \ ,$$

verifican [XXIII-31] y la primera [XXIII-32], pues:

$$du^1 \Lambda\, du^2 = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\, dx^2\right) \Lambda \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\, dx^2\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1}\frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\frac{\partial u^2}{\partial x^1}\right) dx^1 \Lambda\, dx^2 =$$
$$= \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(x^1, x^2)}\, dx^1 \Lambda\, dx^2 = -\, du^2 \Lambda\, du^1.$$

Definidos los diferenciales de escalares por [XXIII-35] se define el *diferencial exterior* de una forma diferencial aplicando el operador d a sus coeficientes escalares y considerando el resultado como un factor en el producto exterior, por ejemplo para [XXIII-33], será:

[XXIII-36] $$d\alpha_1 = da_1 \Lambda\, dx^1 + da_2 \Lambda\, dx^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial a_i}{\partial x^k}\, dx^k\right) \Lambda\, dx^i = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \Lambda\, dx^2.$$

Si es α una forma diferencial no nula de grado 0, 1, 2 es respectivamente $d\alpha$ de grados 1, 2 (o nula), nula; y como aplicando [XXIII-36] con $\alpha\, du^1$ dada por [XXIII-35] resulta

$$d(du^1) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial u^1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial u^1}{\partial x^1}\right) dx^1 \Lambda\, dx^2 = 0 \ ,$$

se tiene en E_2 para toda forma diferencial:

[XXIII-37] $$d(d\alpha) = 0.$$

Recíprocamente, teniendo presente que una forma idénticamente nula o bien de grado dos es diferencial de otra (respectivamente nula o con un coeficiente nulo) se ve considerando los grados posibles de la forma diferencial β que:

[XXIII-38] $$\textit{Si} \quad d\beta = 0 \quad \textit{es} \quad \beta = d\alpha.$$

Una forma β con diferencial exterior nulo se llama *integrable*; entonces por [XXIII-37] y [XXIII-38] *una forma es integrable si y sólo si es diferencial exterior de otra forma.*

b) *Fórmula de* STOKES *en* E_2. — Indicando con CA_2 el contorno de un recinto orientado A_2 de E_2, orientado a su vez como vimos en § 88-5, *a*, la fórmula de STOKES en el plano o fórmula de RIEMANN (§ 88-6):

$$\iint_{A_2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right) dx^1\, dx^2 = \int_{CA_2} a_1\, dx^1 + a_2\, dx^2 \ ,$$

puede escribirse en virtud de [XXIII-33] y [XXIII-36] en la siguiente forma, generalizable a un espacio euclídeo cualquiera E_n como indicaremos en c_2:

[XXIII-39] $$\iint_{A_2} d\alpha_1 = \int_{CA_2} \alpha_1.$$

c) *Extensión a* E_n. — El cálculo de formas diferenciales (visto en *a* para E_2) fué introducido por H. GRASSMANN (citado en Cap. XVII, nota V, 1) y desarrollado en forma mucho más general y elaborada por E. CARTAN. Luego fué generalizado para variedades de *n* dimensiones por E. CARTAN, H. CARTAN, S. BOCHNER, W. V. D. HODGE, G. DE RHAM, K. KODAIRA, etc. (ver nota V, 8). En lo que sigue señalaremos sucintamente la generalización de lo visto en *a* y *b* al caso especial de variedades euclídeas E_n.

c_1) Si a partir de un punto P de E_n, de coordenadas (Cap. XVII,

nota III, a) $(x^1, \ldots, x^n)$ en el sistema $\{O; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, se consideran r vectores infinitésimos

$$[\text{XXIII-40}] \quad d\mathbf{x}_{(h)} = dx^1{}_{(h)}\mathbf{e}_1 + \ldots + dx^n{}_{(h)}\mathbf{e}_n \quad , \quad (h = 1, \ldots, r) \quad ,$$

linealmente independientes aplicados a P, forman un paralelepípedo r-dimensional (para $r = 1, 2, 3$; segmento, rectángulo, paralelepípedo) del cual son aristas concurrentes y que determina unívocamente un espacio euclídeo $\mathbf{E}_r$ que lo contiene.

Para que sean linealmente independientes los vectores [XXIII-40] debe ser r la característica de la matriz

$$[\text{XXIII-41}] \qquad D = \left\{ \begin{matrix} dx^1{}_{(1)} & dx^2{}_{(1)} & \ldots & dx^n{}_{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ dx^1{}_{(r)} & dx^2{}_{(r)} & \ldots & dx^n{}_{(r)} \end{matrix} \right\}$$

es decir, debe ser $\neq 0$ por lo menos uno de los determinantes de orden máximo r, extraídos de ella. Estos determinantes, incluídos los de columnas repetidas [en total n^r, número de variaciones con repetición (§ 11-1, nota 2) $h_1, \ldots, h_r$ de los n índices superiores $1, \ldots, n$ de r en r] se llaman *diferenciales de grado* r, indicados por

$$d(x^{h_1}, \ldots, x^{h_r})$$

y *son los elementos de un tensor* llamado *tensor* r*-diferencial*, indicado por

$$[d(x^{h_1}, \ldots, x^{h_r})].$$

En efecto, para una rotación de ejes en $\mathbf{E}_r$,

$$x^i{}_{(j)} = \sum_{k=1}^{r} \lambda'^i{}_k \, x'^k{}_{(j)}$$

(cfr. [XXIII-14]), tendremos por la linealidad de un determinante respecto de cada una de sus líneas (§ 13-3), y usando la convención de EINSTEIN (nota III, a_1):

$$[\text{XXIII-42}] \quad d(x^{h_1}, \ldots, x^{h_r}) = \lambda'^{h_1}{}_{k_1} \ldots \lambda'^{h_r}{}_{k_r} \, d(x^{k_1}, \ldots, x^{k_r}) \quad ,$$

lo que demuestra (nota III, b_2) el mencionado carácter tensorial.

Definida una *forma diferencial de grado* r en $\mathbf{E}_n$ como combinación lineal de los elementos de un tensor r-diferencial, con coeficientes funciones de $(x^1, \ldots, x^n)$:

$$[\text{XXIII-43}] \quad \alpha_r = \sum_{h_1, \ldots, h_r = 1}^{n} a_{h_1, \ldots, h_r} \, d(x^{h_1}, \ldots, x^{h_r}) \quad ,$$

dotemos al conjunto de las formas diferenciales en $\mathbf{E}_n$ de una estructura algebraica (llamada *álgebra exterior* en $\mathbf{E}_n$) definiendo la *suma* de formas diferenciales de igual grado [XXIII-43] y β_r de coeficientes

$$b_{h_1, \ldots, h_r}(x^1, \ldots, x^n)$$

por

$$[\text{XXIII-44}] \quad \alpha_r + \beta_r = \sum_{h_1, \ldots, h_r = 1}^{n} (a_{h_1, \ldots, h_r} + b_{h_1, \ldots, h_r}) \, d(x^{h_1}, \ldots, x^{h_r}) \quad ,$$

y el *producto exterior* Λ de α_r y

$$[\text{XXIII-45}] \quad \gamma_s = \sum_{k_1, \ldots, k_s = 1}^{n} c_{k_1, \ldots, k_s}(x^1, \ldots, x^n) \, d(x^{k_1}, \ldots, x^{k_s})$$

por

$$[\text{XXIII-46}] \quad \alpha_r \Lambda \gamma_s = \sum_{h, k = 1}^{n} a_{h_1, \ldots, h_r} \, c_{k_1, \ldots, k_s} \, d(x^{h_1}, \ldots, x^{h_r}, x^{k_1}, \ldots, x^{k_s}).$$

Esta operación es asociativa y distributiva respecto de la suma de formas, y con ella un diferencial de grado r se expresa como producto exterior de diferenciales de grado 1 por

$$[\text{XXIII-47}] \quad d(x^{h_1}, \ldots, x^{h_r}) = dx^{h_1} \Lambda \ldots \Lambda dx^{h_r} .$$

De la definición de determinante (§ 13-3) sigue que dos diferenciales de grado r cuyos índices $h_1, \ldots, h_r$ difieren sólo por su orden, son iguales u opuestos según que la permutación (§ 11-2) de índices sea par o impar, propiedad que expresaremos diciendo que el tensor

$$d(x^{h_1}, \ldots, x^{h_r})$$

es *completamente antisimétrico*, y que por [XXIII-47] generaliza [XXIII-34].

Definidos los *diferenciales de escalares* análogamente a [XXIII-35] por

$$da(x^1, \ldots, x^n) = \Sigma_k (\partial a / \partial x^k) \, dx^k$$

se define el *diferencial exterior de una forma* aplicando el operador d a sus coeficientes escalares y considerando el resultado como un factor en el producto exterior, por ejemplo para [XXIII-43] será:

$$[\text{XXIII-48}] \quad d\alpha_r = \sum_{h_i = 1}^{n} da_{h_1, \ldots h_r}(x^1, \ldots, x^n) \Lambda d(x^{h_1}, \ldots, x^{h_r}) =$$

$$= \sum_{h_i, k = 1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^k} \, d(x^k, x^{h_1}, \ldots, x^{h_r}).$$

Sigue de aquí:

$$[\text{XXIII-49}] \quad d(d\alpha_r) = \sum_{h_i, k, j = 1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \, \partial x^j} \, d(x^j, x^k, x^{h_1}, \ldots, x^{h_r}) = 0 \quad ,$$

pues al permutar j con k se obtienen pares de términos opuestos. Esta propiedad generaliza [XXIII-37] para $\mathbf{E}_n$. También se demuestra que vale en $\mathbf{E}_n$ la propiedad [XXIII-38], y, entonces, llamando *integrable* a una forma con diferencial exterior nulo resulta: *Una forma diferencial es integrable si y sólo si es diferencial exterior de otra forma.*

c_2) También puede demostrarse que [XXIII-39] admite la siguiente generalización (*fórmula de* STOKES en $\mathbf{E}_n$):

$$[\text{XXIII-50}] \qquad \int\int \ldots \int_{A_n} d\alpha_{n-1} = \int \ldots \int_{CA_n} \alpha_{n-1}$$

donde CA_n es el contorno del recinto orientado A_n, que a su vez debe considerarse con una orientación adecuada, "inducida" por la de A_n de una manera que no entraremos a discutir en este caso general. Para $n = 3$ [XXIII-50] da la fórmula de GAUSS-OSTROGRADSKI (§ 92-1, nota 2), pues si $\alpha_{n-1} = \alpha_2 = X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy$ resulta

$$d\alpha_2 = \left(\frac{\partial X}{\partial x} dx + \ldots\right) dy\,dz + \left(\ldots + \frac{\partial Y}{\partial y} dy + \ldots\right) dz\,dx +$$

$$+ \left(\ldots + \frac{\partial Z}{\partial z} dz\right) dx\,dy = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \quad ,$$

donde en el segundo miembro sólo se han escrito los términos que no se anulan por no tener diferenciales repetidos.

V. Bibliografía. — 1. Sobre integrales curvilíneas e integración de diferenciales exactas contienen adecuadas exposiciones muchos textos y tratados generales de Análisis matemático, como los de REY PASTOR, COU-

RANT, DE LA VALLÉE POUSSIN y VALIRON (citados en Cap. VI, nota VI) y SEVERI (citado en Cap. IV, nota III, 1).

2. En relación con las integrales de superficie se presenta el problema topológico de la orientabilidad y bilateralidad de superficies sobre el que pueden consultarse algunas de las obras citadas en Cap. XVIII, nota III, 4, en especial HILBERT y COHN-VOSSEN para una introducción elemental, y SEIFERT y THRELFALL para un estudio profundo del tema.

3. La mayor parte de las obras citadas en la bibliografía sobre Álgebra vectorial (Cap. XVII, nota V, 2) se refieren también al Análisis vectorial; entre ellas pueden destacarse las de BRICARD, GANS, PHILLIPS, SCHMIDT, BRAND y OLLENDORF, todas ellas con aplicaciones geométricas y físicas, y la de MONTEIRO DE CAMARGO con aplicaciones geométricas.

Introducciones elementales con aplicaciones variadas son las siguientes, de las cuales la primera es traducción del inglés:

D. E. RUTHERFORD: *Métodos vectoriales aplicados a la Geometría diferencial, a la Mecánica y a la Teoría del potencial* (Dossat, Madrid-Buenos Aires, sin fecha);

B. HAGUE: *An introduction to vector analysis for physicists and engineers* (Methuen, Londres; 4ª ed., 1950);

W. SCHLEGELMILCH: *Die Differentialoperationen der Vektoranalysis und ihre Bedeutung in Physik und Technik* (Verlag Technik, Berlín, 1954).

Dan una estimulante y lúcida introducción general al Análisis vectorial los capítulos II (Fields of force) y III (The potential) de la valiosa obra de carácter más especial y elevado:

O. D. KELLOGG: *Foundations of potential theory* (Springer, Berlín, 1929; reimpreso por Ungar, Nueva York).

Trata con mucha extensión el Análisis vectorial la obra de gran amplitud de contenido aunque sin mucha profundidad sobre los instrumentos matemáticos de aplicación en diversas ramas de la Física:

P. M. MORSE y H. FESHBACH: *Methods of theoretical physics* (2 vols., McGraw-Hill, Nueva York, 1953).

4. Sobre campos newtonianos y teoría del potencial pueden verse los libros de BRICARD, PHILLIPS, BRAND (citados en Cap. XVII, nota V, 2), RUTHERFORD (citado en 3) y más especialmente la obra de KELLOGG (citada en 3) y la más elemental de

W. J. STERNBERG y T. L. SMITH: *The theory of potential and spherical harmonics* (Univ. of Toronto Press, 1946).

Muy especializado y de orientación moderna es:

M. BRÉLOT: *Éléments de la théorie classique du potentiel* (Centre de Documentation Universitaire; París, 1959).

5. Aplicaciones a la hidrodinámica se encuentran en las obras de BRICARD, GANS, BRAND (citadas en Cap. XVII, nota V, 2), RUTHERFORD (citada en 3).

También pueden consultarse las siguientes obras, de las cuales la primera da en su volumen II una introducción general a la cinemática y mecánica de sistemas continuos, la segunda da una exposición sucinta con aplicaciones técnicas, problemas resueltos y ejercicios y las otras dos son mucho más amplias y de nivel más elevado:

T. LEVI-CIVITA y U. AMALDI: *Compendio di Meccanica razionale. I. Cinematica, Principi e Statica. II. Dinamica. Cenni di Meccanica dei sistemi continui* (Zanichelli, Bolonia; 2ª ed., 1948).

A. FOCH: *Introduction à la mécanique des fluides* (Colin, Paris; 4ª ed., 1952).

H. LAMB: *Hydrodynamics* (Cambridge Univ. Press; 5ª ed., 1924; Dover, Nueva York; 6ª ed.).

L. M. MILNE-THOMSON: *Theoretical Hydrodynamics* (Macmillan, Nueva York; 3ª ed., 1956; hay traducción española: *Tratado de Hidrodinámica teórica*; Aguilar, Madrid, 1951).

Sobre la Mecánica de los medios continuos, conteniendo como parte II una exposición clásica de la teoría lineal de la elasticidad y como parte III un moderno enfoque de la teoría de flúidos, está la obra que, aunque con enunciados en ocasiones no muy precisos, contiene una muy acertada selección de material de texto y ejemplos, y gran número de valiosos apéndices en cada uno de sus dos tomos:

M. ROY: *Mécanique des milieux continus et déformables* (vols. I y II; Gauthier-Villars, Paris, 1950).

6. Sobre funciones armónicas esféricas y armónicas esféricas de superficie (§ 93, ejercicios 19 y 20) puede consultarse la siguiente obra, que puede considerarse a la vez como un texto sobre funciones especiales y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales de la Física matemática:

T. M. MAC ROBERT: *Spherical harmonics. An elementary treatise on harmonic functions with applications* (2ª ed., Methuen, Londres, 1947; Dover, Nueva York, 1948).

Excelente obra que da una presentación detallada de la teoría de las funciones de LEGENDRE y sus aplicaciones más importantes, en forma rigurosa y nivel relativamente elemental, es:

J. LENSE: *Kugelfunktionen* (Akademische Verlag., Leipzig.; 2ª ed., 1954).

Tratado más completo, adecuado para un estudio más detenido o para referencia y consulta, es:

E. W. HOBSON: *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics* (Univ. Cambridge, 1931; reimpr., Chelsea, Nueva York, 1955).

7. Sobre análisis tensorial están las obras de BRAND y OLLENDORF (citadas en Cap. XVII, nota V, 2), y las citadas en Cap. XVII, nota V, 5; entre éstas, da una discusión estimulante de las aplicaciones del Análisis tensorial a la teoría del potencial y a la Geometría de RIEMANN, adecuada para estudiantes adelantados, el volumen II de la obra de DUSCHEK y HOCHRAINER, y desarrolla el Álgebra de los tensores (definidos como elementos del producto de varios espacios vectoriales) para pasar al Análisis tensorial en coordenadas curvilíneas en espacios euclídianos, espacios de RIEMANN, y aplicaciones a la Mecánica clásica y relativista, la obra de LICHNEROWICZ.

Exposición concisa y lúcida del Análisis tensorial en relación con las propiedades elementales de los espacios de RIEMANN, es:

B. SPAIN: *Tensor calculus* (Oliver and Boyd, Edimburgo y Londres, 1953).

Aplicaciones de los tensores a la Mecánica clásica y ondulatoria, a la teoría de la elasticidad y vibración de cristales, ondas en flúidos, presión de radiación, etc., terminando con una exposición de la teoría cuántica de los sólidos, da la obra adecuada para famliiarizar a los físicos con el Análisis tensorial y mostrar su valor como instrumento:

L. BRILLOUIN: *Les tenseurs en Mécanique et en Élasticité* (Masson, Paris; 2ª ed., 1949).

8. Introducción muy breve al Álgebra de las formas exteriores da LICHNEROWICZ (citado en Cap. XVII, nota V, 5); una exposición más amplia y muy adecuada da el capítulo III (GRASSMANN Algebra) de la valiosa obra de orientación moderna:

J. M. THOMAS: *Differential systems* (American Math. Soc., Nueva York, 1937).

Estudio profundo, con contribuciones originales y diversas aplicaciones a la Geometría diferencial en su segunda parte, se encuentra en

E. CARTAN: *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Hermann, Paris, 1945).

El Cálculo exterior en E_n, con demostración del teorema generalizado de STOKES y consecuencias del mismo se encuentra en la excelente obra, escrita en forma muy condensada:

W. V. D. HODGE: *The theory and applications of harmonic integrals* (Cambridge Univ. Press, 2ª ed., 1952); trad. alemana *Theorie und Anwendungen harmonischer Integrale* (Teubner, Leipzig, 1958).

Al álgebra de las formas exteriores, con tratamiento en términos del Cálculo tensorial clásico, se refiere la obra siguiente, cuyo 2º volumen tratará cuestiones de Análisis:

W. SLEBODZINSKI: *Formes extérieurs et leurs applications* (Monografje Matematyczne, Varsovia; vol. I, 1954).

RESPUESTAS A EJERCICIOS

§ 60. Pág. 13.

Que sean paralelos (o sea dos a dos linealmente dependientes) los vectores **a**, **b**, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$.

§ 60. Pág. 14.

Que sean coplanares (o sea tres a tres linealmente dependientes) los vectores **a**, **b**, **c**, **d**, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$. Para ello es necesario y suficiente que, por ejemplo, sean coplanares los vectores de cada una de las ternas $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$; $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$; $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$.

§ 60. Pág. 15.

$\mathbf{m} \parallel \mathbf{n} \perp \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$.

§ 60. Pág. 21.

1. $A - B = OA - OB$, etc.
2. 1º) $-\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $+\sqrt{6}$; 2º) $\sqrt{24}$; $(2, 4, -2)$.
3. $\sqrt{24}$; $(2, 4, -2)$; la recta r del ejercicio anterior en el sentido de 2º).
4. La condición equivale a $(\alpha + \beta + \gamma)\mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$, $[\beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}) + \delta(\mathbf{d} - \mathbf{a}) = 0]$.
5. $39a_1 + 15a_2 - 9a_3 = 0$; $(39, 15, -9)$ son parámetros directores de la normal al plano **bc**.
6. $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{s} = 10\mathbf{i} - 20\mathbf{j}$, $\mathbf{t} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$. Se estudia y compara la característica de la matriz formada por los parámetros de las direcciones dadas con la orlada por las coordenadas de **a**. (Cfr. § 15-5).
8. Construído un triángulo con **a**, **b** y $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, fórmese la norma de **c**.
9. $\mathbf{c} = (\mathbf{a} . \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{a} . \mathbf{a})\mathbf{b}$; ver Cap. XVII, nota II, c_1.
10. Demuéstrese la identidad $AB . CD + AC . DB + AD . BC = 0$, tomando un punto O y poniendo $AB = OB - OA$, etc.
12. 1º) La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo, es igual a la suma de los cuadrados de sus cuatro lados. 2º) El paralelogramo de lados paralelos e iguales a las diagonales de un paralelogramo, tiene área doble que éste.
13. Poniendo $AB = \mathbf{b}$, $AC = \mathbf{c}$, $AD = \mathbf{d}$, resulta de la identidad $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} + \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{d})$.
14. 1º) $\mathbf{x} = \mathbf{b} + m\mathbf{a}$, m escalar arbitrario; 2º) $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{a}$, **w** vector arbitrario; 3º) $\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
15. Aplíquese la regla de CRAMER (§ 15-4).
16. $\mathbf{e}^1 = \lambda(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)$; $1 = \mathbf{e}^1 . \mathbf{e}_1 = \lambda(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) . \mathbf{e}_1 = \lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$;

$$\| \mathbf{e}_r . \mathbf{e}^s \| = 1; \quad \mathbf{e}^1 = \frac{8}{45}\mathbf{i} + \frac{4}{45}\mathbf{j} + \frac{1}{9}\mathbf{k};$$

$$\mathbf{e}^2 = -\frac{19}{90}\mathbf{i} + \frac{13}{90}\mathbf{j} + \frac{1}{18}\mathbf{k};$$

$\mathbf{e}^3 = -\frac{2}{9}\,\mathbf{i} - \frac{1}{9}\,\mathbf{j} + \frac{1}{9}\,\mathbf{k}.$

17. Base ortonormal.
18. $(u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3)\,.\,\mathbf{e}^i = u^i\mathbf{e}_i\,.\,\mathbf{e}^i = u^i$;
$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = (\Sigma u^i\mathbf{e}_i)(\Sigma v_i\mathbf{e}^i) = \Sigma u^i v_i$.
19. $\mathbf{u} = 180\mathbf{e}^1 - 80\mathbf{e}^2 + 157\mathbf{e}^3 = 14\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 33\mathbf{k}$;
$\mathbf{v} = 30\mathbf{e}^1 + 60\mathbf{e}^2 - 69\mathbf{e}^3 = 8\mathbf{i} + 19\mathbf{j} - \mathbf{k}$;
$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = 5\,.\,30 - 3\,.\,60 - 2\,.\,69 = 180\,.\,3 - 80\,.\,1 - 157\,.\,4 =$
$= 14\,.\,8 - 13\,.\,19 - 33\,.\,1 = -168$;

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) =$$
$= (10\mathbf{e}^1 + 26\mathbf{e}^2 + 14\mathbf{e}^3)\,.\,90 = -614\mathbf{i} + 278\mathbf{j} + 370\mathbf{k}.$

20. $$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\,.\,\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} .\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) =$$
$$= \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 26\,.\,90 = 2340;$$
$\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 39\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$;
$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\,.\,\mathbf{w} = -614\,.\,3 + 278\,.\,39 - 370\,.\,18 = 2340.$
21. *c*) Ambos miembros se multiplican escalarmente por **v**, aplicando [60-33].
22. *a*) $[\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})]_x = a_2(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})_z - a_3(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})_y = a_2(b_1c_2 - b_2c_1) -$
$- a_3(b_3c_1 - b_1c_3) = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_1 -$
$- (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_1$, etc.;
b) Resultan nulos los coeficientes de **u**, **v** y **w**.
23. $(\mathbf{w}\,.\,\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,.\,\mathbf{w})\mathbf{u} = (\mathbf{w}\,.\,\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v})\mathbf{w}$: algún factor nulo o bien **u** y **w** paralelos o bien **v** perpendicular al plano **uw**.
24. $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\,.\,(\mathbf{u}'\wedge\mathbf{v}') = [(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{u}']\,.\,\mathbf{v}' =$
$= [(\mathbf{u}'\,.\,\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{u}'\,.\,\mathbf{v})\mathbf{u}]\,.\,\mathbf{v}' = (\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}')(\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v}') - (\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}')(\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u}')$.
28. Los productos $(\mathrm{OA}\wedge\mathrm{OB})\wedge(\mathrm{OC}\wedge\mathrm{OA})$ y $(\mathrm{OA}\wedge\mathrm{OB})\wedge(\mathrm{OC}\wedge\mathrm{OB})$ resultan de igual módulo. Igualando éstos resulta $\operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \mathrm{A} = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \mathrm{B}$.
29. *a*) $(x - 3)/3 = (y + 2)/(-1) = z - 1$;
b) $x + 3y + 2z = 8$; *c*) $x + 3y + 2z = \pm\, 2\sqrt{14}$.
30. 60°.
31. (1, 5, 1).
33. $\Sigma m_i\mathbf{g}\wedge\mathrm{MA}_i = (\Sigma m_i\mathbf{g})\wedge\mathrm{MG} + \mathbf{g}\wedge\Sigma m_i\mathrm{GA}_i = \mathbf{f}\wedge\mathrm{MG}$.
34. Las medianas de un triángulo ABC concurren a un punto, baricentro (ejercicio 32) del sistema de los vértices, con masas iguales.
35. Pruébese que si $\mathrm{OA}\wedge\mathbf{u} = \mathrm{OA}'\wedge\mathbf{u}$ es AA′ paralelo a **u**, luego tómese $\mathrm{OA} = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{m})/u^2$.

§ 61. Pág. 36.

1. $2x_1 = (1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})x_1' - x_2' - (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})x_3'$;
$2x_2 = x_1' + \sqrt{2}\,x_2' + x_3'$;
$2x_3 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1)x_1' - x_2' + (\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 1)x_3'$.
2. Pasar de un sistema a otro mediante las tres rotaciones alrededor de ejes, y expresables mediante [61-11]: 1º) Ángulo φ alrededor de Ox_3; 2º) Ángulo θ alrededor de $O\xi$; 3º) Ángulo ψ alrededor de Ox_3'.

3. Primera entrada del cuadro y triángulo correspondiente al triedro $O(x_1, x_1', \xi)$.
5. *a*) Simetría respecto de $x_2 = x_1$; *b*) Proyección sobre $x_2 = x_1$, paralelamente a x_2; *c*) La anterior seguida de proyección ortogonal sobre x_2.
6. 1º) $\mathrm{AX} = \{-2\ 2\ 0\}$; 2º) No.
7. $\mathrm{AB} = \mathrm{O}$. La proyección sobre x_2 seguida de la proyección sobre x_1 lleva todo punto del plano al origen.
8. 1º) *a*) $\mathrm{A}_i^{-1}\mathrm{A}\mathrm{A}_d^{-1} = \mathrm{A}_i^{-1} = \mathrm{A}_d^{-1}$;
b) Si $\mathrm{AB} = \mathrm{I}$ es $\mathrm{A}_i^{-1}\mathrm{AB} = \mathrm{B} = \mathrm{A}_i^{-1}$;
2º) Si $\mathrm{AB} = \mathrm{O}$ y $\mathrm{A}\mathrm{A}_d^{-1} = \mathrm{I}$ se tiene $\mathrm{A}(\mathrm{A}_d^{-1} + \mu\mathrm{B}) =$
$= \mathrm{I} + \mathrm{O} = \mathrm{I}$.
10. Una base forman las $m\,.\,n$ matrices con un solo elemento 1 y los demás 0.
12. En $\mathrm{A}'\,.\,(\mathrm{A}')^{-1} = \mathrm{I}$ tómese la traspuesta para probar que es $[(\mathrm{A}')^{-1}]' = \mathrm{A}^{-1}$ y tómense traspuestas de ambos miembros.
13. $e^{\mathrm{A}} = \left\{\begin{matrix} \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 \\ \operatorname{sh} 1 & \operatorname{ch} 1 \end{matrix}\right\}.$

62. Pág. 54.

1. *a*) y *b*) Indicando con mayúsculas las respectivas coordenadas no-homogéneas y llamando $t_2/t_1 = \mu$:
$\mathrm{X} = (\lambda x_1 + x_2)/(\lambda t_1 + t_2) = (\lambda\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)/(\lambda + \mu)$, etc. Entonces (§ 9, ejercicio 5) sobre cada eje la proyección de P divide al segmento determinado por las de P_1 y P_2 en la misma razón μ/λ; *c*) Si $\mathrm{P}_1 \equiv \mathrm{P}_2$ todo punto del espacio está alineado con P_1 y P_2, pero todo punto P de la forma (*) coincide con P_1 y P_2. Si $\mathrm{P}_1 \not\equiv \mathrm{P}_2$ la correspondencia entre valores λ (incluído "$\lambda = \infty$") y puntos de la recta es biunívoca, siendo $\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}_2$ para $\lambda = 0$, $\mathrm{P} \to \mathrm{P}_1$ para $\lambda \to \infty$, P impropio para $\lambda = -\mu$.
3. Basta reemplazar (*) en [62-2], y ordenar respecto de λ.
4. (**) y condición para que las raíces de (***) sean números opuestos.
6. Es el plano polar del punto impropio $(u_1, u_2, u_3, 0)$.
7. $\mathrm{f}(x, y, z) + \lambda(2y + z)(x - 2y) = 0$ da $\lambda = -1/3$;
$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz + zx - 3x + 6y = 0$.
8. $\mathrm{C}(1, -2, 0)$; $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$.
9. 1º) $(x + y - 3z + 4)^2 - (1/3)(-3y + 5z - 6)^2 +$
$+ (3/4)[(4/3)z + k + 2]^2 + (k^2 - 12k - 28)/4 = 0$;
2º) Hiperboloide de una hoja si $-2 < k < 14$; hiperboloide de dos hojas si $k < -2$ ó $k > 14$; cono si $k = -2$ ó $k = 14$.
10. Para cada a, al variar n, los infinitos planos $y = ax + n$ cortan según parábolas iguales; en [62-18] deben exceptuarse los valores $a = \pm\sqrt{q/p}$.
11. La cónica intersección degenera en r y otra recta, con al menos un punto P, propio o impropio, común con r.
12. Si pasan tres coplanares, el plano de ellas pertenece a la cuádrica, pues si no habría de cortarla según una cónica. Si no son coplanares, sería P singular, pues pasarían por él varios planos tangentes.
13. El plano π tangente en P, es tangente en todo punto de r. Otro plano por r es tangente en un punto Q de r (ejercicio 11), que es entonces singular.
14. Por Q pasa una recta: o bien r, o bien la ulterior intersección del plano Qr, y por ejercicio 11 dos.
15. $y^2 + xy + xz - yz - 2y = 0$; condiciones: $aq = bp$, $aq = (b - 1)(p - 1)$, $p + q = 2$.
19. $y\sqrt{p - q} = \pm\, z\sqrt{q}$; $(0, \pm\sqrt{q(p - q)}, \tfrac{1}{2}(p - q))$.

20. 1º) $z = \pm \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\, y$; $\operatorname{tg}\theta = -4\sqrt{3}$; $\theta = 98^\circ 13'$; $(0, \pm 1/\sqrt{14}, \pm 4\sqrt{3/14})$; 2º) De revolución, puntos cíclicos $(0, 0, \pm 1)$, cono asintótico $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; 3º) $z = \pm \sqrt{10}\, x$; $\operatorname{tg}\theta = -2\sqrt{10}/9$; $\theta = 144^\circ 50'$; puntos cíclicos $(\pm\sqrt{10}/22, 0, 5/22)$.

21. Todas sus secciones planas son hipérbolas o parábolas.

24. 1º) $-\infty < k < c^2$ elipsoides; $c^2 < k < b^2$ hiperboloides de una hoja; $b^2 < k < a^2$ hiperboloides de dos hojas; $a^2 \leqslant k < +\infty$, ningún punto. [Para $k \to c^2$ y $k \to b^2$, la cuádrica se aplasta sobre los planos $z = 0$, $y = 0$, atravesándolos según una elipse e hipérbola respectivamente (*cónicas focales* del haz)]. 2º) En la ecuación cúbica en k: $(a^2 - k)(b^2 - k)(c^2 - k) - x^2(b^2 - k)(c^2 - k) - y^2(c^2 - k)(a^2 - k) - z^2(a^2 - k)(b^2 - k) = 0$, el primer miembro toma signos alternados en $-\infty$, c^2, b^2, a^2 (cfr. § 41).

25. 1º) $-\infty < k < q$ y $p < k < +\infty$, paraboloides elípticos; $q < k < p$, paraboloides hiperbólicos. [Para $k \to q$ y $k \to p$ el paraboloide se aplasta respectivamente sobre los planos $y = 0$, $x = 0$, atravesándolos según *parábolas focales* del haz]. 2º) El primer miembro de la ecuación cúbica en k: $x^2(q - k) + y^2(p - k) - (2z - k)(p - k)(q - k) = 0$, toma signos alternados en $-\infty$, q, p, $+\infty$ (§ 41).

§ 63. Pág. 77.

1. $\mathbf{T}_n = (-1/3)\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + (17/3)\mathbf{k}$; $(\mathbf{T}_n, n) = 24^\circ$.

2. 1º)
$$\begin{Bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3 & 7/2 & -2 \\ 7/2 & -4 & 9/2 \\ -2 & 9/2 & -6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & -3/2 & -2 \\ 3/2 & 0 & -5/2 \\ 2 & 5/2 & 0 \end{Bmatrix};$$
2º)
$$\begin{Bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} an_2 + bn_3 \\ -an_1 + cn_3 \\ -bn_1 - cn_2 \end{Bmatrix},$$
multiplíquese este resultado por $\{n_1\ n_2\ n_3\}$ y por $\{c\ {-b}\ a\}$.

3. $136/21 = 6{,}476$.

4. $57/9 = 6{,}3333$; $\sqrt{(434/9) - (57/9)^2} = 2{,}845$.

5. 1º) $5x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy - 6yz - 2zx = 1$, elipsoide: $9{,}37X^2 + 1{,}55Y^2 + 4{,}08Z^2 = 1$; 2º) El plano tangente en P es paralelo al diametral conjugado a la dirección $\mathbf{n}$, o sea $-x - 12y + 17z = 0$, y es $(-1)/(-1/3) = (-12)/(-4) = 17/(17/3)$.

6. $\tau_{11} = 9{,}37$, $\tau_{22} = 1{,}55$, $\tau_{33} = 4{,}08$, $\tau_{ij} = 0$ si $i \neq j$; $J_1 = 15$, $J_2 = 59$. $J_3 = 59$.

7. Para que el plano (+) de § 62, ejercicio 6, sea perpendicular a la dirección (u_1, u_2, u_3) debe ser
$$\frac{a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3}{u_1} = \frac{a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3}{u_2} = \frac{a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3}{u_3}$$
e indicando con λ el valor común de las tres fracciones se obtiene el sistema homogéneo que han de satisfacer los parámetros directores.

8. *a*) Para cada raíz λ el sistema [63-21] tiene característica 2 y entonces tiene solución esencialmente única; *b*) Para raíz doble o triple el sistema [63-21] tiene característica 1 ó 0, y por tanto infinitas soluciones.

9. $\lambda x^2 + \lambda y^2 - \lambda z^2 = \pm 1$; cono asintótico $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $\mathbf{a}_n = \lambda u_1\mathbf{i} + \lambda u_2\mathbf{j} + \lambda u_3\mathbf{k}$, con $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$, de dirección simétrica $\mathbf{u}$ respecto del plano $z = 0$, dando el mismo cono.

10. Sea $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ normal al plano.
Es $n_1\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_2 - \lambda_3)} + n_3\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)/(\lambda_1 - \lambda_3)} = 0$;
$\lambda_1 n_1^2 - \lambda_2(n_1^2 + n_3^2) + \lambda_3 n_3^2 = 0$;
$a_{n_1} = n_1\lambda_1$, $a_{n_2} = n_2\lambda_2$, $a^{n_3} = n_3\lambda_3$;
$a_{nn} = \lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2 = \lambda_2(n_2^2 + n_1^2 + n_3^2) = \lambda_2$;
sea $\mathbf{a}_t$ componente tangencial de $\mathbf{a}_n$, es $\mathbf{a}_t = n_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{i} + n_3(\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{k}$; resulta
$n_1(\lambda_1 - \lambda_2)/\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_2 - \lambda_3)} = 0/0 = n_3(\lambda_3 - \lambda_2)/\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)/(\lambda_1 - \lambda_3)}$ por ser $n_1\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} = -n_3\sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}$.

11. $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} - \lambda\mathbf{S}^{-1}\mathbf{IS} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{S}$.

12. Si y sólo si **A** y **B** tienen igual polinomio característico hay matrices **S** y **T** (que pueden determinarse ortogonales si **A** y **B** son simétricas) que las llevan a la misma forma diagonal: $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}$ y entonces **B** es la transformada de **A** por $\mathbf{ST}^{-1}$.

13. *a*) $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}.\mathbf{S}^{-1}\mathbf{BS} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ABS} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BAS} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BS}.\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$; *b*) Si una matriz diagonal A tiene elementos todos distintos es conmutable con y sólo con matrices diagonales.

14. 1º) El primer extremo vale 3 y se obtiene para $\mathbf{u} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j})\varepsilon/\sqrt{5}$, $(\varepsilon = \pm 1)$; si $\mathbf{v}$ es unitario y normal a $\mathbf{u}$ es $\mathbf{v} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\varepsilon'/\sqrt{5}$, $(\varepsilon' = \pm 1)$, dando a la forma cuadrática el valor -2. Los valores propios son 3 y -2 y los vectores propios **u** y **v**; 2º) Con la transformación ortogonal $x = (2X - Y)/\sqrt{5}$, $y = (X + 2Y)/\sqrt{5}$ se obtiene para la forma cuadrática: $3X^2 - 2Y^2$.

15. *a*) $h = p = 2$; *b*) $F(x, y) = 9[x + (2/3)y]^2 + 75y^2$.

16. $A = 1/4$, $J_1 = 1$, $J_2 = -3/4$, $J_3 = -1/2$, hiperboloide de una hoja; centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, direcciones principales $(1, 0, 1)$, $(1 - \sqrt{17}, -7 - \sqrt{17}, -1 + \sqrt{17})$, $(1 + \sqrt{17}, -7 + \sqrt{17}, -1 - \sqrt{17})$; ecuación reducida $X^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{17} + 1)Y^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)Z^2 = 1$.

17. $A = -9/4$, $J_1 = 12$, $J_2 = 11$, $J_3 = 0$, paraboloide elíptico; direcciones principales: $(2, -1, 0)$, $(1, 2, 0)$; eje: $44x - 22y + 25 = 0$, $x + 2y = 0$; vértice: $(-5/11, 5/22, -37/44)$; ecuación reducida: $Z = 11X^2 + Y^2$.

18. $A = 0$, $J_1 = 9$, $J_2 = -9$, $J_3 = -81$, cono real; direcciones principales: $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 1)$, $(1, -1, -2)$; ecuación reducida: $X^2 - Y^2 + 3Z^2 = 0$.

§ 64. Pág. 116.

2. 1º) $0 < x^2 + y^2 < 1$ con $x^2 + y^2 \neq \frac{1}{2}$; dos recintos doblemente conexos con fronteras $(0; 0)$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, $x^2 + y^2 = 1$, donde $(0; 0)$ no es punto de contorno; 2º) Ángulo horizontal formado por las bisectrices de los ejes de coordenadas: dos recintos cerrados (dominios) simplemente conexos; 3º) Regiones hiperbólicas $2n\pi \leqslant xy \leqslant (2n + 1)\pi$, $(n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$; infinitos recintos cerrados (dominios) simplemente

conexos, cuyos contornos están formados por ramas de hipérbola.

3. 1º) Circunferencias concéntricas de radio $r = (1 + e^{1/z_0})^{-\frac{1}{2}}$; 2º) Hipérbolas equiláteras $x^2 - y^2 = z_0^2$; 3º) Hipérbolas equiláteras $xy = k$, donde $2n\pi \leqslant k \leqslant (2n+1)\pi$, $(n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$.
4. Conos $y^2 + z^2 - k^2x^2 = 0$. Ramas $n\pi \leqslant u < (n + \frac{1}{2})\pi$, $(n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$.
5. "Circunferencia unidad" es: 1º) $|x_1| + |x_2| = 1$, cuadrado de vértices $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$; 2º) $\text{máx}\{|x_1|, |x_2|\} = 1$, cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.
6. Dos conjuntos complementarios tienen los mismos puntos frontera; véase § 94-2, *b*.
7. El conjunto vacío y el conjunto total. Si un conjunto y su complemento no son vacíos, el segmento cuyos extremos son tales que sólo uno de ellos pertenece al conjunto, contiene un punto frontera y un conjunto con puntos fronteras no puede ser abierto y cerrado a la vez.
8. 1º) $\overline{X \cup Y} = (X \cup Y) \cup (X \cup Y)' = X \cup Y \cup X' \cup Y' = \overline{X} \cup \overline{Y}$; 2º) $X''(\leqq)X'$ implica $\overline{\overline{X}} = \overline{X} \cup \overline{X}' = (X \cup X') \cup (X \cup X')' = X \cup X' \cup X' \cup X'' = X \cup X' = \overline{X}$; 3º) Si existe un cerrado $F(\geqq)X$ ello implica que $F(\geqq)\overline{X}$, pues todo cerrado F que cumpla $\overline{X}(\geqq)F(\geqq)X$ es tal que $X \cup X'(\leqq)F$ y por tanto $F = \overline{X}$.
9. Para todo X es $X''(\leqq)X'$ y por tanto X' es cerrado. Recíprocamente, sea F tal que $F'(\leqq)F = F' \cup A$, donde A es el conjunto de puntos aislados de F. En el entorno reducido de cada punto a de A que no contenga ningún punto de F, puede darse una sucesión Y_a cuyo único punto de acumulación sea **a**. Si Y es la unión de todas las sucesiones Y_a, aunque Y' pueda contener puntos no pertenecientes a A, será $Y' = A \cup A'(\leqq)A \cup F'$, lo que implica que si se toma $X = F' \cup Y$, será $X' = F$, pues $X' = F'' \cup Y' = F'' \cup A \cup A' = F' \cup A = F$.
10. No.
12. Sí; orden de conexión 2; contorno $x^2 + y^2 = 1$, que con $(0; 0)$ forma la frontera.
13. Sí; no; simplemente conexo; el contorno es la parábola $2x_1 + x_2^2 = 1$ que con el semieje horizontal negativo $x_2 = 0$, $x_1 \leqslant 0$ forma la frontera.

§ 65. Pág. 124.

1. *a*) 1º) $z = 1/\ln[(1 - x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)]$; límites doble y reiterados $= 0$; continua fuera del origen sobre el eje x para $1/\sqrt{2} \neq |x| < 1$;
2º) $z = +\sqrt{x^2 - y^2}$; existe sólo $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} z = 0$; no existe el límite doble ni el otro reiterado, pero existe límite doble $= 0$ en el campo de definición; continua a lo largo de todo el eje x;
3º) $z = +\sqrt{\text{sen}(xy)}$; no existe ni límite doble ni reiterados, pero existen y son iguales y nulos en el campo de definición; continua a lo largo de todo el eje x;
4º) $u = \text{arc tg}[(y^2 + z^2)/x^2]$; existen los límites reiterados $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{z \to 0} u = \lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{z \to 0} \lim\limits_{y \to 0} u = n\pi$ para cada rama, pero no existen ni los otros cuatro límites reiterados ni el

límite triple. Cada rama es continua sobre el eje x fuera del origen;
b) $f(x, y) = y^2 + 1$ si $x \neq 1$, no definida si $x = 1$.

2. 1º) Existen $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} z = \lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} z = 0$; no existe límite doble, como se ve calculando límites a lo largo de rectas concurrentes;
2º) Existe límite doble 0; no existen los límites reiterados.
3º) Existen ambos límites reiterados y el límite sobre cada recta concurrente, todos nulos; no existe límite doble, pues $z = 1$ sobre $y^2 = x$;
4º) Los límites doble y reiterados son $-\infty$;
5º) Existen los límites doble y reiterados, todos nulos;
6º) Existe $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} z = 1$ con igual valor para los límites a lo largo de las rectas concurrentes; no existe el límite doble, ni el otro límite reiterado;
7º) Existen los límites doble y reiterados, todos nulos.
3. Ninguna de las funciones es continua en $(0; 0)$, pero ambas lo son a lo largo de cualquier recta concurrente en el origen.
6. 1º) Por lo menos de orden 2, siendo precisamente de orden 2 si y sólo si $c_1c_3 - c_2^2 > 0$ (cfr. § 63-7, *b*, teor. 1);
2º) Por lo menos de orden 3, siendo de orden 3 en los dominios angulares que no contengan las rectas $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}\,y$;
3º) Orden logarítmico inferior a cualquier orden potencial;
4º) Por lo menos de orden p;
5º) Por lo menos de orden 2, anulándose en las circunferencias de centro origen y radio $4/\pi(4n - 1)$ con n entero cualquiera.

§ 66. Pág. 139.

1. 1º) $z = 1/\ln[(1 - x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)]$;
$z_x = 2xz^2(1 - x^2 - y^2)^{-1}(x^2 + y^2)^{-1}$; $z_y = yz_x/x$;
2º) $z = +\sqrt{x^2 - y^2}$; $z_x = x/z$; $z_y = -y/z$;
3º) $z = +\sqrt{\text{sen}(xy)}$; $z_x = y\cos(xy)/(2z)$; $z_y = xz_x/y$;
4º) $u = \text{arc tg}[(y^2 + z^2)/x^2]$;
$u_x = -2x(y^2 + z^2)/[x^4 + (y^2 + z^2)^2]$;
$u_y = 2x^2y/[x^4 + (y^2 + z^2)^2]$; $u_z = zu_y/y$.
2. Cfr. § 13-4, *b*, y § 13-7, *a*.
3. $\theta_1 = (-4 + \sqrt{16 + 12h + 3h^2})/(3h) \to 1/2$, $\theta_2 = 1/2$.
4. $B + C = 90°$; debe disminuir $\partial b/\partial a$, es decir B y por tanto *alargarse a*; $\text{sen B sen}(B + C)/\text{sen C} = \Delta B/(\Delta a/a) = 0{,}2$ con $C \sim 61°$ da $B < 11°$, es decir $a > 25$ m.
5. $S = \frac{1}{2}bc\,\text{sen A}$; $\Delta S/S = (\Delta b/b) + (\Delta c/c) + \text{cotg A}\,.\,\Delta A < 0{,}01 + 0{,}01 + \sqrt{3}\,.\,0{,}0044 < 0{,}028$.
6. Cfr. Cap. V, nota II, *e*.
7. Error relativo $< 0{,}002$; densidad $8{,}33 \pm 0{,}02$.
8. 1º) 0, la dirección de pendiente -2 es tangente en $(3; -1)$ a una circunferencia donde es $z = \text{const.}$; 2º) 1,4.
9. 1º) $x > 0$, $-\infty < y < +\infty$; $x = 0$, $y > 0$;
$du = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy$;
2º) $|z| \leqslant |x|$; $du = [y\,.\,\text{Arc sen}(z/x) - (yz/\sqrt{x^2 - z^2})]dx + [x\,.\,\text{Arc sen}(z/x)]dy + (xy/\sqrt{x^2 - z^2})\,dz$.
10. 1º) Existen $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. La función no es diferenciable, pues $\Delta f = \varepsilon\varrho$ con
$\lim\limits_{\varrho \to 0} \varepsilon = \lim\limits_{\varrho \to 0} (+\sqrt{|xy|}/\sqrt{x^2 + y^2}) = \lim\limits_{\varrho \to 0} \sqrt{|\cos\varphi\,.\,\text{sen}\,\varphi|} =$

$= \lim\limits_{\varrho \to 0} \sqrt{\tfrac{1}{2}\,|\text{sen}\, 2\varphi|}$ no existente:

2°) Existen $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, pero la función no es diferenciable, pues $\Delta f = \varepsilon\varrho$ con $\lim\limits_{\varrho\to 0} \varepsilon = \lim\limits_{\varrho\to 0} [\text{sen}(4 \operatorname{Arc\,tg} m)/\sqrt{1+m^2}]$ no existente con $y/x = m$ variable. Es $f_x(0,y) = 0$ función continua de y en $(0,0)$; $f_y(x,0) = 4$ es función discontinua de x en $(0,0)$.

11. Intersección $(2; 2; -3)$; plano tangente $z - 3 = x - 4y$; ángulo: $\text{sen}\,\theta = 19/(3 . \sqrt{138}) = 0{,}54$; $\theta = 32°40'$.

12. 2°) Para $y = x + a$, $z = x + \ln(1 + e^a)$; 3°) $\sqrt{2}/2$.

13. $\mathrm{D}u = 8\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$; $|\mathrm{D}u| = \sqrt{113}$; $u_{\pi/6} = 4\sqrt{3} + \tfrac{1}{2} . 7$; nula según $\operatorname{tg}\varphi = -8/7$; $\varphi_1 = -55°$, $\varphi_2 = +125°$.

14. $\mathrm{D}u = 9\mathbf{i} - 44\mathbf{j} - 48\mathbf{k}$; $u_\varphi = -2/7$; nula en el plano $9(x+2) - 44(y-3) - 48(z-4) = 0$; máxima según $(9; -44; -48)$; $|\mathrm{D}u| = \sqrt{4321} = 65{,}73$.

15. $\mathrm{D}z = 12\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$; $z_\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} . 12 - \tfrac{1}{2} . 12 = +4{,}392$; máxima según $\operatorname{tg}\varphi = -1$; $\varphi_1 = -\pi/4$, $\varphi_2 = 3\pi/4$; $|\mathrm{D}z| = 12 . \sqrt{2} = 16{,}97$. Nula según $\operatorname{tg}\varphi = +1$; $\varphi_1 = \pi/4$, $\varphi_2 = -3\pi/4$.

16. Función no diferenciable. A pesar de que $z_x = z_y = 0$, las pendientes $z/\varrho = xy/\varrho^2 = \cos\varphi . \text{sen}\,\varphi$ no son nulas. Dos rectas de pendiente máxima para $\varphi_1 = +\pi/4$, $\varphi_2 = -\pi/4$.

17. $\pm |\mathrm{D}f| = f_x \cos\psi + f_y \,\text{sen}\,\psi$; $\operatorname{tg}\psi = f_y/f_x$.

18. Df, de módulo 1, actúa según la recta que une (a, b) al origen; $f_\varphi = (-4/\sqrt{65}) . (3/5) - (7/\sqrt{65}) . (4/5) = -8/\sqrt{65}$.

El teorema del coseno da $10 = 25 + 65 - 10\sqrt{65}\cos\gamma$.

§ 67. Pág. 161.

1. $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = 2\cos 2t$.

2. $F(t) = 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}t\,\sqrt{\cos t}$; $-\tfrac{1}{2}\pi \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2}\pi$;
$F'(t) = (xx' - yy')/z = \cos(3t/2)\sqrt{\cos t}$.

3. 1°) $u = \operatorname{arc\,tg}[(y^2 + z^2)/x^2]$; homogénea de grado 0 en todo el plano: $xu_x + yu_y + zu_z = 0$;
2°) Sólo positivamente homogénea de grado 2, excluyendo el ángulo agudo cerrado comprendido entre $x = 0$ y $x + y = 0$;

$$x . \left[\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ln\frac{x+y}{x} - \frac{y^2\sqrt{x^2+y^2}}{x(x+y)}\right] + y\left[\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln\frac{x+y}{x} + \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}\right] = 2y\sqrt{x^2+y^2}\ln\frac{x+y}{x};$$

3°) No es homogénea.

6. De $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \psi(\lambda) f(x_1, \ldots, x_n)$ se deduce $\psi(1) = 1$ y derivando parcialmente con respecto a λ y a cada x_i será
$\sum x_i f_i(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \psi'(\lambda) f(x_1, \ldots, x_n)$,
$\lambda f_i(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \psi(\lambda) f_i(x_1, \ldots, x_n)$, de donde
$\psi(\lambda)\sum x_i f_i(x_1, \ldots, x_n) = \lambda\psi'(\lambda) f(x_1, \ldots, x_n)$.
Si $\psi'(\lambda) \equiv 0$, se cumple [67-8] para $m = 0$. En otro caso, tomando $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, sea
$m = f(a_1, \ldots, a_n)/[\sum a_i f_i(a_1, \ldots, a_n)] \neq 0$. Por tanto
$\psi'(\lambda)/\psi(\lambda) = m/\lambda$, es decir $\psi(\lambda) = C\lambda^m$ con
$C = 1 = \psi(1)$.

7. $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 = 1 + \text{sen}\,2x \leqslant 1$; $-\tfrac{1}{2}\pi + n\pi \leqslant x \leqslant n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Es $F_y(x, y) = \cos y \neq 0$ en $-\tfrac{1}{2}\pi + n\pi < x < n\pi$ con $y'(x) = (\text{sen}\,x - \cos x)/\cos y$.
Es $y = \text{arc sen}\,[-\sqrt{2}\,\text{sen}(x + \tfrac{1}{4}\pi)]$.

8. $z_x = (-2x^3 - z)/(x - y + z)$,
$z_y = (-2y^3 + z)/(x - y + z)$.

9. $F_z(0; 0; 0) = 1 \neq 0$. Campo de existencia: todo el plano (x, y), pues si $x = 0$, según $y + z = 0$; si $y = 0$, según $x + z = 0$; si $xy \neq 0$, se pone $xyz = t$, hallándose para x, y dados la intersección de la recta $u = x + y + [t/(xy)]$, nunca paralela al eje t, con $u = \text{sen}\,t$.

10. 1°) $z - z_0 = (x - x_0)\operatorname{tg} x_0 - (y - y_0)\operatorname{tg} y_0$;
2°) $x - y - z + (\pi/6) = 0$.

11. $z^2 = y^2(1 - \tfrac{1}{4}x^2)$; plano tangente:
$$75x - 32y + 40z - 90 = 0.$$

12. Plano tangente al paraboloide: $z - 2 = 3(x - 1) + 2(y - 1)$; plano tangente a la superficie esférica: $z - 2 = -(x - 1) + (y - 1)$; $3 . (-1) + 2 . 1 + (-1) . (-1) = 0$; $(-1/\sqrt{42};\ 4/\sqrt{42};\ 5/\sqrt{42})$.

13. $\partial(F, G)/\partial(y, z) = (6y_0)(2z_0) - 1 . (2y_0) = -92 \neq 0$; $(-23;\ 33;\ 28)$.

14. Reducida al punto de contacto con el plano tangente común $2x + 3y + 2z - 9 = 0$ con jacobianos nulos.

15. $(\partial u/\partial x)_y = u(y - v)/(1 - uv)$ con
$\partial(F, G)/\partial(u, v) = (1 - uv)/(uv) \neq 0$.

16. $(\partial u/\partial y)_x = G_3 h_3 (F_2 + F_3 g_2) . \begin{vmatrix} F_1 + F_3 g_1 & F_2 + F_3 g_2 \\ G_1 + G_3 h_1 & G_2 + G_3 h_2 \end{vmatrix}^{-1}$

17. $xz_y - yz_x = z_\varphi$

18. $-\dfrac{\partial F_k}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_k}{\partial u_1} . \dfrac{\partial u_1}{\partial x_j} + \ldots + \dfrac{\partial F_k}{\partial u_n} . \dfrac{\partial u_n}{\partial x_j}$ y § 13-6.

21. $J = -1/(x^2 + y^2)^2$.

22. 1°) $\dfrac{4x^2}{(a - t_1)(a - t_2)} + \dfrac{4y^2}{(b - t_1)(b - t_2)} = 0$;
2°) $x = \pm\sqrt{(a - t_1)(a - t_2)/(a - b)}$;
$y = \pm\sqrt{(b - t_1)(b - t_2)/(b - a)}$;
3°) $\partial(t_1, t_2)/\partial(x, y) = 4xy(a - b)/\sqrt{(a + b)^2 - 2(a - b)(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2}$;
4°) $f'_1 g'_1/[(a - t_1)(b - t_1)] = f'_2 g'_2/[(a - t_2)(b - t_2)]$.

24. Hay 24 casos. Por ejemplo:
$(u_x)_y = f_x = 2x$;
$(u_x)_z = f_x + f_y g_x = 2x + 2yzx^{z-1}$;
$(u_z)_x = f_y g_z = 2yx^z \ln x$;
$(u_z)_y = -f_x g_z/g_x = -2x^2 \ln x/z$;
$(u_y)_x = f_y = 2y$;
$(u_y)_z = (f_x/g_x) + f_y = 2x^{2-z} z^{-1} + 2y$;
$(z_x)_u = -(f_x + f_y g_x)/(f_y g_z) = -(x + yzx^{z-1})/(yx^z \ln x)$;
$(z_x)_y = -(g_x/g_z) = -z/(x \ln x)$; y análogamente:
$(z_u)_x =$; $(z_u)_y =$; $(z_y)_u =$; $(z_y)_x =$;
$(y_u)_x =$; $(y_u)_z =$; $(y_z)_u =$; $(y_z)_x =$;
$(y_x)_u =$; $(y_x)_z =$; $(x_u)_y =$; $(x_u)_z =$;
$(x_z)_u =$; $(x_z)_y =$; $(x_y)_u =$; $(x_y)_z =$.

25. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\begin{vmatrix} f_v & f_w & -2x \\ g_v & -w^{-1} & g_x \\ h_v & h_w & h_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_v & f_w & f_u \\ g_v & -w^{-1} & g_u \\ h_v & h_w & h_u \end{vmatrix}$.

26. $(u_s)_x = 1/(sx)$; $(u_s)_y$ no existe;
$(u_s)_r = (1 - sur^s \ln r)/(sx) = (1 - s \ln s \,.\, \ln r)/(sr^s)$;
$\partial(ux - y,\ y - \ln s,\ x - r^s)/\partial(u, x, r) \equiv 0$.

§ 68. Pág. 175.

1. Existe $a' \leqslant a$ tal que $|\Phi(x, 0)| < (1-k)b$ si $|x| < a'$; por (*) si $|y| < b$ será $|\Phi(x, y) - \Phi(x, 0)| < k|y| < kb$ $\therefore$ $|\Phi(x, y)| < kb + (1-k)b = b$. Entonces, para $|x| < a'$ los puntos $(x, y_n(x))$ están en R y sigue que la serie
$$y_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)]$$
converge absoluta y uniformemente, con lo que la sucesión (**), de funciones *continuas*, converge hacia una función continua $f(x)$, y es
$\Phi[x, f(x)] - f(x) = \lim [F(x, y_{n-1}(x)) - y_n(x)] = 0$.
2. Si $g(x)$ es otra, de
$|g(x) - y_n| = |\Phi[x, g(x)] - \Phi(x, y_{n-1})| < k|g(x) - y_{n-1}|$
sigue $|g(x) - y_n| < k^{n-1}|g(x) - y_1|$, y
$|g(x) - f(x)| = \lim |g(x) - y_n| = 0$.
3. $\Phi(x, y) = y - [F(x, y)/F_y(0, 0)]$.
4. Considérese la unión de todos los conjuntos determinados por el teorema de § 68-2 conteniendo $(a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_m)$. En un punto de E_{n+m} frontera de V debe cumplirse [68-11], siendo contradictorio que no pertenezca a V y cumpla [68-12]. Si hubiera otra rama V_1 debería ser $V_1(\leqq)V$. Si $V - V_1 = A$ no fuera vacío, lo serían $V_1 \frown A'$ y $A \frown V'_1$ (§ 64-4, nota 2), contradiciendo la conexión de V.
5. 1º) $\partial(F_1, F_2)/\partial(u_1, u_2) = 4(u_1^2 + u_2^2)$ sólo nulo en $u_1 = u_2 = x_1 = x_2 = 0$. *Una* sola rama en el campo real E_4 que corresponde a la solución compleja de $u^2 - x = 0$ (cfr. § 116-2); 2º) *Dos* ramas en el campo *real* E_2 para $u > 0$, $u < 0$, separadas por el punto $x = u = 0$, frontera no perteneciente a ninguna de las dos; 3º) *Dos* ramas (hemisferios) en el campo *real* E_3 para $u > 0$, $u < 0$, separadas por el ecuador $u = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
6. Cfr. HOBSON (citado en Cap. IX, nota VIII, 3), vol. I, pág. 439.
7. $\partial(u, v)/\partial(x, y) \equiv 0$; $v = (u^2 - 1)/(u^2 + 1)$.
8. $\partial(u, v, w)/\partial(x, y, z) \equiv 0$; con $y = z = 0$ se obtiene fácilmente $w = uv$.
9. $\dfrac{\partial(z, x^2 + y^2)}{\partial(x, y)} = 2 \begin{vmatrix} z_x & z_y \\ x & y \end{vmatrix} = 0$.
11. $8x \cos^2 x - 8x \cos^4 x + x \cos 4x - 1 \equiv 0$, pues
$\cos 4x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 2x$.
12. Necesidad: Multiplíquese $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n \equiv 0$ por u_k; intégrese y aplíquese § 15-6, *b*; Suficiencia: $G = 0$ implica $\sum_h c_h I_{hk} = 0$, $k = 1, \ldots, n$, se multiplica por c_k y se suma, obteniéndose
$$\int_a^b (c_1u_1 + \ldots + c_nu_n)^2\, dx = 0.$$
13. § 13-6.

§ 69. Pág. 200.

1. $u_{xx} = xyz(1 - x^2 + z^2)(x^2 - z^2)^{-3/2}$.
$u_{yy} = 0$;
$u_{zz} = xyz(x^2 - z^2)^{-3/2}$;

$u_{xy} = \operatorname{arc\,sen}(z/x) - z(x^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} = u_{yx}$;
$u_{yz} = x(x^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} = u_{zy}$;
$u_{zx} = -yz^2(x^2 - z^2)^{-3/2} = u_{xz}$;
$v_{xx} = -v_{xy} = -v_{yx} = v_{yy} =$
$= -4e^{x+y}(e^x - 2e^y)/(e^x + 2e^y)^3$.
2. $f_{11} + f_{22} + \ldots + f_{nn} = g_{rr} + (n-1)g_r/r$; $f = a\,.\,r^{2-n} + b$ si $n \neq 2$ con a, b constantes; $f(x_1, x_2) = a \ln(b\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ con a y $b > 0$ constantes.
3. $z = \ln u$ convierte la ecuación en $z_{xy} = 0$, de donde resulta $z = \varphi(x) + \psi(y)$, $u = e^z = f(x)g(y)$.
4. $f_{xy} = f_{yx} = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ si $x^2 + y^2 > 0$;
$f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = +1$;
f_{xy} no es continua en $(0, 0)$; f_x, f_y no son diferenciables en $(0, 0)$.
6. Las mismas para (x, y_0) con $x \varepsilon (x_0 - h, x_0 + h)$ y además existencia de uno de ambos miembros de la tesis.
7. $d^n z = e^{ax}(a\,dx + f\,dy)^{(n)}$; $d^n z = e^{ax}(a\,dx + c\,dy)^{(n)}$ con $c^{(n)} = b^n \cos(by + \frac{1}{2}n\pi)$; $c^{(0)} = \cos by$; § 38-1, ejemp. 4.
8. 1º) $u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + (u_{\varphi\varphi}/r^2) + (u_r/r)$;
2º) $u = (r^2 + r'^2)^{3/2} . (r^2 + 2r'^2 - rr'')^{-1}$.
9. Derivando sucesivamente [67-8] se tiene
$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(p)} f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) =$$
$$= m(m-1)\ldots(m-p+1)\lambda^{m-p} f(x_1, \ldots, x_n)$$
y se hace $\lambda = 1$.
10. Aplíquese [67-9].
11. $y' = -(8xy + y^2)/(4x^2 + 2xy)$;
$y'' = 3y(64x^3 + 32x^2y + 8xy^2 + y^3)/[4x^2(2x + y)^3]$.
13. $dz = 8x\,dx - 6y\,dy$; $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$;
$d^2z = 8(dx)^2 - 6(dy)^2 - 6y\,d^2y$;
$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + y\,d^2y + z\,d^2z = 0$;
$d^3z = -18\,dy\,d^2y - 6y\,d^3y$;
$3\,dy\,.\,d^2y + 3\,dz\,d^2z + y\,d^3y + z\,d^3z = 0$; etc.
14. $dx + dy + du + dv = 0$;
$x\,dx + y\,dy + u\,du + v\,dv = 0$;
$d^2u + d^2v = 0$;
$(dx)^2 + (dy)^2 + (du)^2 + (dv)^2 + u\,d^2u + v\,d^2v = 0$;
$d^3u + d^3v = 0$;
$3\,du\,d^2u + 3\,dv\,d^2v + u\,d^3u + v\,d^3v = 0$; etc.
15. $u = 1 + 2h + h^2 + hk + (3/2)h^2k + T$.
16. xy.
17. 1º) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} x^m y^n$;
$|x| + |y| < 1$ comparando con $\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} (x+y)^s$ para $x > 0$, $y > 0$; en los otros cuadrantes el término general no tiende a cero si $|x| + |y| > 1$;
2º) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m!n!}$, válido para todos los valores de x y de y.
19. Por § 69-5 es $\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{x f_x(\theta_1 x, \theta_1 y) + y f_y(\theta_1 x, \theta_1 y)}{x g_x(\theta_2 x, \theta_2 y) + y g_y(\theta_2 x, \theta_2 y)}$.
20. $\partial(f, g)/\partial(x, y) = 0$ en $(0; 0)$.
21. -2; No.

22. $(f_{xx} + 2\lambda f_{xy} + \lambda^2 f_{yy})/(g_{xy} + 2\lambda g_{xy} + \lambda^2 g_{yy}) = 1$;
Sí; También pueden aplicarse los desarrollos en serie de § 45.

§ 70. Pág. 224.

1. Nueve puntos extremantes $(0; 0)$, $(\pm 1/\sqrt{2}; \pm 1/\sqrt{2})$, $(0; \pm 1/\sqrt{2})$, $(\pm 1/\sqrt{2}; 0)$ con máximo relativo $(=1)$ en el primero, mínimo absoluto $(=\frac{1}{2})$ en los cuatro siguientes, y puntos de ensilladura en los cuatro últimos.
2. Un solo punto extremante $(0; 0)$, caso dudoso. Se tiene $f = (x - y^2)^2 - y^5 = (x - y^2 - y^{5/2})(x - y^2 + y^{5/2}) > 0$ si $y < 0$. Recta singular, semieje $+y$. En un entorno del origen es $f < 0$ en $y^2(1 - \sqrt{y}) < x < y^2(1 + \sqrt{y})$ con $y > 0$, siendo $f \geqslant 0$ en el resto. No hay extremo; cfr. § 70-2, ejemplo 3.
3. Por razonamiento análogo al del ejemplo 6 de § 70-2, los cuatro versores de dirección PV_k dan suma nula, por tanto si el mínimo, siempre existente, no es uno de los vértices, debe ser la intersección de las diagonales. Ésta es precisamente P si el cuadrilátero es convexo.
4. Mínimo absoluto en $(1; -3)$ con valor -7. Trasladando el origen al punto $(1; -3; -7)$ y girando los ejes, resulta $Z = (3/2)X^2 + (1/2)Y^2$.
5. Extremantes $(0, 0)$, $(\pm a, 0)$.
En $(0; 0; 0)$ es $H = -16a^4 < 0$, punto de ensilladura.
En $(\pm a; 0; -a^4)$ con $H = 64a^4 > 0$, $z_{xx} = 8a^2 > 0$ hay mínimos (que son estrictos y absolutos).
6. No hay extremos relativos; máximo absoluto $1/4$ en $(\ln 2; 0)$, mínimo absoluto $-1/4$ en $(0; \ln 2)$.
7. Extremantes $(0; 0)$, $(+\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; +\sqrt{2})$.
En $(0; 0; 0)$ caso dudoso $H = 0$, con recta singular $y = x$, siendo en ella $z > 0$ y según los ejes $z < 0$, no hay extremo. En los otros dos puntos hay mínimos (que son estrictos y absolutos) con valor $z = -8$, pues $H = 384 > 0$, $z_{xx} = 20 > 0$.
8. $d^2 = (16 + 3t_1 - 2t_2)^2 + (-7 + 2t_1 - 2t_2)^2 + (19 + 6t_1 - t_2)^2$; $t_1 = -4$; $t_2 = -3$; $d = \sqrt{185}$.
9. $u = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen}(A + B) \geqslant 0$ anulándose en $A = 0$, ó $B = 0$, ó $A + B = \pi$ con $0 \leqslant A \leqslant \pi$, $0 \leqslant B \leqslant \pi$, $0 \leqslant A + B \leqslant \pi$; $u_A = u_B = 0$ da $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$; $\operatorname{sen} 3A = 0$; $A = B = C = \pi/3$.
10. $A = B = C = \pi/6$ da máximo $\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C = 1/8$.
11. El baricentro.
12. *a*) Mínimos para $x = 5$, $y = 8$ y para $x = -5$, $y = -8$;
b) Mínimo para $x = a/\sqrt[4]{3}$, $y = a\sqrt[4]{3}$;
máximo para $x = -a/\sqrt[4]{3}$, $y = -a/\sqrt[4]{3}$.
13. $d = -D/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ con pie de la perpendicular en $(-AD/(A^2 + B^2 + C^2), -BD/(A^2 + B^2 + C^2), -CD/(A^2 + B^2 + C^2))$.
14. $x/a = y/b = z/c = s/(a + b + c)$;
$F = x^a y^b z^c + \lambda(x + y + z - s)$; Máximo al ser

$$d^2F = x^a y^b z^c \left[\left(\frac{a\,dx}{x} + \frac{b\,dy}{y} + \frac{c\,dz}{z} \right)^2 - \left(\frac{a\,dx^2}{x^2} + \frac{b\,dy^2}{y^2} + \frac{c\,dz^2}{z^2} \right) \right] =$$

$$= -x^a y^b z^c \left(\frac{a\,dx^2}{x^2} + \frac{b\,dy^2}{y^2} + \frac{c\,dz^2}{z^2} \right) < 0,$$

pues $x/a = y/b = z/c$ con $dx + dy + dz = 0$.

15. Triángulo equilátero en ambos casos.
16. Se extrema $2S = ad \operatorname{sen} A + bc \operatorname{sen} B$ bajo la condición $a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$ y resulta $A + B = \pi$, es decir, el cuadrilátero inscriptible.
17. En ambos casos triángulo equilátero inscripto en $x^2 + y^2 = 1$, demuéstrese primero que debe ser inscripto.
18. Vértices $x = \pm a/\sqrt{3}$; $y = \pm b/\sqrt{3}$; $z = \pm c/\sqrt{3}$.
19. Cubo; cfr. § 70-8, ejemplo 3.
20. Para el plano $l(x - a) + m(y - b) + n(z - c) = 0$ se extrema el volumen $V = (la + mb + nc)^3/(6lmn)$ obteniéndose $3al = 3bm = 3cn = la + mb + nc$; $V = 9abc/2$.
21. Para determinar los extremos de r se encuentra la ecuación:

$$\frac{l^2}{r^2 - a^2} + \frac{m^2}{r^2 - b^2} + \frac{n^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

22. Resultan los ejes de una cuádrica referida a su centro; cfr. § 63-5, [63-22] y § 63-8, *a*.
23. Debe extremarse $r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta$, y para $F = r^2 + \lambda(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33})$ resulta
$x + y\cos\theta + \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = 0$,
$y + x\cos\theta + \lambda(a_{12}x + a_{22}y) = 0$, de donde $r^2 = \lambda a_{33}$ y los valores de λ son las raíces de la ecuación
$(\lambda a_{11} + 1)(\lambda a_{22} + 1) = (\lambda a_{12} + \cos\theta)^2$.
24. Basta buscar el máximo de $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ con la condición $ex^2 + 2fxy + gy^2 = 1$, debiéndose eliminar x, y entre estas dos ecuaciones y la $\begin{vmatrix} ax + by & bx + cy \\ ex + fy & fx + gy \end{vmatrix} = 0$.
De las dos primeras se obtiene
$x[(ax + by) - u(ex + fy)] + y[(bx + cy) - u(fx + gy)] = 0$,
debiendo por la tercera, ser compatibles en x, y las ecuaciones $(a - ue)x + (b - uf)y = 0$, $(b - uf)x + (c - ug)y = 0$, de donde resulta la tesis. Para el ejemplo, es
$u = (14/3) + (2\sqrt{67}/3)$.
25. Ecuaciones de condición $\varphi_r = \sum_i a_{ri}^2 - H_r = 0$.
Para $F = \Delta + \sum_r \lambda_r \varphi_r$ se tiene $(\partial\Delta/\partial a_{ri}) + 2\lambda_r a_{ri} = 0$, de donde $A_{ri}/a_{ri} = -2\lambda_r$ independiente de i.
Como $\sum_i A_{ri} a_{si} = 0$, $(r \neq s)$, se extrema Δ cuando es ortogonal. Por tanto $\Delta^2 = H_1 H_2 \dots H_n$, de donde $\Delta_{máx} = \sqrt{H_1 H_2 \dots H_n}$. Para $|a_{ri}| < M$ es $H_r < nM^2$.

§ 71. Pág. 234.

1. $xy + yz + zx + x - 5z - 10 = 0$; $(1; 2; 0)$;
$xy + yz + zx - 1 = 0$.
2. $3x + 8y - z = 19$; $x - 1 = (y - 2)/(-5) = z/3$;
$(1; 1; 1)$ e indeterminadas, normales a la anterior; hiperboloide ordinario de revolución $X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 1$.
3. $xy + yz + zx = 0$;
$(x - 1)(y - 2) + (y - 2)z + z(x - 1) = 0$.
4. $9x + 8y + 7z = 1$; $17(x - 3)^2 + 34(y - 2)^2 + 49(z - 1)^2 - 46(x - 3)(y - 2) - 14(y - 2)(z - 1) - 28(z - 1)(x - 3) = 0$; $(2; -3; 1)$;
Esferoide achatado $4X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

5. Basta resolver $f(a,b) = 0$, $f_x(a,b) + \lambda f_y(a,b) = 0$, $f_{xx}(a,b) + 2\lambda f_{xy}(a,b) + \lambda^2 f_{yy}(a,b) = 0$ con
$$f_x^2(a,b) + f_y^2(a,b) > 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(a,b) \neq 0.$$

6. 1º) $a^3 + pa^2 + q^2 b = 0$; $3a^2 + 2pa + \lambda q^2 = 0$;
$6a + 2p = 0$; $(f_x + \lambda f_y)^{(3)} = 6 \neq 0$; $a = -p/3$;
$b = -2p^3/(27q^2)$; $\lambda = p^2/(3q^2)$;
Recta de inflexión $9p^2 x - 27q^2 y + 5p^3 = 0$;
2º) $a^4 - 6a^2 - b = 0$; $4a^3 - 12a - \lambda = 0$;
$12a^2 - 12 = 0$; $24a \neq 0$; $(+1; -5)$ con $\lambda = -8$;
$(-1; -5)$ con $\lambda = 8$.

7. La única raíz real del sistema $f = f_x = f_y = 0$ es el origen $(0;0)$, punto crunodal de tangentes $c(x^2 - y^2) = 0$, es decir $y = \pm x$, con ramas sin inflexión.

8. El origen punto acnodal.

9 Desarrollando en potencias de $\lambda - \lambda_1 = \mu h$ y $x - a = h$, será
$2F(x,\lambda)/h^2 \equiv f_{yy}\mu^2 + 2P_1(\lambda_1)\mu + Q(\lambda_1) + h[R(\mu) + \delta] = 0$.
Si el trinomio constante respecto de h, tiene dos ceros reales distintos μ_1, μ_2, la ecuación de ambas ramas del tacnodo será aproximadamente $y - b = \lambda_1(x - a) + \mu_i(x - a)^2$ y ambas estarán a un mismo lado de la tangente común si $\mu_1\mu_2 = Q(\lambda_1)/f_{yy} > 0$, a distinto lado si $\mu_1\mu_2 = Q(\lambda_1)/f_{yy} < 0$, y dudoso, pudiendo una u otra rama tener inflexión si $\mu_1\mu_2 = 0 = Q(\lambda_1)$. Si $\Delta = 0$, es
$2F(x,\lambda)/h^2 \equiv f_{yy}(\mu - \mu_1)^2 + h[R(\mu) + \delta] = 0$ para
$\mu_1 = -\sqrt{Q(\lambda_1)/f_{yy}}$. Si $R(\mu_1) \neq 0$, el caso no vuelve a ser excepcional y se tendrá aproximadamente
$(\mu - \mu_1)^2 = -hR(\mu_1)/f_{yy}$, es decir
$y - b = \lambda_1(x - a) + (x - a)^2(\mu_1 \pm \sqrt{-(x - a)R(\mu_1)/f_{yy}})$;
por tanto, sólo si $x - a$ es del mismo signo que $-R(\mu_1)/f_{yy}$ es y real; si $\mu_1 \neq 0$, ambas ramas de la cúspide quedan a un mismo lado de la tangente común, mientras están a distinto lado si $\mu_1 = 0 = Q(\lambda_1)$.

Ejemplo 3: $F(x,\lambda) \equiv \lambda^2 + x^2 + x^2\lambda^2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $P(\lambda) \equiv P_1(\lambda) \equiv 0$, $Q(0) = 2$, $f_{yy} = 2$; $\Delta = 4 > 0$; $(0;0)$ es punto parabólico aislado.

Ejemplo 4: $F(x,\lambda) \equiv \lambda^2 - x = 0$, caso no excepcional con $P(\lambda) \equiv -2 \neq 0$; $(0;0)$ es punto de retroceso de 1ª especie, existiendo curva para $x > 0$.

Ejemplo 5: $F(x,\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda x + x^2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $P(\lambda) = -4\lambda$, $P_1(\lambda) \equiv -2$, $Q(\lambda) \equiv 2$, $f_{yy} = 2$, $\Delta = 0$, $R \equiv 0$, el caso vuelve a ser excepcional. Directamente $\lambda = x$ es doble.

Ejemplo 6: $F(x,\lambda) \equiv (\lambda - x)^2 - x^4 = 0$, $\Delta = 0$, $R \equiv 0$, el caso vuelve a ser excepcional. Directamente, si $\lambda = \mu x$, queda, dividiendo por x^2: $(\mu - 1)^2 - x^2 = 0$ y las ramas son aproximadamente $y = x^2(1 \pm x)$, a un mismo lado de la tangente común en el tacnodo $(0;0)$.

Ejemplo 7: $F(x,\lambda) \equiv \lambda^2 + \lambda x - x^2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $P(\lambda) = 2\lambda$, $P_1(\lambda) \equiv 1$, $Q(\lambda) \equiv -2$, $f_{yy} = 2$, $\Delta = -5 < 0$, $\mu^2 + \mu - 1 = 0$, $\mu_1\mu_2 = -1$; $(0;0)$ es tacnodo con ramas a distinto lado de la tangente común.

Ejemplo 8: $F(x,\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda x + x^2 - x^3 = 0$; $\lambda_1 = 0$, $P(\lambda) = -4\lambda$; $P_1(\lambda) \equiv -2$; $Q(\lambda) \equiv 2 \neq 0$; $f_{yy} = 2\lambda$, $\Delta = 0$, $R < 0$; $(0;0)$ es punto de retroceso de 2ª especie, existiendo curva para $x > 0$.

10. 1º) Las raíces del sistema $f = f_x = f_y = 0$ son $(0;0)$ y $(0; -c)$. Para el primer punto es
$F(x,\lambda) \equiv c^2\lambda^2 + 2c\lambda x - 3x^2 + x(2c\lambda^3 - 2x\lambda^2 + x\lambda^4) = 0$,
$\Delta = -16c^2 < 0$; $c^2\mu^2 + 2c\mu - 3 = 0$, $\mu_1\mu_2 = -3 < 0$;
$(0;0)$ es tacnodo, con ambas ramas a distinto lado de la tangente común. El punto $(0; -c)$ es crunodal, con tangentes paralelas a las bisectrices de los ejes de coordenadas, siendo de inflexión en ambas ramas;
2º) La raíz del sistema $f = f_x = f_y = 0$ es $(0;0)$;
$F(x,\lambda) \equiv \lambda^2 + x^3 - 2x^3\lambda^4 = 0$, $P(\lambda) \equiv 0$, $\lambda = \mu x$ da
$F(x,\mu)/x^2 = \mu^2 + x - 2x^5\mu^4 = 0$ con
$P_1(\lambda_1) = 0 = Q(\lambda_1) = \Delta$, $\mu_1 = 0$, $R(0) = 2 > 0$, $f_{yy} > 0$, $(0;0)$ es punto de retroceso de 1ª especie, existiendo curva para $x < 0$.

11. 1º) Tangente simple $y = 0$ con rama ordinaria sin inflexión; Tangente doble $x^2 = 0$; para $x = \lambda y$, $\lambda_1 = 0$, es
$F(y,\lambda) \equiv \lambda^4 y + y - \lambda^2 = 0$, $\psi(\lambda_1) < 0$, $P(\lambda_1) > 0$;
$(0;0)$ es punto de retroceso de 1ª especie de tangente $x = 0$, con ramas existentes para $y > 0$.
2º) Tangente simple $x = 0$, con rama ordinaria con inflexión. Tangente doble $y^2 = 0$, para $y = \lambda x$, $\lambda_1 = 0$, es
$F(x,\lambda) \equiv x^2 - \lambda^5 x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 0$, $P(0) = 0$, caso excepcional; para $\lambda = \mu x$ es
$F(x,\mu x)/x^2 \equiv 1 - \mu^5 x^5 - 2\mu + \mu^2 \equiv (\mu - 1)^2 - \mu^5 x^5 = 0$, vuelve a ser excepcional, pero directamente, para $\mu \cong 1$ es $[(y/x^2) - 1]^2 = x^5$, es decir, $y = x^2(1 \pm x^{5/2})$, dando $(0;0)$ punto de retroceso de 2ª especie, de tangente $y = 0$; con ramas existentes para $x > 0$.

12. 1º) En $(0; +1)$ y $(0; -1)$; 2º) En $(0; -\frac{1}{2}\pi)$ y $(0; +\frac{1}{2}\pi)$.

13. Punto anguloso con ramas de *pendientes* $-\frac{1}{2}\pi$, $+\frac{1}{2}\pi$ (¡no son ángulos!).

14. 1º) Elíptico, por debajo;
2º) Parabólico, atravesando ;
3º) Elíptico, por encima;
4º) Hiperbólico, atravesando;
5º) Parabólico, atravesando;
6º) Hiperbólico, atravesando;
7º) Elíptico, por debajo;
8º) Parabólico en todos, por encima en los ejemplos 3 y 5, atravesando en los demás;
9º) Parabólico, atravesando en ambas superficies.

§ 72. Pág. 255.

1. $\mathbf{r}(u) = r(u)\,.\,\mathbf{e}(u)$ con $|\mathbf{e}(u)| \equiv 1$ da
$\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}' = r\mathbf{e} \wedge (r'\mathbf{e} + r\mathbf{e}') = r^2\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}'$, § 72-3, *b*.

2. Cfr. § 60-1, *b*; [72-17], [72-21] y [60-35].

3. u', derivada del módulo, no es el módulo de la derivada $|\mathbf{u}'|$.

4. Si $\mathbf{n}$ es el versor normal al plano, aplíquese § 60-7, *a*, para ver que el sistema homogéneo $\mathbf{n}\,.\,\mathbf{r} \equiv \mathbf{n}\,.\,\mathbf{r}' \equiv \mathbf{n}\,.\,\mathbf{r}'' \equiv 0$ tiene solución no nula (§ 15-6, *b*). Para el recíproco, se aplica $\mathbf{n}'\,.\,\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}'\,.\,\mathbf{r} \equiv \mathbf{n}'\,.\,\mathbf{r}' \equiv 0$ y ejercicio 1.

5. 1º)
$$\left\{\begin{matrix} 10u & 6 & 0 \\ 0 & 2v & 4v \\ -1 & 0 & -3w^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 10u & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 2v & 2v \\ -\frac{1}{2} & 2v & -3w^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & 2v \\ -\frac{1}{2} & -2v & 0 \end{matrix}\right\};$$

2º) $D\mathbf{r}(Q_0) \, . \, \mathbf{x} = 1(20\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) + (-2)(2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + 2 \, . \, (-\mathbf{i} - 3\mathbf{k}) = 18\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$;

3º) $\mathbf{r}_\varphi \, (Q_0) \, . \, x = \{[20(1/3) + (-1)(2/3)]\mathbf{i} + [6 \, . \, (1/3) + 2 \, . \, (-2/3)]\mathbf{j} + [4 \, . \, (-2/3) + (-3) \, . \, (2/3)]\mathbf{k}\} \, . \, 3 = 18\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$;

4º) $d\mathbf{r}(Q) = (10u \, du - dw)\mathbf{i} + (6 \, du + 2v \, dv)\mathbf{j} + (4v \, dv - 3w^2 \, dw)\mathbf{k} = (10u\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) du + (2v\mathbf{j} + 4v\mathbf{k}) dv + (-\mathbf{i} - 3w^2\mathbf{k}) dw$;

$d_\varphi \, \mathbf{r}(Q_0) = [10 \, . \, 2 \, . \, 1 - 2]\mathbf{i} + [6 \, . \, 1 + 2 \, . \, 1 \, . \, (-2)]\mathbf{j} + [4 \, . \, 1 \, . \, (-2) - 3 \, . \, 1^2 \, . \, 2]\mathbf{k} = 18\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$;

5º) $\left\{ \begin{matrix} 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & 2v \\ -\frac{1}{2} & -2v & 0 \end{matrix} \right\} = 0$;

Plano $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \, . \, (4v_0\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = 0$, para $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ es $4u - v + 6w - 13 = 0$;

$\mathbf{a}_\varphi = [(-3)(-2/3) + (-\frac{1}{2})(2/3)]\mathbf{i} + [3(1/3) + (-2v_0)(2/3)]\mathbf{j} + [(1/2)(1/3) + 2v_0(-2/3)]\mathbf{k} = (5/3)\mathbf{i} + [1 - (4/3)v_0]\mathbf{j} + [(1/6) - (4/3)v_0]\mathbf{k}$;

$(5/3)(1/3) + (1 - 4v_0/3) \, . \, (-2/3) + [(1/6) - (4v_0/3)](2/3) = 0$;

6º) $\mathbf{r}_u(0) = 6\mathbf{j}$; $\mathbf{r}_v(0) = \mathbf{0}$; $\mathbf{r}_w(0) = -\mathbf{i}$;

$\mathbf{r}_\varphi \, (0) = (-2/3)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ con

$(-2/3)(1/3) + 2(-2/3) = -14/9 \neq 0$.

6. Es $N_+ = N^+ = N_- = N^- = |\mathbf{r}'_+(0)| = |\mathbf{r}'_-(0)| = \sqrt{2}$ y no existe $\mathbf{r}'(0)$, pues $\mathbf{r}'_+(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{r}'_-(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.

7. Por § 26-4 con $F(u_0) = 0 < y_m < F(v)$, debe ser $F(u_m) = y_m < F(u)$ para todo u de $(u_m, v]$. En este intervalo será $|\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_m)| \geqslant |\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)| - |\mathbf{r}(u_m) - \mathbf{r}(u_0)| > f(u) - f(u_m)$ y se aplican definiciones de ejercicio 6 y Cap. IX, nota V, *a*.

8. Por reducción al absurdo, se supone que exista v de $[u_0, u_1]$ donde $F(v) > 0$. Entonces se toma y_m de $(0, F(v))$ no perteneciente a $F(S)$ y se aplica ejercicio 7.

9. Para $k > 0$ sea $f(u) = g(u) + ku$ y por ejercicio 8 será $|\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)| - g(u) + g(u_0) - k(u - u_0) \leqslant 0$ en $[u_0, u_1]$ y también $|\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)| \leqslant g(u) - g(u_0)$, por reducción al absurdo para k suficientemente pequeño. Si fuese $|\mathbf{r}(u_1) - \mathbf{r}(u_0)| = g(u_1) - g(u_0)$, por la desigualdad triangular (§ 9-5, ejercicio), deberá ser también $|\mathbf{r}(v) - \mathbf{r}(w)| = g(v) - g(w)$, para todo par v, w tal que $u_0 \leqslant w < v \leqslant u_1$ y sería $N_+\mathbf{r}(u) = D_+g(u)$ en todo punto de $[u_0, u_1)$.

10. Corolario de ejercicio 9; obsérvese que no puede deducirse de § 35 por proyecciones.

11. Se aplica ejercicio 9 con $g(u) \equiv 1$, obteniéndose

$$0 \leqslant |\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)| \leqslant 0.$$

12. 1º) Por componentes, se aplica § 35-3, dando $\mathbf{r}(u) \equiv \mathbf{r}_0$; 2º) Se aplica ejercicio 1.

13. 1º) Debe ser (§ 60-8, a_1) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mu(u) \, . \, \mathbf{a}$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y $\mu'(u) \neq 0$. Por ejercicio 2 es

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}\right) = \frac{(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'') \wedge \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3}$$

2º) Se aplica ejercicio 4.

14. De [60-43] se deduce $\mathbf{n} \, . \, \mathbf{r}' \equiv \mathbf{n} \, . \, \mathbf{r}'' \equiv \mathbf{n} \, . \, \mathbf{r}''' \equiv 0$, sistema homogéneo con solución $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ si $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = 0$ (§ 15-6, *b*). Recíprocamente, como en ejercicio 4, será $\mathbf{n}' \equiv \mathbf{0}$ y se integra $\mathbf{n} \, . \, \mathbf{r}' \equiv 0$.

15. 1º) Se aplica § 66-2, corolario 1º; 2º) Si $\mathbf{r}(u, v) \equiv \mathbf{r}(t)$ con $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, $t = t(u, v)$ será $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = t_u t_v \mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}' \equiv \mathbf{0}$. Recíprocamente, de

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \equiv \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv 0,$$

por § 68-3 la proyección sobre cada plano de coordenadas es una curva o un punto y se aplica 1º.

16. Si $\mathbf{n}$ es el versor normal a la recta, [72-27] da $[\mathbf{r}(u_0 + h) - \mathbf{r}(u_0)] \, . \, \mathbf{n} = (h^n/n!)\mathbf{r}^{(n)}(u_0) \, . \, \mathbf{n} + o(h^n)$, que cambia o no de signo según sea la paridad de n.

17. $[\mathbf{r}(u_0 + h) - \mathbf{r}(u_0)] \, . \, \mathbf{n} = (h^p/p!)\mathbf{r}^{(p)}(u_0) \, . \, \mathbf{n} + o(h^p)$ da que la tangente atraviesa o no a la curva en P_0 según que p sea impar o par. Para $n = 1$, $p = 2$ se tiene punto ordinario con contacto de primer orden (§ 38-8). Para $n = 1$, $p = 3$ se tiene punto ordinario con inflexión (§ 71, ejercicio 5). Para $n = 2$ se tiene una singularidad (que no depende de la representación paramétrica) y si $p = 3$ ó 4 se tiene un punto de retroceso de 1ª ó 2ª especie respectivamente (§ 71-4).

18. Tomando $x = 2u + 1$ resulta $\mathbf{r}(u) = (2u + 1)\mathbf{i} + (2u + 3)\mathbf{j} + \sqrt{12u^2 + 24u + 13} \, \mathbf{k}$; $\mathbf{v}(1) = \mathbf{r}'(1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (24/7)\mathbf{k}$. Mediante [67-31] resulta $v_1/(-2z) = v_2/(-2z) = v_3/(-3x - 3y) = 2/(-14)$.

19. $2x - y + 3z = 0$; $(3z - y)^2 - 2y = 0$; $\mathbf{r}(u) = u\mathbf{i} + 2u^2\mathbf{j} + (2/3)(u^2 - u)\mathbf{k}$; $-\infty < u < +\infty$.

20. $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y_0, z_0)} = 4y_0z_0 = 4$; $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(z_0, x_0)} = 1$;

$\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x_0, y_0)} = 2y_0 = 2$; $(x - 1)/4 = y - 1 = (z - 1)/2$;

$\mathbf{r}(u) = u^4\mathbf{i} + u\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{v}(1) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

21. 1º) Si $v = \text{const.}$, $ds^2 = du^2/\cos^2 u$, y $s = \int_a^b du/\cos u$ no depende de v; 2º) Si $u = \text{const.}$, $ds^2 = (u^2 + 1) dv^2$ depende de u.

22. $\mathbf{r} = (5\sqrt{3}/4)\mathbf{i} + (15/8)\mathbf{j} + (3/4)\mathbf{k} + \lambda[(-5/4)\mathbf{i} + (15\sqrt{3}/8)\mathbf{j}] + \mu[(3\sqrt{3}/4)\mathbf{i} + (9/8)\mathbf{j} + (5/4)\mathbf{k}]$;

$\partial(y, z)/\partial(u_0, v_0) = 3 \cos u_0 \, \text{ch}^2 v_0 = 75\sqrt{3}/32$;

$\partial(z, x)/\partial(u_0, v_0) = 2 \, \text{sen} \, u_0 \, \text{ch}^2 v_0 = 25/16$;

$\partial(x, y)/\partial(u_0, v_0) = -6 \, \text{ch} \, v_0 \, \text{sh} \, v_0 = -45/9$;

$15\sqrt{3}[x - (5\sqrt{3}/4)] + 10[y - (15/8)] - 36[z - (3/4)] = 0$;

Hiperboloide alabeado $(x^2/4) + (y^2/9) - z^2 = 1$;

$F_{x_0} = 5\sqrt{3}/8$; $F_{y_0} = 5/12$; $F_{z_0} = -3/2$.

23. $\mathbf{r} = (a + r \cos u) \cos v\mathbf{i} + (a + r \cos u) \, \text{sen} \, v\mathbf{j} + r \, \text{sen} \, u\mathbf{k}$; $(0 \leqslant u < 2\pi$; $0 \leqslant v < 2\pi)$; Ninguno, pues $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = -r(a + r \cos u) \, . \, (\cos u \cos v\mathbf{i} + \cos u \, \text{sen} \, v\mathbf{j} + \text{sen} \, u\mathbf{k}) \neq \mathbf{0}$ si $a > r$.

§ 73. Pág. 277.

1. Sólo la parte donde $y \neq 0$ y está definida $z(t)$, excluyendo así el eje z que es parte de la intersección.

2. En el *campo real* s queda determinado por [73-1]. En el campo complejo existen *curvas mínimas de longitud nula* para las que $\mathbf{r}'(u) \, . \, \mathbf{r}'(u) \equiv 0$.

3. $\lim_{h\to 0}\left[\frac{2}{27}(4+9h^2)^{3/2}-\frac{16}{27}\right](2h^3)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+9h^2}}{3h}=$
$=+\infty.$
El punto $u=0$ es singular.

4. Cfr. § 72, ejercicio 17.

5. Cfr. § 72, ejercicio 17. Si $n=1$, $p=2$, $q=3$ se tiene punto ordinario con contacto de primer orden. Si n es par se tiene singularidad (que no depende de la representación paramétrica). Si p es impar se tiene en P_0 una *tangente estacionaria* o *de inflexión*. Si q es par se tiene en P_0 un *plano osculador estacionario*.

6. $\mathbf{t}(1)=(4/\sqrt{21})\mathbf{i}+(1/\sqrt{21})\mathbf{j}+(2/\sqrt{21})\mathbf{k};$
$\mathbf{n}(1)=(22/\sqrt{2121})\mathbf{i}-(26/\sqrt{2121})\mathbf{j}-(31/\sqrt{2121})\mathbf{k};$
$\mathbf{b}(1)=(1/\sqrt{101})\mathbf{i}+(8/\sqrt{101})\mathbf{j}-(6/\sqrt{101})\mathbf{k};$
Recta tangente: $(\mathbf{r}-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\wedge(4\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})=\mathbf{0};$
$(x-1)/4=y-1=(z-1)/2;$
Recta normal principal:
$(\mathbf{r}-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\wedge(22\mathbf{i}-26\mathbf{j}-31\mathbf{k})=\mathbf{0};$
$(x-1)/22=(y-1)/(-26)=(z-1)/(-31);$
Recta binormal: $(\mathbf{r}-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\wedge(\mathbf{i}+8\mathbf{j}-6\mathbf{k})=\mathbf{0};$
$x-1=(y-1)/8=(z-1)/(-6);$
Plano osculador: $(\mathbf{r}-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+8\mathbf{j}-6\mathbf{k})=0;$
$x+8y-6z=3;$
Plano normal: $(\mathbf{r}-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})=0;$
$4x+y+2z=7;$
Plano rectificante: $(\mathbf{r}-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(22\mathbf{i}-26\mathbf{j}-31\mathbf{k})=0;$
$22x-26y-31z=-35.$

7. $\mathbf{t}=(\mathbf{i}+u\mathbf{j}+\frac{1}{2}u^2\mathbf{k})/(1+\frac{1}{2}u^2),$
$\mathbf{n}=[-2u\mathbf{i}+(2-u^2)\mathbf{j}+2u\mathbf{k}]/(2+u^2),$
$\mathbf{b}=(\frac{1}{2}u^2\mathbf{i}-u\mathbf{j}+\mathbf{k})/(1+\frac{1}{2}u^2);$
en $u=2$: $3\mathbf{t}(2)=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $3\mathbf{n}(2)=-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$,
$3\mathbf{b}(2)=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k};$
Recta tangente:
$[\mathbf{r}-u\mathbf{i}-\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}+(1/6)u^3\mathbf{k}]\wedge(\mathbf{i}+u\mathbf{j}+\frac{1}{2}u^2\mathbf{k})=\mathbf{0},$
$x-u=(y-\frac{1}{2}u^2)/u=[z-(1/6)u^3]/(\frac{1}{2}u^2),$
en $u=2$: $x-2=(y-2)/2=[z-(4/3)]/2;$
Recta normal principal:
$[\mathbf{r}-u\mathbf{i}-\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}-(1/6)u^3\mathbf{k}]\wedge[-2u\mathbf{i}+(2-u^2)\mathbf{j}+2u\mathbf{k}]=\mathbf{0},$
$(x-u)/(-2u)=(y-\frac{1}{2}u^2)/(2-u^2)=[z-(u^3/6)]/(2u),$
en $u=2$: $(x-2)/(-2)=(y-2)/(-1)=[z-(4/3)]/2;$
Recta binormal:
$[\mathbf{r}-u\mathbf{i}-\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}-(u^3/6)\mathbf{k}]\wedge(\frac{1}{2}u^2\mathbf{i}-u\mathbf{j}+\mathbf{k})=\mathbf{0},$
$(x-u)/(\frac{1}{2}u^2)=(y-\frac{1}{2}u^2)/(-u)=z-(u^3/6),$
en $u=2$: $(x-2)/2=(y-2)/(-2)=z-(4/3);$
Plano osculador:
$[\mathbf{r}-u\mathbf{i}-\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}-(u^3/6)\mathbf{k}]\cdot(\frac{1}{2}u^2\mathbf{i}-u\mathbf{j}+\mathbf{k})=0,$
$\frac{1}{2}u^2(x-u)-u(y-\frac{1}{2}u^2)+z-(1/6)u^3=0,$
en $u=2$: $2x-2y+z=4/3;$
Plano normal:
$[\mathbf{r}-u\mathbf{i}-\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}-(1/6)u^3\mathbf{k}]\cdot(\mathbf{i}+u\mathbf{j}+\frac{1}{2}u^2\mathbf{k})=0,$
$x-u+u(y-\frac{1}{2}u^2)+\frac{1}{2}u^2[z-(u^3/6)]=0,$
en $u=2$: $x+2y+2z=26/3;$
Plano rectificante:
$[\mathbf{r}-u\mathbf{i}-\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}-(u^3/6)\mathbf{k}]\cdot[-2u\mathbf{i}+(2-u^2)\mathbf{j}+2u\mathbf{k}]=0,$
$-2u(x-u)+(2-u^2)(y-\frac{1}{2}u^2)+2u[z-(u^3/6)]=0,$
en $u=2$: $2x-y+2z=14/3;$ $s=10/3.$

8. $\sqrt{3}\,\mathbf{t}(\pi/4)=-\sqrt{2}\,\mathbf{i}+\mathbf{k};$
$\sqrt{39}\,\mathbf{n}(\pi/4)=-\mathbf{i}-6\mathbf{j}-\sqrt{2}\,\mathbf{k};$
$\sqrt{13}\,\mathbf{b}(\pi/4)=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\sqrt{2}\,\mathbf{k};$
$s=\sqrt{2}\int_0^u\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t}\,dt=\sqrt{2}\,\mathrm{E}(u;1/\sqrt{2}),$
integral elíptica de 2ª especie (§ 55-2, *b*);
$s_1=\sqrt{2}\,\mathrm{E}(\pi/4;1/\sqrt{2})=\sqrt{2}\,.\,0{,}748;$
$s_2=\sqrt{2}\,\mathrm{E}(\pi/2;1/\sqrt{2})=\sqrt{2}\,.\,1{,}349.$

9. $\varrho_0=(21/2)\sqrt{21/101};$ $\tau_0=-101/12.$

10. 1º) $\varrho_0=(3/2)\sqrt{3/13};$ $\tau_0=-13/(6\sqrt{2});$
$s'(u_0)=\sqrt{1+\cos^2 u_0}=\sqrt{3/2};$
$s''(u_0)=-\cos u_0\operatorname{sen}u_0/\sqrt{1+\cos^2 u_0}=-1/\sqrt{6};$
$d\mathbf{t}/ds_0=(s'\mathbf{r}''-s''\mathbf{r}')/s'^3=-(2\mathbf{i}+12\mathbf{j}+2\sqrt{2}\,\mathbf{k})/9;$
$\mathbf{n}(\pi/4)=\varrho_0\,.\,d\mathbf{t}/ds_0=-(\mathbf{i}+6\mathbf{j}-\sqrt{2}\,\mathbf{k})/\sqrt{39};$
$\mathbf{c}=(3/13)\mathbf{i}-(5/26)\mathbf{j}+(5\sqrt{2}/13)\mathbf{k};$
$\mathbf{r}=(5/13)\mathbf{i}-(5/26)\mathbf{j}+(5\sqrt{2}/13)\mathbf{k}+\mu(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\sqrt{2}\,\mathbf{k});$
$[x-(5/13)]/2=[y+(5/26)]/(-1)=$
$=[z-(5\sqrt{2}/13)/(2\sqrt{2});$
2º) $\varrho=(1+\frac{1}{2}u^2)^2$, $\varrho_0=9$,
$\tau=-(1+\frac{1}{2}u^2)^2$, $\tau_0=-9;$
$d\mathbf{t}/ds=(d\mathbf{t}/du)(du/ds)=$
$=[-2u\mathbf{i}+(2-u^2)\mathbf{j}+2u\mathbf{k}]/[2(1+\frac{1}{2}u^2)^3],$
$\mathbf{n}=\varrho\,d\mathbf{t}/ds=[-2u\mathbf{i}+(2-u^2)\mathbf{j}+2u\mathbf{k}]/(2+u^2),$
$\mathbf{n}(2)=-(2/3)\mathbf{i}-(1/3)\mathbf{j}+(2/3)\mathbf{k};$
Centro de curvatura: $\mathbf{c}=u\mathbf{i}+\frac{1}{2}u^2\mathbf{j}+(u^3/6)\mathbf{k}+$
$+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}u^2)[-2u\mathbf{i}+(2-u^2)\mathbf{j}+2u\mathbf{k}],$
$\mathbf{c}(2)=-4\mathbf{i}-\mathbf{j}+(22/3)\mathbf{k};$
Recta polar: $\mathbf{r}=\mathbf{c}+\mu(\frac{1}{2}u^2\mathbf{i}-u\mathbf{j}+\mathbf{k})$, para $u=2$:
$\mathbf{r}=-4\mathbf{i}-\mathbf{j}+(22/3)\mathbf{k}+\mu(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k});$
$(x+4)/2=(y+1)/(-2)=z-(22/3).$

11. Aplíquense [73-70] y [73-71].

12. $\mathbf{b}(u)=[\mathbf{r}'(u)\wedge\mathbf{r}''(u)]/|\mathbf{r}'(u)\wedge\mathbf{r}''(u)|=$
$=(u^2\mathbf{i}-2u\mathbf{j}+2\mathbf{k})/\sqrt{u^4+4u^2+4};$
$\mathbf{b}'(2)=(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})/9;$ $s'(2)=3;$
$\mathbf{n}(2)=\tau_0\,.\,d\mathbf{b}/ds_0=(-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})/3.$

13. 1º) $\mathbf{t}\,.\,\mathbf{k}\equiv k/\sqrt{1+k^2};$ Derivando ésta, por [73-30] es $(d\mathbf{t}/ds)\,.\,\mathbf{k}\equiv 0\equiv\mathbf{n}\,.\,\mathbf{k};$ Deducida de [73-30] y [73-31] es $\varrho(d\mathbf{t}/ds)\,.\,\mathbf{k}\equiv\tau(d\mathbf{b}/ds)\,.\,\mathbf{k}\equiv 0$ que da $\mathbf{b}\,.\,\mathbf{k}=$ const.;
2º) De $\mathbf{n}\,.\,\mathbf{k}\equiv 0$ y [73-34] se deduce
$(d\mathbf{n}/ds)\,.\,\mathbf{k}\equiv 0\equiv-(1/\varrho)\mathbf{t}\,.\,\mathbf{k}-(1/\tau)\mathbf{b}\,.\,\mathbf{k}$, es decir,
$\varrho/\tau\equiv-\mathbf{t}\,.\,\mathbf{k}/(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{k});$
3º) Si $t_3=\gamma$ (constante) es $z=\gamma s$; de
$1=t_1^2+t_2^2+t_3^2=\sigma'^2+\gamma^2$ se obtiene $\sigma=\sqrt{1-\gamma^2}\,s$,
es decir $\mathbf{r}=\varphi(\sigma)\mathbf{i}+\psi(\sigma)\mathbf{j}+(\gamma/\sqrt{1-\gamma^2})\sigma\mathbf{k}$; Si $n_3\equiv 0$, de [73-30] se obtiene $t'_3(s)\equiv 0$; Si b_3 es constante, de $\varrho t'_3\equiv\tau b'_3\equiv 0$ se deduce $t_3=\gamma$; Si ϱ/τ es constante, de [73-30] y [73-31] sigue $\mathbf{t}-(\tau/\varrho)\mathbf{b}=\mathbf{m}$ constante, y multiplicando escalarmente por $\mathbf{t}$ queda $1=\mathbf{t}\,.\,\mathbf{m}$ (es decir, $\mathbf{t}$ forma ángulo constante con $\mathbf{m}$);
4º) Es $s'^2=1+k^2$, $t'_3\equiv 0$;
$1/\varrho^2=|\mathbf{t}'/s'|^2=(t_1'^2+t_2'^2)/(1+k^2)$ siendo el último numerador el cuadrado de la curvatura de flexión de la sección recta;
5º) La sección recta plana tendrá curvatura constante, es

decir será una circunferencia, pues por [55-22] el centro de curvatura será fijo.

14. 1º) $\mathbf{v}(1) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \sqrt{21}\,\mathbf{t}$;
$\mathbf{a}(1) = 12\mathbf{i} + 2\mathbf{k} = (52/\sqrt{21})\mathbf{t} + (202/\sqrt{2121})\mathbf{n}$;
$\mathbf{d}(1) = (12/101)\mathbf{t} + (2/21)\sqrt{101/21}\,\mathbf{b} =$
$= [1210/(2121\sqrt{21})]\mathbf{i} + [1868/(2121\sqrt{21})]\mathbf{j} -$
$- [236/(707\sqrt{21})]\mathbf{k}$;
2º) $\mathbf{v}(2) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 3\mathbf{t}$;
$\mathbf{a}(2) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2\mathbf{t} + \mathbf{n}$;
$\mathbf{d}(2) = (1/9)\mathbf{t} + (1/9)\mathbf{b} = (1/9)\mathbf{i} + (1/9)\mathbf{k}$.

15. 1º) $h^3/(12\varrho_0\tau_0)$; 2º) $h^3/(24\varrho_0^2)$.

16. Se aplica [73-93] con $\varrho^2\mathbf{r}''^2 = 1$ por [73-51], $\varrho'^2 = (\mathbf{r}''\mathbf{r}''')^2/\mathbf{r}''^6$, [73-64], $\mathbf{r}'^2 = 1$, $\mathbf{r}'.\mathbf{r}'' = 0$, $(\mathbf{r}'.\mathbf{r}''')^2 = \mathbf{r}''^4$ y la identidad de LAGRANGE (§ 60, ejercicio 24).

§ 74. Pág. 293.

1. Envolvente $y = 0$; Sí, pues $\partial(\mathrm{f}, \mathrm{f}_t)/\partial(x, y) \equiv 4 \neq 0$; $\mathrm{f}_{tt} \equiv -2 \neq 0$.

2. La envolvente es el par de rectas $y^2 = x^2/3$; Sí, fuera del origen, pues $\partial(\mathrm{f}, \mathrm{f}_t)/\partial(x, y) = 8y$; $\mathrm{f}_{tt} \equiv 6 \neq 0$.

3. Curva discriminante $y^4 - y^2 = 0$; Envolvente $y = \pm 1$; Lugar de puntos singulares $y = 0$;
Es $\partial(\mathrm{f}, \mathrm{f}_t)/\partial(x, y) = 4y(2y^2 - 1)$ nulo en $y = 0$ (puntos singulares) con $\mathrm{f}_{tt} \equiv -2 \neq 0$.

4. 1º) $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$;
2º) Envolvente $x^2 + y^2 = 1$; $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, con α = inclinación del radio correspondiente al punto de tangencia.

5. Hipérbolas equiláteras $\pm 2\pi xy = c$.

6. Envolvente $(x/a)^{np/(n+p)} + (y/b)^{np/(n+p)} = 1$, obtenida eliminando u, v entre las ecuaciones dadas y
$(x^n/u^{n+1}) - (y^n/v^{n+1})(u/v)^{p-1}(b/a)^p = 0$;
1º) y 2º) Astroide (cfr. § 74-1, ejemplo 12);
3º) Las involutas son elipses cuyos vértices son las proyecciones sobre los ejes de los puntos de una elipse fija. La envolvente es un sistema de cuatro rectas $\pm (x/a) \pm (y/b) = 1$.

7. Envolvente $(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 \pm b^2y^2)$, con caso particular lemniscata de BERNOULLI $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$, (§ 54-2, ejemplo 3).

9. *a*) Parábola $y = -gx^2/(2v^2\cos^2 t) + (\operatorname{tg} t)x$;
b) Parábola $y = -gx^2/(2v^2) + v^2/(2g)$.

10. Cfr. [75-23].

11. $\mathbf{r}_s \Lambda \mathbf{r}_u = (\mathbf{t} + u\mathbf{q}_s) \Lambda \mathbf{q} = 0$ con $\mathbf{t} \Lambda \mathbf{q} = \mathbf{k}\cos i$,
$\mathrm{d}\mathbf{q}/\mathrm{d}\varphi = \mathbf{k} \Lambda \mathbf{q}$, $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s = (2/\varrho) - (\cos i/p)$, si φ es el ángulo $(\mathbf{i}, \mathbf{q})$.

13. $(y - \frac{1}{2})^3 = (27/16)x^2$.

14. Es $\lim\limits_{s \to s_0} \dfrac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)}{\varrho(s) - \varrho(s_0)} =$

$$= \lim_{s \to s_0} \left[\frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) + \varrho(s_0)[\mathbf{n}(s) - \mathbf{n}(s_0)]}{\varrho(s) - \varrho(s_0)} + \mathbf{n}(s) \right] = \mathbf{n}(s_0),$$

por aplicación de [73-35] y § 36. Además
$d(s) = [\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)].\mathbf{n}(s_0)$ conserva su signo en un entorno de s_0, pues $d(s_0) = d'(s_0) = 0$ con
$d''(s_0) = \varrho''(s_0) \neq 0$ (§ 33-7). Si $\varrho''(s_0) = 0$, pero
$\varrho'''(s_0) = d'''(s_0) \neq 0$, la evoluta no tiene cúspide, sino inflexión.

15. $(x + y + z)^2 + 4(ax + by + cz) = 0$.

16. Involutas $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax\cos t - 2by\,\mathrm{sen}\,t = 0$.
Envolvente: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$.

17. La condición queda cumplida por toda esfera de radio unidad con el centro en el plano coordenado $z = 0$.

18. Los planos que pasan por $(-c^{-2}; 0; 0)$ tienen la forma $-c^2x \pm cy \pm cz = 1$ con envolventes $(y + z)^2 = 4x$ é $(y - z)^2 = 4x$.

20. Envolvente $xyz = 2k^3/9$.

21. 1º) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$;
2º) $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$.

23. $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

24. La envolvente de las superficies esféricas tangentes a los tres planos $3u - 1 = 0$, $3v - 1 = 0$, $3w - 1 = 0$ es el cono circular $1 - 2(u + v + w) - 3(u + v + w)^2 = 0$ de vértice (1/3, 1/3, 1/3) con eje que pasa por el origen. Su transformado es la solución $(x^2 + y^2 + z^2)^2 -$
$- 2(x^2 + y^2 + z^2)^2(x + y + z) - 3(x + y + z)^2 = 0$.

25. Se aplican [74-53], [74-54], [74-55] y sus derivadas para deducir (§§ 13-6, 15-4 y 15-6, *c*) $\mu\delta = -\Delta^3/\delta^3$,
$A'''x + B'''y + C'''z + D''' = \Delta/\delta$,

$$x' = -\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} . \Delta/\delta^2, \quad y' = -\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix} \Delta/\delta^2,$$

$$z' = -\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \Delta/\delta^2, \quad \alpha/A = \beta/B = \gamma/C = \Delta^2/\delta^3$$

y se sustituye en el ejercicio 11 de § 73. Para el ejemplo es:
$\delta = 6^3$, $\Delta = -6^4$, $A^2 + B^2 + C^2 = 3^2(t^2 + 2)^2$;
$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 6^2(t^2 + 1)$;
$AA' + BB' + CC' = 18t(t^2 + 2)$; $\kappa = 18^2(t^2 + 2)^2$;
$\varrho = (1/4)(t^2 + 2)^2$; $\tau = (-1/4)(t^2 + 2)^2$.

§ 75. Pág. 305.

1. $\mathbf{r} = u\cos v\mathbf{i} + u\,\mathrm{sen}\,v\mathbf{j} + kv\mathbf{k}$; $-\infty < u < +\infty$; $-\infty < v < +\infty$; No tiene puntos singulares porque $\mathbf{r}_u \Lambda \mathbf{r}_v = k\,\mathrm{sen}\,v\mathbf{i} - k\cos v\mathbf{j} + u\mathbf{k} \neq 0$. Plano tangente: $ky_0x - kx_0y + (x_0^2 + y_0^2)(z - z_0) = 0$.

2. $z_0 = -h'_0/m'_0 = -k'_0/n'_0 = t_0^3/6$ dando para arista de retroceso $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + (1/6)t^3\mathbf{k}$;

$$\begin{vmatrix} x - (2t_0/3) & y - (t_0^2/6) & z \\ 2/3 & t_0/3 & 0 \\ 2/t_0^2 & 2/t_0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. $\mathbf{t} = (\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k})/(1 + \frac{1}{2}t^2)$;
$\mathbf{n} = [-2t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}]/(2 + t^2)$;
$\mathbf{b} = (\frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \mathbf{k})/(1 + \frac{1}{2}t^2)$;
$\varrho = (1 + \frac{1}{2}t^2)^2$; $\tau = -(1 + \frac{1}{2}t^2)^2$; Superficie polar:
$\mathbf{r}(t, \mu) = \mathbf{p} + \varrho\mathbf{n} + \mu\mathbf{b} = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} +$
$+ (1/6)t^3\mathbf{k} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}t^2)[-2t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}] +$
$+ \mu(\frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \mathbf{k})/(1 + \frac{1}{2}t^2)$; $\varrho' = t^3 + 2t$; $s' = 1 + \frac{1}{2}t^2$;
$\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}s = 2t$; Arista de retroceso de la superficie polar, por [73-92] es $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(t^3 + t^5)\mathbf{i} + (1/4)(4 - 6t^2 - 5t^4)\mathbf{j} +$
$+ (1/3)(9t + 5t^3)\mathbf{k}$ con $\mu = -\tau.\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}s = 2t(1 + \frac{1}{2}t^2)^2$.
También (§ 74-5) mediante el plano normal

$x + ty + \frac{1}{2}t^2z - t - \frac{1}{2}t^3 - (t^5/12) = 0$, derivando dos veces respecto de t: $y + tz - 1 - (3/2)t^2 - (5/12)t^4 = 0$, $z - 3t - (5/3)t^3 = 0$. Superficie tangencial $\mathbf{r}(t,u) = \mathbf{p} + u\mathbf{p}' = (t+u)\mathbf{i} + (\frac{1}{2}t^2 + tu)\mathbf{j} + [(1/6)t^3 + \frac{1}{2}ut^2]\mathbf{k}$. Superficie rectificante: $\mathbf{r}(t,u) = \mathbf{p} + u(\varrho\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + (1/6)t^3\mathbf{k} + u(1 + \frac{1}{2}t^2)^2(\mathbf{i} + \mathbf{k})$, cilindro cuyas generatrices son las líneas de acción del vector de DARBOUX $\mathbf{d} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})/(1 + \frac{1}{2}t^2)$ que verifica (§ 74-5) la ecuación
$-2t(x - t) + (2 - t^2)(y - \frac{1}{2}t^2) + 2t[z - (1/6)t^3] = 0$
(plano rectificante) y la derivada respecto de t
$-2x - 2ty + 2z + 2t + (2/3)t^3 = 0$; volviendo a derivar queda un sistema incompatible en x, y, z, pues la envolvente se reduce a un punto impropio.

5. Si $\mathbf{q} = \cos\varphi\mathbf{n} + \operatorname{sen}\varphi\mathbf{b}$, es $\mathbf{p}' \Lambda \mathbf{q} = \cos\varphi\mathbf{b} - \operatorname{sen}\varphi\mathbf{n}$, $(\mathbf{p}' \Lambda \mathbf{q}) . \mathbf{q}' = \varphi' - (1/\tau) = 0$. La arista de retroceso viene dada por $\mathbf{m}_s \Lambda \mathbf{m}_u = \mathbf{p}' \Lambda \mathbf{q} + u(\mathbf{q} \Lambda \mathbf{q}') = [1 - (u/\varrho)\cos\varphi](\cos\varphi\mathbf{b} - \operatorname{sen}\varphi\mathbf{n}) = \mathbf{0}$. La normal $\mathbf{m}$, la principal $\mathbf{n}$ y la recta polar forman un triángulo rectángulo cuyo cateto ϱ sobre $\mathbf{n}$ e hipotenusa u sobre $\mathbf{m}$ abarcan el ángulo φ.

6. En ejercicio 5, es $\mathbf{m}' = u'(\cos\varphi\mathbf{n} + \operatorname{sen}\varphi\mathbf{b})$ con $u = \varrho/\cos\varphi$, $\varphi' = 1/\tau$, es decir $|\mathbf{m}'| = |u'|$.

7. $\mathbf{p}(\sigma) = \mathbf{r}(\sigma) + u(\sigma)\mathbf{t}(\sigma)$ tal que $\mathbf{p}'(\sigma) . \mathbf{t}(\sigma) = 0$ da $1 + u' = 0$, $u = -\sigma + \sigma_0 = -\sigma$, es decir $\mathbf{p}(\sigma) = \mathbf{r}(\sigma) - \sigma\mathbf{t}(\sigma)$. Es $\mathbf{p}' = -\sigma\mathbf{n}/\varrho$ con plano normal de C coincidente con el rectificante de Γ.

9. Envolvente $\mathbf{p}(u) = r(\cos u + u \operatorname{sen} u)\mathbf{i} + r(\operatorname{sen} u - u\cos u)\mathbf{j}$; cfr. § 55, ejercicio 15, *a*; $\mathbf{p}'(u) = ru\cos u\mathbf{i} + ru \operatorname{sen} u\mathbf{j} = -ru\mathbf{n} = -u\mathbf{n}/(\varrho\sqrt{r^2 + k^2})$.

10. $\mathbf{r}(t,u) = r(\cos t - u \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + r(\operatorname{sen} t + u\cos t)\mathbf{j} + k(t + u)\mathbf{k}$. Intersección con $z = 0$ por $u = -t$ dando $\mathbf{r}(t, -t) = \mathbf{p}(t)$ evolvente, ejercicio 9.

11. Aplíquese la definición de punto central y § 74-1, teor. 3.

12. 1º) Circunferencia de garganta $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ para cada uno de los sistemas de generatrices (§ 62-6, d_1);
2º) Cada una de las rectas $y = \pm x$, intersección del paraboloide con el plano $z = 0$, para cada uno de los sistemas de generatrices (§ 62-6, d_2) respectivamente secantes;
3º) Recta $x = 6/13$, $y = 3t/13$, $z = -2t/13$.

13. Paraboloide $3xy - 2zx - 2y = 0$; Plano director $3y = 2z$; líneas de estricción: $\begin{cases} x = 6/13 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y eje x (es la reglada del ejercicio 12, 3º), que sitúan los ejes nuevos para reducir la cuádrica (ejercicio 12, 2º); $8Z/13 = X^2 - Y^2$ (cfr. § 63-8, *b*); Reglada del sistema $\begin{cases} x = t \\ y = 2tz/(3t - 2) \end{cases}$, tiene puntos centrales sobre el eje x, para $t = 0$ en el origen, intercambiando en [75-5] x por z da $m' = -4/(3t - 2)^2 = -1$, $k' = 1$, $n' = h' = 0$ y resulta el haz de planos tangentes $-z_0x = y$ de puntos de contacto $(0; 0; z_0)$ y parámetro de distribución -1.

14. $y^2 + xy - yz + zx - 2y = 0$;
$(1/2)X^2 + (1/4)(\sqrt{17} + 1)Y^2 - (1/4)(\sqrt{17} - 1)Z^2 = 1/2$.

15. 1º) $(x - 5)/3 = (y + 5)/(-4) = (z - 7)/5$;
$(x - 5)/4 = (y + 5)/(-3) = (z - 7)/5$;
2º) $(x + 6)/3 = (y + 2)/2 = (z - 3)/(-2)$;
$(x + 6)/(-3) = (y + 2)/2 = (z - 3)/6$.

16. Generatrices paralelas a $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$, de directriz hiperbólica $(x + y)(x - 2y) = 1$; $(3/2)\sqrt{2}\,X^2 - (3/2)\sqrt{2}\,Y^2 = 1$.

§ 76. Pág. 318.

1. Hipérbolas verticales y elipses horizontales; no son ortogonales, a menos que $v = 0$ ó $u = \frac{1}{2}k\pi$, pues $ds^2 = (4 + 5\cos^2 u)\operatorname{ch}^2 v\, du^2 + (5/2)\operatorname{sen} 2u \operatorname{sh} 2v\, du\, dv + [(4 + 5\operatorname{sen}^2 u)\operatorname{sh}^2 v + \operatorname{ch}^2 v]dv^2$. Hiperboloide ordinario de eje transverso k es: $\mathbf{r} = a\cos u \operatorname{sh} v\mathbf{i} + b \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v\mathbf{j} \pm c \operatorname{ch} v\mathbf{k}$; $(-\pi < u \leqslant \pi;\ 0 < v < +\infty)$.

2. $$x = \pm\sqrt{\frac{(a^2 - k_1)(a^2 - k_2)(a^2 - k_3)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}$$
y análogamente para y, z. Es
$$ds^2 = \frac{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)}{4(a^2 - k_1)(b^2 - k_1)(c^2 - k_1)}dk_1^2 + \frac{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)}{4(a^2 - k_2)(b^2 - k_2)(c^2 - k_2)}dk_2^2.$$

3. 1º) Ángulo $\theta = \pi/4$;
2º) Ángulo $\theta = \operatorname{arc\,cos}[(1 - \cos^2\varphi)/(1 + \cos^2\varphi)]$;
3º) $\varrho = a(1 + \cos^2\varphi)^{3/2}/(5 + 3\cos^2\varphi)^{1/2}$.

4. Aplíquese la última igualdad [72-57] y la [67-36] para el cambio de dos variables.

5. 1º) Indicatriz $(x^2/16) + (y^2/4) = 1$; $K = 5/32$; $H = 1/64$; $\varrho_n = 32/5$ (EULER); $\varrho = (32/5)\sqrt{2/3}$ (MEUSNIER);
2º) Indicatriz $(x^2/9) - (y^2/4) = \pm 1$; $K = -5/72$; $H = -1/36$; $\varrho_n = -72/5$; $\varrho = (-72/5)\sqrt{2/3}$;
3º) Plano tangente $z = 0$, se corta por $z = -h$, se desprecia h^2 y se hace $h = \frac{1}{2}$ dando indicatriz $x^2 + 4y^2 = 9$; $K = 5/18$; $H = 4/81$; $\varrho_n = 18/5$; $\varrho = (18/5)\sqrt{2/3}$;
4º) Plano tangente $z = 0$ a lo largo del eje y; Indicatriz: $x = \pm 4/\sqrt{3}$; $K = 3/32$; $H = 0$; $\varrho_n = 32/3$; $\varrho = (32/3)\sqrt{2/3}$.

6. $g_{11} = 1$; $g_{12} = 0$; $g_{22} = 5$; $W = \sqrt{5}$; $D_{11} = -2/\sqrt{5}$; $D_{12} = 0$; $D_{22} = -2/\sqrt{5}$;
$\varrho_n = \sqrt{5}(dr^2 + 5\,d\lambda^2)/[-2(dr^2 + d\lambda^2)]$; $\varrho_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\varrho_2 = \frac{1}{2}5^{3/2}$; $K = -6/5^{3/2}$; $H = 4/25$.

7. Tomando como parámetros $u = x$, $v = y$, es $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (z_x\,dx + z_y\,dy)^2 = (1 + z_x^2)dx^2 + 2z_xz_y\,dx\,dy + (1 + z_y^2)dy^2$; $W = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$; $D_1 = z_{xx}/W$; $D_2 = z_{xy}/W$; $D_3 = z_{yy}/W$; $t_1 = dx/ds$; $t_2 = dy/ds$ y se aplica [76-30].

8. Según § 70, ejercicio 24, los extremos de [76-30] vienen dados por $(D_{11}D_{22} - D_{12}^2) - (D_{11}g_{22} - 2D_{12}g_{12} + D_{22}g_{11})(1/\varrho) + (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(1/\varrho^2) = 0$, equivalente a poner $(g_{12} - D_{12}\varrho)^2 - (g_{11} - D_{11}\varrho)(g_{22} - D_{22}\varrho) = 0$, de donde (§ 19-1, b_1)
$$K = \frac{g_{11}D_{22} - 2g_{12}D_{12} + g_{22}D_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} =$$

$$= \frac{(1+z_x^2)z_{yy} + (1+z_y^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy}}{2(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{D}_{11}\mathrm{D}_{22} - \mathrm{D}_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}.$$

9. Por [76-11] y § 13-6 es
$\mathrm{D}_{11}\mathrm{D}_{22}\mathrm{W}^2 = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) . (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv} & \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{vv} & \mathbf{r}_u^2 & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{vv} & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv} & \tfrac{1}{2}\partial g_{11}/\partial u & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{uu} \\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{vv} & g_{11} & g_{12} \\ \tfrac{1}{2}\partial g_{22}/\partial v & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix};$$

$\mathrm{D}_{12}^2\mathrm{W}^2 = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uv}^2 & \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{uv} & \mathbf{r}_u^2 & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{uv} & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uv}^2 & \tfrac{1}{2}\partial g_{11}/\partial v & \tfrac{1}{2}\partial g_{22}/\partial u \\ \tfrac{1}{2}\partial g_{11}/\partial v & g_{11} & g_{12} \\ \tfrac{1}{2}\partial g_{22}/\partial u & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

Restando, se aplica ejercicio 8.

10. La meridiana es una sección principal por ser desarrollable su normalía; la otra sección principal tiene su centro de curvatura en la intersección de su plano con el eje del toro (§ 76-4).

11. 1º) $(0; \pm 1/\sqrt{14}; \pm 4\sqrt{3/14})$;
2º) $(0; \pm 12/\sqrt{153}; \pm 156/\sqrt{153})$;
3º) $(0; \pm 6; 9/4)$.

12. Teorema de APOLONIO de las cónicas basado en el primer invariante del tensor bidimensional respecto del grupo lineal (§ 63, ejercicio 11).

13. 1º) Por § 67-5, ejemplo 3, es
$(t_1x_0/a^2) + (t_2y_0/b^2) + (t_3z_0/c^2) = 0$, de donde
$c^4(b^2x_0t_1 + a^2y_0t_2)^2 = a^4b^4z_0^2(1 - t_1^2 - t_2^2)$ que da

$$\frac{1}{\varrho_n} = \frac{b^2(c^2-a^2)t_1^2 + a^2(c^2-b^2)t_2^2 + a^2b^2}{\sqrt{b^4c^4x_0^2 + c^4a^4y_0^2 + a^4b^4z_0^2}}.$$

Por pertenecer (rt_1, rt_2, rt_3) al elipsoide es
$1/r^2 = [b^2(c^2-a^2)t_1^2 + a^2(c^2-b^2)t_2^2 + a^2b^2]/(a^2b^2c^2)$.
Por [60-51] es $d = 1/\sqrt{(x_0^2/a^4) + (y_0^2/b^4) + (z_0^2/c^4)} =$
$= a^2b^2c^2/\sqrt{b^4c^4x_0^2 + c^4a^4y_0^2 + a^4b^4z_0^2}$;
2º) $\mathrm{H} = (z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2)/(1 + z_x^2 + z_y^2)^2 =$
$= a^6b^6c^6/(b^4c^4x_0^2 + c^4a^4y_0^2 + a^4b^4z_0^2)^2$ por ser
$a^2b^2z_0^2 + c^2a^2y_0^2 + b^2c^2x_0^2 = a^2b^2c^2$;
3º) $\mathrm{A} = \pi r_1r_2 = \pi d\sqrt{\varrho_1\varrho_2} = \pi abc/d$.
Puede aplicarse también § 70-8, ejemplo 4.

14. Se aplica [76-31], fig. 253.

15. $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = u^2 + k^2$, $\mathrm{D}_{11} = \mathrm{D}_{22} = 0$,
$\mathrm{D}_{12} = -k/\sqrt{u^2+k^2}$; El ejercicio 8 da $\mathrm{K} = 0$,
$\mathrm{H} = -k^2/(u^2+k^2)^2$; Las líneas asintóticas son las líneas de coordenadas $u = $ cte. (hélices), $v = $ cte. (rectas generatrices horizontales).

16. Es $(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s)\mathbf{t}$ la rotación instantánea de **t n g**, respecto de **t m b**, y la de este triedro viene dada por $\mathbf{d} = (1/\tau)\mathbf{t} + (1/\varrho)\mathbf{b}$ (§ 73-6) siendo $\mathbf{m} = \cos\theta . \mathbf{n} - \operatorname{sen}\theta . \mathbf{g}$;
$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{m} = \cos\theta . \mathbf{g} + \operatorname{sen}\theta . \mathbf{n}$. Análogamente a [73-43] es
$\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}s = \omega \wedge \mathbf{n} = (1/\tau_g)\mathbf{g} - (1/\varrho_n)\mathbf{t}$, de donde
$1/\tau_g = (\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}s) . \mathbf{g}$; $1/\varrho_n = -(\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}s) . \mathbf{t}$.

17. La involución queda determinada por los rayos dobles o direcciones asintóticas [76-34].

18. Los extremos de [76-30] se determinan eliminando $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ en
$1/\varrho = (\mathrm{D}_{12}\,\mathrm{d}u + \mathrm{D}_{22}\,\mathrm{d}v)/(g_{12}\,\mathrm{d}u + g_{22}\,\mathrm{d}v) =$
$= (\mathrm{D}_{11}\,\mathrm{d}u + \mathrm{D}_{12}\,\mathrm{d}v)/(g_{11}\,\mathrm{d}u + g_{12}\,\mathrm{d}v)$; Cfr. § 70, ejercicio 24.

19. $g_{12} = 0$ equivale a ortogonalidad; $\mathrm{D}_{12} = 0$ a conjugación.

20. Para que $\mathrm{d}\mathbf{r} + \lambda\,\mathrm{d}\mathbf{n} + \mathbf{n}\,\mathrm{d}\lambda$ sea paralelo a $\mathbf{n}$, con $\mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\mathrm{d}\mathbf{n}$ normales a $\mathbf{n}$, debe ser $\mathrm{d}\mathbf{r} + \lambda\,\mathrm{d}\mathbf{n} = \mathbf{0}$.

21. De $\mathbf{r}_u\,\mathrm{d}u + \mathbf{r}_v\,\mathrm{d}v + \varrho(\mathbf{n}_u\,\mathrm{d}u + \mathbf{n}_v\,\mathrm{d}v) = \mathbf{0}$,
multiplicando escalarmente por $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ se obtiene
$g_{11}\,\mathrm{d}u + g_{12}\,\mathrm{d}v - \varrho(\mathrm{D}_{11}\,\mathrm{d}u + \mathrm{D}_{12}\,\mathrm{d}v) = 0$,
$g_{12}\,\mathrm{d}u + g_{22}\,\mathrm{d}v - \varrho(\mathrm{D}_{12}\,\mathrm{d}u + \mathrm{D}_{22}\,\mathrm{d}v) = 0$, por [72-45], [76-11] y ser $\mathbf{r}_{uu} . \mathbf{n} = -\mathbf{r}_u . \mathbf{n}_u$, etc., al derivar $|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$. Elimínese entonces, bien ϱ (ejercicio 18), bien $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ (ejercicio 8).

§ 77. Pág. 335.

1. Para θ colatitud y λ longitud, se aplica [77-46] como radio polar de la integral logarítmica (§ 54-2, ejemplo 2; § 34-7) dando $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta = ke^{b\lambda}$, es decir $\ln\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta = b\lambda + c$. Las constantes b y c se determinan por la posición y dirección iniciales, siendo $b\,\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\theta/\operatorname{sen}\theta$.

2. Teniendo en cuenta $1/(1+t^2) = \cos^2\varphi$, para la primera de
$\mathrm{X}/a = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\varphi\sec l) = \mathrm{f}(l) = \varphi + a_1l + a_2l^2 + a_3l^3 + \ldots$,
resulta $\mathrm{f}'(0) = \mathrm{f}'''(0) = \mathrm{f}^{\mathrm{V}}(0) = \mathrm{f}^{\mathrm{VII}}(0) = 0$, $\mathrm{f}(0) = \varphi$,
$a_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{f}''(0) = \tfrac{1}{2}t/(1+t^2)$,
$a_4 = (1/4!)\mathrm{f}^{\mathrm{IV}}(0) = (1/24)(5t - t^3)/(1+t^2)^2$,
$a_6 = (1/6!)\mathrm{f}^{\mathrm{VI}}(0) = (1/720)(61t - 58t^3 + t^5)/(1+t^2)^3$.
Para la segunda, será preferible considerar

$$\frac{2\mathrm{Y}}{a} = \ln\frac{1 + \cos\varphi\left(l - \frac{1}{3!}l^3 + \frac{1}{5!}l^5 - + \ldots\right)}{1 - \cos\varphi\left(l - \frac{1}{3!}l^3 + \frac{1}{5!}l^5 - + \ldots\right)} =$$

$$= \ln\Big[1 + 2\cos\varphi . l + 2\cos^2\varphi . l^2 + \left(2\cos^3\varphi - \frac{\cos\varphi}{3}\right)l^3 +$$

$$+ \left(2\cos^4\varphi - \frac{2\cos^2\varphi}{3}\right)l^4 +$$

$$+ \left(2\cos^5\varphi - \cos^3\varphi + \frac{\cos\varphi}{60}\right)l^5 + \mathrm{O}(l^6)\Big] = 2\cos\varphi . l +$$

$$+ \frac{2\cos^3\varphi - \cos\varphi}{3}l^3 + \frac{24\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + \cos\varphi}{60} . l^5 + \mathrm{O}(l^7),$$

obtenida teniendo en cuenta el desarrollo en serie del seno y de

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 + \ldots,$$

$$\alpha = 2\cos\varphi . l + 2\cos^2\varphi . l^2 + \left(2\cos^3\varphi - \frac{\cos\varphi}{3}\right) . l^3 + \ldots$$

3. Se aplica a [77-63] el desarrollo en serie binómica (§ 45-5, a):

$$(1 - \cos^2\varphi\operatorname{sen}^2 l)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2 l +$$

$$+ \frac{1.3}{2.2.2}\cos^4\varphi\operatorname{sen}^4 l + \ldots$$

y el desarrollo de

$$\operatorname{sen} l = l - \frac{1}{3!} l^3 + \frac{1}{5!} l^5 - \ldots,$$

teniendo en cuenta que $1/(1+t^2) = \cos^2 \varphi$.

4. De la segunda de las [77-55] se obtiene:

$$2\frac{Y}{a} = \ln \frac{1+\operatorname{sen}\psi}{1-\operatorname{sen}\psi} =$$

$$= \ln\left(1 + 2\psi + 2\psi^2 + \frac{5}{3}\psi^3 + \frac{4}{3}\psi^4 + \frac{61}{60}\psi^5 + \ldots\right) =$$

$$= 2\psi + \frac{1}{3}\psi^3 + \frac{1}{12}\psi^5 + O(\psi^7)$$

de donde

$$\frac{Y^2}{a^2} = \psi^2 + \frac{1}{3}\psi^4 + O(\psi^6), \quad \frac{Y^4}{a^4} = \psi^4 + O(\psi^6),$$

las que combinadas convenientemente dan

$$\frac{\psi^2}{2} + \frac{5}{24}\psi^4 + O(\psi^6) = \frac{Y^2}{2a^2} + \frac{Y^4}{24a^4} + O\left(\frac{Y^6}{a^6}\right),$$

y se sustituye en

$$m = \frac{1}{\cos\psi} = 1 + \frac{1}{2}\psi^2 + \frac{5}{24}\Psi^4 + O(\Psi^6)$$

obtenida de [77-63].

5. Es $\operatorname{tg}(-\gamma) = dY/dX$, donde se sustituye

$$\frac{dY}{dX} = \frac{d\psi}{\cos\psi\, dp} \cdot \frac{d\psi}{\cos^2\psi} = -\operatorname{tg} l_0 \operatorname{sen} p\, dp,$$

deducidas de [77-55] y [77-61], y se tiene en cuenta [77-57]. Para el desarrollo, se tiene en cuenta $1/(1+t^2) = \cos^2\psi$ y se aplica

$$\operatorname{sen}\varphi = t \cdot \cos\varphi, \quad \operatorname{tg} l = l + \frac{1}{3} l^3 + \frac{2}{15} l^5 + O(l^6).$$

§ 78. Pág. 367.

4. $\displaystyle\int_1^x e^t\, d(t + [t]) = e^\xi(x + [x] - 2) \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \to 1+0 \\ -e & \text{si } x \to 1-0. \end{cases}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x\, d|x| = -\int_{-1}^{0} x\, dx + \int_0^1 x\, dx = 1.$

6. $\displaystyle\int_0^5 (x^2+1)\, d[x] = \sum_{n=1}^{5} (n^2+1) = 60.$

§ 79. Pág. 374.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x\, d|x| = x|x| \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} |x|\, dx = 2 - 1 = 1.$

2. $\displaystyle\int_0^5 (x^2+1)\, d[x] = (x^2+1)[x] \Big|_0^5 - 2\int_0^5 [x]x\, dx = 130 - 70 = 60.$

3. Basta que $\alpha(x)$ sea una R-integral indefinida

$$\alpha(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt,$$

pues entonces (§ 48-6, *c*) es:

$$\int_a^b \alpha(x)u(x)\, dx = \alpha(b)U(b) - \int_a^b U(x)\varphi(x)\, dx =$$

$$= \alpha(b)U(b) - U(\xi)[\alpha(b) - \alpha(a)] =$$

$$= \alpha(a)\int_a^\xi u(x)\, dx + \alpha(b)\int_\xi^b u(x)\, dx.$$

4. Aplíquese [79-8], observando que la integral de $\operatorname{sen} x$ sobre cualquier intervalo no supera a 2.

§ 80. Pág. 392.

1. $x_r = r/n$ y $\delta_r = 1/n$ da

$$\frac{u}{1}\sum_{r=1}^{n} \ln\frac{r}{n} = \ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \to \ln e^{-1} = -1 =$$

$$= \int_0^1 \ln x\, dx = \Big[\, x\ln x - x \,\Big]_{\epsilon\to 0}^{1}.$$

2. *a*) Integrando positivo. En ∞ integral convergente si $k = 2 - s > 1$; en 0 integral convergente si $h = 1 - s < 1$. Convergencia se da para $0 < s < 1$;
b) Integrando positivo cerca del límite inferior; convergencia para $h = s - 1 < 1$; en ∞ el integrando cambia de signo, integral absolutamente convergente si $k = s > 1$, pero por DIRICHLET es condicionalmente convergente si $s > 0$, pues $x^{-s} \downarrow 0$ e $\int \operatorname{sen} x\, dx$ se conserva acotada. Convergencia en $0 < s < 2$, absoluta en $1 < s < 2$. Para $s < 0$ es divergente en ∞, pues $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}$ se hace en valor absoluto tan grande como se quiera. Resulta $2\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(y^2)\, dy$ convergente, aunque oscile $\operatorname{sen}(y^2)$ para $y \to \infty$.

3. 1.

4. 0; 0. Cuando el valor principal en un entorno simétrico suficientemente pequeño del punto singular sea cero.

5. Por transformación trivial en caso necesario, podemos suponer siempre $k > 0$. Haciendo $kx = t$, la primera se reduce al ejercicio 2-*b*). La segunda sólo es condicionalmente convergente para $0 < a < 1$.

8. Si $\alpha(x)$ es de variación acotada, entonces es acotada y diferencia de dos funciones crecientes acotadas (§ 55-9, *d*). Si $\alpha(x)$ de variación acotada tiende a cero, es diferencia de dos funciones crecientes que se puede suponer tienden también a cero sumando y restando el límite lateral (§ 25-4) común, siempre existente (pruébese).

§ 81. Pág. 402.

1. $u_{11} = 0$; $u_{1,n} = -2/[n(n+1)]$, $(n > 1)$; $u_{m,1} = 2/[m(m+1)]$, $(m > 1)$; $u_{m,n} = 2(m-n)/[(m+n)(m+n-1)(m+n-2)]$, $(m+n > 2)$ que comprende las dos anteriores. Suma por filas -1; por columnas $+1$; doble, no existe; por triángulos, 0; diagonal 0, pues esta última es convergente por no superar en valor absoluto sus sumas parciales a $(m+n-1)/[2(m+n)(m+n-2)] \to 0$ para $(m+n) \to +\infty$.
2. Por filas $(1, +\infty, -\infty)$; por columnas $(-1, +\infty, -\infty)$; doble (no existe, $+\infty, -\infty$); diagonal (oscilante); por triángulos (0).

§ 82. Pág. 412.

4. $16a^3/12$.
5. $8 \ln(1 + \sqrt{2})$; es impropia convergente, § 87-2.
6. 0.

§ 83. Pág. 421.

3. Para la región $z > 0$ el valor es $\pi/8$; con la opuesta, es cero.
4. 1/50 400.
6. $(e + e^{-1})/4$.
7. $(\pi/4) - (1/2)$.
8. $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\text{Arc tg}\,\frac{1}{2}$.
9. $\int_a^b d\theta \int_0^a r \ln r^2\, dr = a^4 b(\ln a - \frac{1}{2})$

§ 84. Pág. 439.

1. $e^{\frac{1}{2}\pi} - e^{-\frac{1}{2}\pi}$.
2. $\pi abc(5\sqrt{2} - 4)/24$.
3. $4\pi a^3/35$.
4. Mediante coordenadas cilíndricas resulta $(\pi/4)(k^2 - h^2)(2a^2 - k^2 - h^2)$.
5. $2\sqrt{2ab}(a + b)/3$.
6. $\pi\sqrt{a\,b}(a + b)$.
7. $2\pi ab(2\sqrt{2} - 1)/3$.
8. $4\pi r^2$.
9. $(3a/8;\ 3b/8;\ 3c/8)$; $\pi abc(2a + 3b + 6c)/112$; $\pi abc(2a + 3b + 6c - 48)/112$.
10. $(3R/8;\ 3R/8;\ 3R/8)$; $19\pi R^3/52$; $\pi R^3(19R - 48)/52$.
11. $VG = 2h/3$.
12. $S = 2\pi^2 r[a \pm (2r/\pi)]$; $V = \pi^2 r^2[a \pm (4r/3\pi)]$.
13. $2\pi^2 ab$.
14. *a*) $I = \frac{1}{2}MR^2$; $\varrho = R/\sqrt{2}$;
    b) $I = M[(R^2/4) + (a^2/12)]$;
    c) $I = M[(R^2/4) + (a^2/3)]$.
15. $I = 2MR^2/5$; $\varrho = R\sqrt{2/5}$.
16. $I = M[R^2 + (3/4)r^2]$.
17. $I = Mb^2/4$; $\varrho = b/2$.

20. $I_u = u_x^2 I_x + u_y^2 I_y + u_z^2 I_z - 2u_x u_y I_{xy} - 2u_y u_z I_{yz} - 2u_z u_x I_{zx}$;
$I_x = I_y = 3M[r^2 + (1/4)h^2]/20$;
$I_z = 3Mr^2/10$;
$I_u = (3/20)[r^2 + (1/4)h^2]M(u_x^2 + u_y^2) + 3Mr^2 u_z^2/10$;
$I_u = M\varrho_u^2$; $u_x/\varrho_u = x$, etc.;
$[(x^2 + y^2)/a^2] + (z^2/c^2) = 1$.

§ 85. Pág. 450.

1. *a*) No son uniformemente convergentes ni $S_n(x)$ ni $S_n'(x)$. La $S_n(x)$ es derivable término a término Ambas $S_n(x)$ y $S_n'(x)$ son integrables término a término;
b) No son uniformemente convergentes ni $S_n(x)$ ni $S_n'(x)$. La $S_n(x)$ no es derivable término a término en $x = 0$. La $S_n(x)$ no es integrable término a término, pero sí lo es $S_n'(x)$;
c) La $S_n(x)$ es uniformemente convergente, pero no lo es $S_n'(x)$. La $S_n(x)$ no es derivable término a término en $x = 0$. Ambas $S_n(x)$ y $S_n'(x)$ son integrables término a término;
d) La $S_n(x)$ es uniformemente convergente, pero no lo es $S_n'(x)$. La $S_n(x)$ es derivable término a término. Ambas $S_n(x)$ y $S_n'(x)$ son integrables término a término.
2. $S(x)$ es convergente uniformemente en $[0; 1]$, pero no derivable término a término en $x = 1$. La serie de las derivadas no converge uniformemente en el entorno de $x = 1$.
4. No está garantizada en [85-5] la ley disociativa (§ 22-1, *e*, nota 1). Es $\text{sen}(x/n)/n = O(x/n^2)$, (§ 43-3, *c*), mientras que $\cos(x/n)$ no tiende a 0, (§ 22-1, *d*).
5. $\int_0^x (\sum_1^\infty u_k(t))\,dt = \sum_1^\infty \int_0^x u_k(t)\,dt + 2 = \ln(1 + x^2)/\ln 2$. Es $\lim R_{k-1}(1/k) = \infty$.
6. Divídase $[a, b]$ en m partes de manera que la norma de la partición (§ 48-2) sea menor que $\varepsilon/3K$. Para cada x_r existe n_r número natural tal que $|S_n(x_r) - S_{n+p}(x_r)| < \varepsilon/3$ para $n > n_r$ y todo p número natural. Sea N el mayor de los $n_0, n_1, \ldots, n_m$ y aplíquese § 35-1 para probar en $[a, b]$ que $|S_n(x) - S_{n+p}(x)| < \varepsilon$ para $n > N$ y todo p.
7. Es $\left|\int_a^b [S(x) - S_n(x)]dx\right| \leqslant \left|\int_a^{c-\delta}\right| + \left|\int_{c+\delta}^b\right| + 4\delta K < \varepsilon$.

§ 86. Pág. 464.

1. No puede tomarse límite bajo el signo integral, pues a pesar de ser $\lim [y/(y + x)^2] = 0$ para $y \to 0^+$, es $\varphi(0^+) = 1 \neq 0$.
2. Por § 86-2, Teor. 3, existe y es
$$g_y(x, y) = g_y(a, y) + \int_a^x g_{xy}(\xi, y)\,d\xi,$$
a la que se aplica § 50-1, *a*).
4. La integral derivada es uniformemente convergente respecto de $y \geqslant c > -1$ (§§ 80-7 y 37-5).
5. Es $\varphi'(y) = \int_0^\pi (1 + y\cos x)^{-1}\,dx = \pi/\sqrt{1 - y^2}$

(§ 53, ejercicio 3) y de aquí $\varphi(y) = \pi \operatorname{Arc\,sen} y + \varphi(0)$ con $\varphi(0) = 0$.

6. Intégrese J_0' por partes (la $t\,dt/\sqrt{1-t^2}$).

8. Aplíquese [51-10] e intégrese $\int_0^\infty e^{-yx}\cos x\,dx = y/(1+y^2)$ desde a hasta b.

9. Aplíquese la expresión integral de J_0, inviértase el orden de integración y con

$$2\operatorname{sen}(ax)\cos(bxt) = \operatorname{sen}(a+bt)x + \operatorname{sen}(a-bt)x$$

aplíquese [86-16], resultando $\frac{1}{2}\pi$ si $a > b$, $\operatorname{arc\,sen}(a/b)$ si $a < b$.

11. Si $I_n(x) = \int_0^\infty t^n e^{-t^2x}\,dt$ o bien se deriva respecto de x dando $I_n(x) = -I'_{n-2}(x)$, o bien se integra por partes dando $I_n = (n-1)I_{n-2}/(2x)$. De una u otra resulta:

$$I_n(1) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)! \qquad \text{si } n \text{ es impar;}$$

$I_n(1) = \sqrt{\pi}\,\dfrac{(n-1)!!}{2^{(n+2)/2}}$ si n es par (con [53-15]), donde $m!!$ es el producto de factores decrecientes de dos en dos unidades (§ 53-2, ejemplo 2).

13. De $\varphi'(y) = -2y\varphi(y)$ se deduce $\varphi(y) = \varphi(0)\,.\,e^{-t^2/a}$, donde $\varphi(0)$ se obtiene de [53-15].

14. La primera integral no existe en $\tau = 0$, ni es uniformemente convergente en el entorno de $\tau = 0$, y lo mismo para la segunda en $y = 0$.

15. Aplíquese § 86-2, Teor. 2. La $\int_0^T e^{-\tau^2 y}\,d\tau \downarrow 0$ con $y \to +\infty$, por aplicación de § 86-2, Teor. 1, a la $f(\tau,\eta) = e^{-\tau^2/\eta}$ si $\eta > 0$, $f(\tau, 0) = 0$, pues $f(\tau,\eta) \leqslant f(T,\eta)$ para $\eta \geqslant 0$. Existe

$$G(T) = \int_0^\infty \operatorname{sen} y\,dy \int_0^T e^{-\tau^2 y}\,d\tau$$

por el criterio de Dirichlet (§ 80-8). Por ser

$$\int_0^Y e^{-\tau^2 y}\operatorname{sen} y\,dy =$$

$$= (1 - e^{-\tau^2 Y}(\tau^2\operatorname{sen} Y + \cos Y))/(1+\tau^4) = O(\tau^{-4}),$$ la

$$H(Y) = \int_0^\infty d\tau \int_0^Y e^{-\tau^2 y}\operatorname{sen} y\,dy$$

converge absolutamente (§ 80-7; confr. § 87-4).

16. Por ser $\sum_0^\infty n!a_n$ convergente, la $\sum_0^\infty a_n x^n$ es uniformemente convergente sobre $(0, X)$ y resulta

$$\int_0^X e^{-x}\left(\sum_0^\infty a_n x^n\right)dx = \sum_0^\infty a_n \int_0^X e^{-x} x^n\,dx.$$

Basta demostrar que

$$\lim \sum_0^\infty a_n \int_X^\infty e^{-x} x^n\,dx = 0$$

para $X \to \infty$. Es

$$\int_X^\infty e^{-x} x^n\,dx = e^{-X}(X^n + nX^{n-1} + \ldots + n!)$$

y si $r_p = \sum_p^\infty n!a_n \to 0$ para $p \to \infty$, resulta

$$\sum_0^\infty a_n \int_X^\infty e^{-x} x^n\,dx = e^{-X}\sum_0^\infty r_p X^p/p! \to 0$$

para $X \to \infty$, pues se fija P para que si $p > P$ sea $|r_p| < \varepsilon$ y entonces se toma X suficientemente grande para que

$$(\max_{p\leqslant P} r_p)\, e^{-X}\sum_0^P X^p/p! < \varepsilon, \text{ así como } \varepsilon e^{-X}\sum_P^\infty X^p/p! < \varepsilon$$

(§ 45-1).

§ 87. Pág. 472.

1. $8(\sqrt{2}-1)/3$.
2. $\pi^2/4$.
3. Con la misma sustitución que en § 87-2, ejemplo, y aplicando [87-4] y § 86, ejercicio 11, resulta $\frac{1}{2}\pi(aC + 2bB + cA)/(ac - b^2)^{3/2}$.
4. Pasando a coordenadas polares, el método a) reduce el cálculo al de

$$2\pi\int_0^1 \frac{1}{r}\operatorname{sen}\frac{1}{r}\,dr$$

integral simple impropia condicionalmente convergente (§ 80-9, ejemplo 2). El método b) da valor distinto, pues la integral doble en D_n vale

$$2\pi\int_{\frac{1}{(2n+1)\pi}}^1 \frac{1}{r}\operatorname{sen}\frac{1}{r}\,dr + 2\pi\sum_{p=n+1}^{2n}\int_{\frac{1}{(2p+1)\pi}}^{\frac{1}{2p\pi}} \frac{1}{r}\operatorname{sen}\frac{1}{r}\,dr,$$

cuyo segundo sumando es mayor que

$$2\pi\frac{n}{(4n+1)\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} t\,dt = 4n/(4n+1) \to 1$$

para $n \to \infty$, a agregar al valor límite del primer sumando

$$2\pi\int_0^1 \frac{1}{r}\operatorname{sen}\frac{1}{r}\,dr,$$

Según definición de § 87-1, la integral doble impropia dada no es convergente.

6. Por rectángulos resultan respectivamente los límites $\frac{1}{2}(1/\sqrt{ac-b^2})\operatorname{Arc\,cos}(b/\sqrt{ac})$; 0. Por cuartos de círculo son oscilantes. Según definición de § 87-1 no son convergentes.
7. Según definición de § 87-1 no son convergentes, pues no lo son

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(xy)\,dy \;, \quad \int_0^\infty \cos(xy)\,dx.$$

Por rectángulos, la primera diverge, pero la segunda converge a $\frac{1}{2}\pi$.

§ 88. Pág. 486.

1. $a)$ 16/3; $b)$ 14/3.
2. π.
3. $a)$ 5/2; $b)$ 13/6.
4. $a)$ 3; $b)$ 7/2; $c)$ 9/2; $d)$ 19/6.
5. 2.
6. $4\ln(3+2\sqrt{2})$.
7. 1º) $\pi ab/2$; 2º) ab; 3º) $(\pi ab/4)-(ab/2)$.
8. $(4-\pi)a^2/2$.
9. $3\pi a^2/8$; poner la astroide en forma paramétrica: $x=a\cos^3 t$, $y=b\,\mathrm{sen}^3\,t$.
10. Momentos: 1º estático -2π; 2º) de inercia 3π; del círculo respecto del eje y (cambiado de signo).
11. Momento polar $3a^3$; póngase la astroide en forma paramétrica: $x=a\cos^3 t$, $y=b\,\mathrm{sen}^3\,t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$; radio de giro $a/\sqrt{2}$.
12. 5π; momento estático respecto del eje x.

§ 89. Pág. 492.

1. $U=e^{xy}+C$.
2. $a)$ $U=x^2+3xy+y^2+C$;
   $b)$ $U=\ln(x+y)+C$ en la región $x+y\neq 0$.
3. $U=x^2-y^2+\mathrm{arc\,tg}\,(x/y)+C$.
4. § 67-3, teor. 1.
5. $a)$ 1º) 1/4; 2º) 1/2; 3º) 1/3; 4º) 2/5; 5º) No;
   $b)$ 1º) 1/4; 2º) 1/4; 3º) 1/3; 4º) 11/35; 5º) No.
6. $a)$ $I=1$, $U=(x^4+2x^2y^2+y^4+C)/4$;
   $b)$ $J=1/3$, $U=(1/3)x^2y^3+C$.
7. $I=9$; $U=2xy^2+x+C$.
8. $I=e^4-1$, cfr. ejercicio 1.
9. $U=xyz+C$.
10. $a)$ $U=xy+yz+zx+C$;
    $b)$ $xy+yz+zx=C$.
11. $I=-448/3$; $U=(x^3-3xyz+y^3+C)/3$.

§ 90. Pág. 502.

1. πa^3; calcular en coordenadas polares.
2. $2a^4/3$.
3. $2a^2/3$.
4. $$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int\!\!\int\!\!\int_V z\,dx\,dy\,dz = =\frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)abc^2.$$
5. $P_x+Q_y+R_z=0$.
6. En coordenadas esféricas (§ 84-2) es $dS=r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\lambda\,d\theta$, $r^2=1+k^2-2k\cos\theta$, entonces
$$I=\int_0^{2\pi}d\lambda\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta}{(1+k^2-2k\cos\theta)^2}=\frac{4\pi}{(1-k^2)^2}.$$

§ 91. Pág. 515.

1. 1º) $x=x_0+5t$, $y=y_0+\frac{1}{2}t^2$, $z=z_0$ (t variable, parámetro); 2º) Rectas $y=(tx/5)+C_1$, $z=C_2$ (t, C_1, C_2 constantes).
2. 1º) $x=x_0e^{t^2/2}$, $y=y_0e^t$, $z=z_0e^t$;
   2º) $x=C_1y^t$, $y=C_2z$.
3. $U=(x^4+3x^2y^2+y^4+C)/6$.
4. $U=xy+yz+zx+C$.
9. $\Delta P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)U=P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta U$.
13. Aplicando Δ a r^hU, y luego el teorema de EULER (§ 67-3) a U resulta $\Delta(r^hU)=h(h+2n+1)r^{h-2}U$.

§ 92. Pág. 525.

1. $\pi/4$.
3. $8\pi/5$; aplicar el teorema de GAUSS.
4. $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)abc^2$; aplicar el teorema de GAUSS.
5. Aplicar el teorema de GAUSS.
7. El flujo a través de una esfera de centro P debe ser independiente de su radio r, llamando $f(r)$ a la intensidad de la fuerza es entonces $r^2f(r)=\text{const.}=m$, $f(r)=m/r^2$
8. $f(r)=1/r$. Considérese el flujo a través de una superficie limitada por dos cilindros circulares con eje en el eje del campo, y dos planos perpendiculares al eje del campo.
9. $-\pi/2$; aplicar el teorema de STOKES.
10. 1º) $U=-gz$;
    2º) y 3º) $U=\int_a^r f(\varrho)\,d\varrho$
    con a constante y r distancia al centro o al eje respectivamente.

§ 93. Pág. 533.

1. $a)$ $X=-\mu l/[x(x-l)]$, $Y=Z=0$;
   $b)$ $X=-M/d^2$ con $d=\sqrt{x(l-x)}$;
   $c_1)$ La fuerza tiende a infinito;
   $c_2)$ La partícula equivalente tiende al punto medio del segmento.
3. 1º) En $P(x;0;0)$ la fuerza es:
$$X=-\mu x\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta/(x^2+\zeta^2)^{3/2}=-2\mu/x,\quad Y=Z=0;$$
   2º) $U=-2\mu\ln\sqrt{x^2+y^2}$.
5. 1º) $F=\frac{\mu}{r^3}\int_{-\alpha}^{\alpha}r\cos\theta\,.\,r\,d\theta=\frac{2\mu}{r}\,\mathrm{sen}\,\alpha$;
   2º) $F=M/d^2$ con $d=r\sqrt{\alpha/\mathrm{sen}\,\alpha}$.
6. 1º) Inmediato;
   2º) $X=-Mx(r^2+x^2)^{-3/2}$, $Y=Z=0$; $D=d\sqrt{d/x}$.
7. 1º) $U=2M/(\sqrt{r^2+z^2}+|z|)$.

8. 1º) $X = Y = 0, \quad Z = (2\pi\sigma z/\sqrt{a^2+z^2}) - 2\pi\sigma \operatorname{sg} z;$
2º) $Z_+ = \lim_{z\to 0^+} Z = -2\pi\sigma,$
$Z_- = \lim_{z\to 0^-} Z = 2\pi\sigma,$
$Z(0) = 0 = \frac{1}{2}(Z_+ + Z_-).$

9. $F = 2\pi\tau h(1-\cos\alpha)$ siendo h la altura y α el ángulo de la generatriz con el eje.

10. 1º) $X = Y = 0, \quad Z = 2M(h + d_1 - d_2)/(a^2 h)$ siendo $h = c - b =$ altura, d_1 y d_2 distancias de P a los puntos más próximo y más lejano de la superficie curva del cilindro; 2º) $Z = 2\pi\tau(h_2 - h_1 + d_2 - d_1)$ siendo h_i las distancias a los centros de las bases y d_i a sus circunferencias; basta suprimir un trozo de atracción nula por simetría y aplicar 1º).

12. 1º) $F = -4\pi r^2\sigma/a^2 = -M/a^2$ si $a > r,$
$F = 0$ si $0 \leqslant a < r;$
2º) $F = -2\pi\sigma = \frac{1}{2}(\lim_{a\to r^+} F + \lim_{a\to r^-} F);$
calcular la integral en coordenadas esféricas.

13. 5,5 g/cm³ aproximadamente.

16. De $r^2 = (\varrho \operatorname{sen}\theta\cos\lambda - \varrho'\operatorname{sen}\theta'\cos\lambda')^2 + (\varrho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\lambda - \varrho'\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\lambda')^2 + (\varrho\cos\theta - \varrho'\cos\theta')^2$ y $r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos\omega$ siendo ω el ángulo de los radios vectores, resulta
$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\lambda - \lambda').$$

17. $(1/r) = (1/\varrho')[1 - 2(\varrho/\varrho')\cos\omega + (\varrho/\varrho')^2]^{-\frac{1}{2}}$ y § 45, ejercicio 22.

18. $P_n(t)$ contiene sólo las potencias $t^n, t^{n-2}, \ldots,$ (Cap. XVI, nota III, *b*) y por ser $t = \cos\omega = (\xi x + \eta y + \zeta z)/(\varrho\varrho'),$ $P_n(t)$ contiene el radical $\varrho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en las potencias $\varrho^{-n}, \varrho^{-n+2}, \ldots$ Entonces $P_n(t)\varrho^n$ contiene ϱ con los exponentes 0, 2, 4, ..., todos $\leqslant n$. Además t es homogénea de grado 0 en x, y, z.

19. De ejercicios 17 y 18 sigue
$(1/r) = H_0(x,y,z) + H_1(x,y,z) + \ldots,$ donde quitando paréntesis queda una serie de potencias cuyo campo de convergencia contiene (0; 0; 0) como punto interior. Como $1/r$ satisface a la ecuación de LAPLACE resulta por derivación término a término, agrupando términos después:
$0 = \Delta H_0(x,y,z) + \Delta H_1(x,y,z) + \ldots$ y como por el principio de identidad, la serie de potencias que resulta de quitar paréntesis tiene todos sus coeficientes nulos, resulta
$\Delta H_n(x,y,z) = 0.$

20. Escríbase $\Delta H_n = 0$ en coordenadas esféricas (§ 92-4).

21. [93-28] da $\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,(dP_n/d\theta) + \operatorname{sen}^2\theta\,(d^2P_n/d\theta^2) + n(n+1)\operatorname{sen}^2\theta\, P_n = 0,$ y como $d/d\theta = -\operatorname{sen}\theta\, d/dt,$ $d^2/d\theta^2 = -\cos\theta\,(d/dt) + \operatorname{sen}^2\theta\,(d^2/dt^2)$ resulta [93-29].

22. *a*) Desarrollar ambos miembros de [93-30] en series de potencias de h y comparar los coeficientes de h^n;
b) $c_k > 0$, y $\cos r\omega$ alcanza su máximo en $\omega = 0$.

23. Sea d la distancia de O(0; 0; 0) a D. Si Q está en D y P en la esfera $\varrho \leqslant hd$, $0 < h < 1$, la serie [93-26] tiene (ejercicio 22) la mayorante Σh^n y es entonces convergente uniformemente en todas sus variables. Puede entonces multiplicarse por τ e integrarse término a término.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS, NOTACIONES Y ABREVIATURAS

$\mathbf{a} = PQ = RS$
Vector, 60-1*a*.

$\text{mód}\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}| = |PQ| = a$
Módulo de un vector, 60-1*a*.

$\mathbf{0}$
Vector nulo, 60-1*a*.

$\lambda\mathbf{a}$
Producto de un vector por un número real. 60-1*b*.

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$
Suma de vectores, 60-1*c*.

$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$
Diferencia de vectores, 60-1*d*.

$-\mathbf{b}$
Vector opuesto a **b**, 60-1*d*.

$Q - P$
Vector como diferencia de puntos. 60-1*d*.

$P + \mathbf{a} = Q$
Suma de punto y vector, 60-1*d*.

E_1 , E_2 , E_3 , E_n
Espacios vectoriales de una, dos, tres y n dimensiones, 60-2*b*.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$
Versores fundamentales, 60-3*b*.

$O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$
Sistema de coordenadas, 60-3*b*.

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$
Expresión lineal de **a** en el sistema O(**i**, **j**, **k**), 60-3*b*.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
Componentes del vector **a**, 60-3*b*.

a_e
Componente o valor de un vector sobre un eje, 60-4.

$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|_e = a_e + b_e$
Proyección de la suma de vectores, 60-4.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
Producto escalar o interno, 60-5*a*.

$N\mathbf{a} = \mathbf{a}^2$
Norma o cuadrado escalar de un vector, 60-5*d*.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
Cosenos directores de un vector **a**, 60-5*d*.

$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$
Dirección de cosenos directores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 60-5*d*.

$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
Coseno del ángulo de dos vectores, 60-5*e*.

$\operatorname{sen}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
Seno del ángulo de dos vectores, 60-5*e*.

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
Producto vectorial o externo de dos vectores, 60-6.

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
Producto escalar de vectores, 60-6*g*.

$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]$
Producto vectorial de vectores, 60-6*g*.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
Producto vectorial; íd. escalar, 60-6*g*.

$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
Producto mixto de vectores, 60-7*a*.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a}' & \mathbf{b}' & \mathbf{c}' \end{pmatrix} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$$
Determinante de dos ternas de vectores, 60-7*a*.

$G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
Determinante de GRAM, 60-7*a*.

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix}$$
Doble producto vectorial, 60-7*b*, 60-Ej. 21.

$\mathbf{r} = OP$
Vector que sitúa un punto P respecto del origen O, 60-8*a*.

u
Parámetro que determina los puntos de una recta, 60-8*a*.

u, v
Parámetros que determinan los puntos de un plano, 60-8*a*.

$\mathbf{n}$
Vector o versor normal a un plano, 60-8*b*.

$(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$
Base recíproca de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, 60-Ej. 16.

δ_{rs} $(=0$ si $r \neq s$; $=1$ si $r = s)$
Delta de KRONECKER, 60-Ej. 16; 61-1*b*.

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$
Funcional definido en **E**, XVII-I*c*.

$\mathbf{E}_n^*$
Espacio dual o adjunto de $\mathbf{E}_n$, XVII-I*c*.

$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) = x_1 \;, \ldots, \; \mathbf{P}_n(\mathbf{x}) = x_n$
Base dual en $\mathbf{E}_n^*$ de $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ de $\mathbf{E}_n$, XVII-I*c*.

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathbf{f} \,.\, \mathbf{g} = \int_a^b \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\,dx$$
Producto escalar en un espacio vectorial de funciones, XVII-II*a*.

$g_{ik} = \mathbf{e}_i \,.\, \mathbf{e}_k = g_{ki}$
Coeficientes de la forma bilineal de un producto escalar, XVII-II*a*.

$g = \det.\{g_{ik}\}$
Determinante de Gram de la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, XVII-II*a*.

$\mathrm{N}\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| = \mathbf{a} \,.\, \mathbf{a}$
Norma de un vector, XVII-II*a*.

$a = \text{mód}\, \mathbf{a} = \sqrt{\mathrm{N}\mathbf{a}}$
Módulo de un vector, XVII-II*b*.

$\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad ; \quad \cos\varphi = \dfrac{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}}{ab}, \quad 0 \leqslant \varphi < \pi$
Ángulo de dos vectores, XVII-II*b*.

$\mathbf{A}_n$
Espacio puntual afín de *n* dimensiones, XVII-III*a*.

OA
Vector de posición del punto A respecto del origen O, XVII-III*a*.

$\mathbf{0} = \mathrm{BB}$
Vector nulo de un espacio afín, XVII-III*a*.

$\{\mathrm{O}, \mathbf{e}_k\}$
Sistema de coordenadas de un espacio puntual afín, XVII-III*a*.

$\varrho(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \text{mód}\,\mathrm{PQ}$
Distancia entre los puntos P y Q, XVII-III*b*.

$b_{hi,j} \;,\; k_{i,j} \;,\; \mathrm{K}_{h,j}$
Coeficientes de ecuaciones auxiliares en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, XVII-IV*c*.

g_{hj}
Coeficientes de las ecuaciones resultantes en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, XVII-IV*c*.

$z = \mathrm{f}(x, y) \quad ; \quad z = z(x, y) \quad ; \quad z = \mathrm{F}(x, y)$
Función de dos variables independientes, 64-1.

C
Campo de variación, de definición o de existencia de una función, 64-1.

$u = \mathrm{u}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Función de *n* variables, 64-1.

$\mathrm{f}(x_0, y_0)$
Valor de $\mathrm{f}(x, y)$ en (x_0, y_0), 64-2*a*.

(a, b)
Punto del espacio euclídeo de dos dimensiones, 64-4*a*.

(a, b, c)
Punto del espacio euclídeo de tres dimensiones, 64-4*a*.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Punto del espacio euclídeo de *n* dimensiones, 64-4*a*.

$\mathrm{E}_2 \;,\; \mathrm{E}_3 \;,\; \mathrm{E}_n$
Espacios euclídeos de 2, 3, *n* dimensiones, 64-4*a*.

$\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = +\sqrt{\Sigma(a_i - b_i)^2} = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$
Distancia de dos puntos del espacio euclídeo, 64-4*a*.

$|\mathbf{a}| = +\sqrt{\Sigma a_i^2}$
Distancia al origen del punto **a**, 64-4*a*.

$\mathbf{ab}$
Recta del espacio, 64-4*a*.

X'
Derivado de un conjunto X, 64-4*c*; XVIII-II*b*.

$\overline{\mathrm{X}}$
Clausura de un conjunto X, 64-4*c*; XVIII-I*b*.

$\mathrm{f}(x, y) \to \zeta$ para $(x, y) \to (a, b)$
Límite funcional doble, 65-1.

$\lim \mathrm{f}(x, y) = \zeta$ para $x \to a$, $y \to b$ ó $(x, y) \to (a, b)$
Límite funcional doble, 65-1.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathrm{f}(x, y) = \zeta$$
Límite funcional doble, 65-1.

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} \mathrm{f}(x, y) = \lim_{y\to b}\,[\,\lim_{x\to a} \mathrm{f}(x, y)\,]$$
Límite sucesivo o reiterado, 65-2.

$h = x - a \;,\; k = y - b$
Incrementos de las variables independientes, 65-4.

$\varrho = +\sqrt{h^2 + k^2}$
Infinitésimo tipo o principal en E_2, 65-4.

$\mathrm{f}_x(x, y), \quad \mathrm{D}_x\mathrm{f}(x, y), \quad \dfrac{\partial\mathrm{f}(x, y)}{\partial x}, \quad z_x, \quad \mathrm{D}_x z, \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$
Derivada parcial, 66-1.

$\partial z/\partial x_0 = f_x(x_0, y_0) = \mathrm{D}_x\mathrm{f}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial\mathrm{f}(x_0, y_0)}{\partial x}$
Valor de la derivada parcial en un punto, 66-1.

$\mathrm{f}_y(x, y), \quad \mathrm{D}_y\mathrm{f}(x, y), \quad \dfrac{\partial\mathrm{f}(x, y)}{\partial y}, \quad z_y, \quad \mathrm{D}_y z, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}$
Derivada parcial respecto de *y*, 66-1.

$\mathrm{f}_1 = \dfrac{\partial\mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1}$
Derivada parcial respecto de x_1, 66-1.

$\mathrm{f}_2 = \dfrac{\partial\mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_2}$
Derivada parcial respecto de x_2, 66-1.

$\Delta z = \Delta\mathrm{f}(a, b) = \mathrm{f}(a + h, b + k) - \mathrm{f}(a, b)$
Incremento total de $z = \mathrm{f}(x, y)$, 66-2; 69-5.

$dz_0 = \mathrm{A} \,.\, \Delta x_0 + \mathrm{B} \,.\, \Delta y_0$
Definición de diferencial total, 66-4.

$dz = \mathrm{f}_x(x, y)\,dx + \mathrm{f}_y(x, y)\,dy$
Expresión analítica de la diferencial total, 66-4.

$du = \mathrm{f}_x(x, y, z)\,dx + \mathrm{f}_y(x, y, z)\,dy + \mathrm{f}_z(x, y, z)\,dz$
Diferencial total de la función $u = \mathrm{f}(x, y, z)$, 66-4.

$d_x u = \mathrm{f}_x\,dx \;,\; d_y u = \mathrm{f}_y\,dy \;,\; d_z u = \mathrm{f}_z\,dz$
Diferenciales parciales de la función $u = \mathrm{f}(x, y, z)$, 66-4.

$\mathrm{D}_\varphi\,\mathrm{f}(x_0, y_0) = \mathrm{f}_\varphi\,(x_0, y_0) \quad ; \quad \mathrm{D}_\varphi\,(x_0, y_0, z_0)$
Pendiente o derivada en la dirección φ, 66-5*b*; 66-6*b*.

$\mathrm{D}u \;,\; \mathrm{grad}\,u \;,\; \nabla u$
Vector gradiente, 66-6.

$(\partial z/\partial x)_y \;,\; (\partial z/\partial x)_{u,v}$
Derivación parcial de función compuesta, 67-2.

$$\mathrm{J} = \frac{\partial(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)}{\partial(u_0, v_0, w_0)} = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)}{\mathrm{D}(u_0, v_0, w_0)}$$
Determinante funcional o jacobiano, 67-6*a*.

$(d_x u)_z \;,\; (d_x y)_{u,v} \;,\; (d_x v)_{z,u}$
Diferenciales parciales de funciones compuestas, 67-8.

$\mathrm{W} = \mathrm{W}(u_1, \ldots, u_n)$
Wronskiano, 68-4.

Δ_i
Adjunto de $u_i^{(n-1)}$ en W, 68-4.

E_i
Adjunto de $u_i^{(n-2)}$ en W, 68-4.

E
Espacio topológico de Hausdorff, XVIII-I*b*.

I
Conjunto total de un espacio topológico, XVIII-I*b*.

Ω
Familia de abiertos de un espacio topológico, XVIII-I*b*.

G
Conjunto abierto de un espacio topológico, XVIII-I*b*.

Θ
Conjunto vacío de un espacio topológico, XVIII-I*b*.

$\mathbf{a} \;,\; \mathbf{b}$
Puntos de un espacio topológico, XVIII-I*b*.

Ω_{B}
Base de abiertos de un espacio topológico, XVIII-I*b*.

F
Conjunto cerrado de un espacio topológico, XVIII-I*b*.

$\mathrm{fr}\;\mathrm{X}$
Frontera de un conjunto X, XVIII-I*b*.

X^0
Interior de un conjunto X, XVIII-I*b*.

$\mathrm{X} = \mathrm{A}\,|\,\mathrm{B}$
Separación de un conjunto X, XVIII-I*c*.

$\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
Distancia de dos puntos de un espacio topológico, XVIII-I*d*.

$\mathbf{x}^* = \mathrm{T}(\mathbf{x})$
Transformación unívoca, aplicación o representación, XVIII-I*e*.

$\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}^*)$
Conjunto inverso de A*, XVIII-I*e*.

$\mathrm{T}^{-1}(\mathbf{x}^*)$
Conjunto inverso o preimagen de **x***, XVIII-I*e*.

$\gamma = \mathrm{T}(\mathrm{I})$
Arco simple de Jordan, XVIII-I*e*.

X''
Derivado de X′, XVIII-II*b*.

$\overline{\overline{\mathrm{X}}}$
Clausura de $\overline{\mathrm{X}}$, XVIII-II*b*.

$\mathrm{f}_{xx}(x_0, y_0), \quad \mathrm{f}_{xy}(x_0, y_0), \quad \mathrm{f}_{yx}(x_0, y_0), \quad \mathrm{f}_{yy}(x_0, y_0)$
Derivadas segundas en (x_0, y_0), 69-1.

$$\mathrm{f}_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathrm{f}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} = u_{x^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy},$$
$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{yx},$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} = u_{y^2}$$

Funciones derivadas segundas de $u = f(x, y)$, 69-1.

$$u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$
$$u_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y},$$
$$u_{xyz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$$

etc.

Derivadas terceras de $u = f(x, y, z)$, 69-1

$$f_{11} = u_{11}, \quad f_{12} = u_{12},$$
$$f_{21} = u_{21}, \quad \ldots, \quad f_{nn} = u_{nn}$$

Derivadas segundas de $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 69-1.

$$f_{111} = u_{111}, \quad f_{112} = u_{112},$$
$$f_{113} = u_{113}, \quad \ldots, \quad f_{nnn} = u_{nnn}$$

Derivadas terceras de $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 69-1.

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Incrementos parciales primeros, 69-2.

$$\Delta_{xy} f = \Delta_y(\Delta_x f),$$
$$\Delta_{yx} f = \Delta_x(\Delta_y f)$$

Incrementos parciales segundos, 69-2.

$$d^2 f = d(df) =$$
$$= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f$$

Diferencial segunda de $f(x, y)$, 69-3a.

$$d^3 f = d(d^2 f), \quad d^4 f = d(d^3 f)$$

Diferenciales tercera y cuarta de f, 69-3a.

$$d^n f = d(d^{n-1} f) =$$
$$= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f$$

Diferencial n-ésima de $f(x, y)$, 69-3a.

$$d^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(m)} f$$

Diferencial m-ésima de $f(x_1, \ldots, x_n)$, 69-3a.

$$d^2 f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y$$

Diferencial segunda de la función compuesta $f(x, y)$, 69-3b.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{m}| < n} D^{\mathbf{m}} f(0) \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{m}}}{\mathbf{m}!} + T_n$$

Desarrollo simbólico de MAC LAURIN, 69-6.

$$\mathbf{x}^{\mathbf{m}} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$
$$\mathbf{m}! = m_1!\, m_2! \ldots m_n!,$$
$$D^{\mathbf{m}} = \frac{\partial^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}$$

Símbolos del desarrollo anterior, 69-6.

$$M = \text{máx}\,(m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

Rango de m, 69-6.

$$|\mathbf{m}| = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

Orden de m, 69-6.

$$\mathbf{m} + \mathbf{p} =$$
$$= (m_1 + p_1, m_2 + p_2, \ldots, m_n + p_n)$$

Suma, 69-6.

$$\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{p}} = \binom{m_1}{p_1}\binom{m_2}{p_2} \ldots \binom{m_n}{p_n}$$

Número combinatorio, 69-6.

$$\mathbf{m} \geqslant \mathbf{p}$$

Desigualdad simultánea.

$$m_1 \geqslant p_1, \; m_2 \geqslant p_2, \; \ldots, \; m_n \geqslant p_n, \text{ 69-6.}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n},$$
$$\frac{\partial^r}{\partial \mathbf{x}^r} = \frac{\partial^{rn}}{\partial x_1^r \partial x_2^r \ldots \partial x_n^r}$$

Derivación, 69-6.

$$H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{yy} \\ f_{yx} & f_{xy} \end{vmatrix}$$

Hessiano de $f(x, y)$, 70-2.

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

Hessiano de $f(x, y, z)$, 70-4b.

$$H_{33} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Adjunto de f_{zz} en H de $f(x, y, z)$, 70-4b.

$$H = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} =$$
$$= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

Hessiano de $f(\mathbf{x})$, 70-6c.

$$H_1 = f_{11}, \quad H_2, \ldots, H_{n-1}, \quad H_n = H$$

Supresión de últimas filas y columnas de H, 70-6c.

$$T_2(\mathbf{u}) = \sum f_{ij} u_i u_j, \quad \sum u_i^2 = 1$$

Forma cuadrática n-aria en el versor **u**, 70-6b.

$$T_m(\mathbf{u}) =$$
$$= \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(m)} f(\mathbf{a});$$
$$\sum u_i^2 = 1$$

Forma m-ésima n-aria en **u**, 70-6e.

$$[ab] = \sum a_r b_r$$

Coeficientes de las ecuaciones normales, XIX-I.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(u)$$

Función vectorial uniforme de escalar, 72-1a.

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{P}(u) = x(u) \cdot \mathbf{i} + y(u) \cdot \mathbf{j} + z(u) \cdot \mathbf{k}$$

Expresión lineal de la función vectorial en E_3, 72-1a.

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{P}(u) =$$
$$= x_1(u) \cdot \mathbf{e}_1 + x_2(u) \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n(u) \cdot \mathbf{e}_n$$

Expresión lineal de la función vectorial en E_n, 72-1a.

$$\lim \mathbf{r}(u) = \mathbf{l} \quad \text{para} \quad u \to u_0$$

Límite de función vectorial, 72-1a.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(u, v)$$

Función vectorial uniforme de varios escalares, 72-1b.

$$\mathbf{r}'(u) = d\mathbf{r}/du$$

Derivada de una función vectorial, 72-2a.

$$\mathbf{P}'(u)$$

Derivada de función vectorial con origen fijo, 72-2a.

$$\mathbf{r}'(u) = \mathbf{P}'(u) - \mathbf{O}'(u)$$

Derivada de función vectorial con origen móvil, 72-2a.

$$\mathbf{r}'(u) = x'(u) \cdot \mathbf{i} + y'(u) \cdot \mathbf{j} + z'(u) \cdot \mathbf{k}$$

Expresión lineal de la derivada de función vectorial, 72-2a.

$$\mathbf{r}''(u) = d\mathbf{r}'/du; \quad \mathbf{r}'''(u) = d\mathbf{r}''/du$$

Derivadas sucesivas de función vectorial, 72-2a.

$$\mathbf{o}(h)$$

Vector infinitésimo de orden superior a h, 72-2a.

$$d\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}'(u) \cdot h$$

Vector diferencial, 72-2a.

$$\Delta \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}'(u) \cdot h + \mathbf{o}(h)$$

Incremento de función vectorial, 72-2a.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u(u, v) = \mathbf{r}_u = \mathbf{P}_u$$

Derivada parcial vectorial, 72-2b.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v(u, v) = \mathbf{r}_v = \mathbf{P}_v$$

Derivada parcial vectorial, 72-2b.

$$d\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v)\, du + \mathbf{r}_v(u, v)\, dv$$

Vector diferencial total, 72-2b.

$$\perp$$

Perpendicular a, 72-3.

$$Df(Q) =$$
$$= f_u(Q) \cdot \mathbf{i} + f_v(Q) \cdot \mathbf{j} + f_w(Q) \cdot \mathbf{k}$$

Vector gradiente de $f(Q) = f(u, v, w)$, 72-4a.

$$f_\varphi(Q) = f_u(Q) \cdot \varphi_1 + f_v(Q) \cdot \varphi_2 + f_w(Q) \cdot \varphi_3$$

Derivada de $f(Q) = f(u, v, w)$ en la dirección $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, 72-4a.

$$\Delta_\varphi Q = du \cdot \mathbf{i} + dv \cdot \mathbf{j} + dw \cdot \mathbf{k}$$

Incremento vectorial independiente a partir de Q en la dirección φ, 72-4b.

$$\Delta_\varphi \mathbf{r}(Q) = \mathbf{r}_u(Q)\, du + \mathbf{r}_v(Q)\, dv + \mathbf{r}_w(Q)\, dw + \mathbf{o}(|\Delta_\varphi Q|)$$

Incremento en dirección φ de una función vectorial, 72-4b.

$$\mathbf{r}_\varphi(Q) = \mathbf{r}_u(Q) \cdot \varphi_1 + \mathbf{r}_v(Q) \cdot \varphi_2 + \mathbf{r}_w(Q) \cdot \varphi_3$$

Derivada direccional de una función vectorial, 72-4b.

$$D\mathbf{r}(Q) = d\mathbf{r}/dQ = \mathbf{r}$$

Tensor derivado, 72-4b.

$$d_\varphi \mathbf{r}(Q) = D\mathbf{r}(Q) \cdot \Delta_\varphi Q$$

Vector diferencial en dirección φ de la función vectorial $\mathbf{r}(Q)$, 72-4b.

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{o}(h^n)$$

Término complementario de la fórmula de TAYLOR para función vectorial, 72-5a.

$$\mathbf{o}(1)$$

Vector infinitésimo ($\to 0$ para $h \to 0$), 72-5.

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{r}^{(n)}(u_0)/n! \quad ; \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ \mathbf{r}^{(0)}(u) = \mathbf{r}(u))$$
Coeficiente del desarrollo en serie de potencias de $u - u_0$ de $\mathbf{r}(u)$, 72-5.

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(u_0)$$
Vector tangencial, 72-6*b*.

$$k$$
Paso de la hélice cilíndrica circular, 72-6*b*.

$$\mathrm{E} = g_{11} = \mathbf{r}_u^2; \quad \mathrm{F} = g_{12} = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v; \quad \mathrm{G} = g_{22} = \mathbf{r}_v^2$$
Coeficientes de GAUSS, 72-7*b*.

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v / |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|$$
Normal a una superficie, 72-7*b*.

$$\mathbf{r}(\lambda, \mu) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \lambda \mathbf{r}_u(u_0, v_0) + \mu \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$$
Ecuación paramétrica vectorial del plano tangente, 72-7*b*.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$
Ecuación ortogonal del plano tangente, 72-7*b*.

$$\mathrm{J}_1 \ , \ \mathrm{J}_2 \ , \ \mathrm{J}_3$$
Jacobianos de las funciones paramétricas de una curva, 72-7*b*.

$$\mathrm{W}(u, v) = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| = + \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = + \sqrt{\mathrm{J}_1^2 + \mathrm{J}_2^2 + \mathrm{J}_3^2}$$
Coeficiente del elemento areolar de una superficie, 72-7*b*.

$$\mathrm{T}_1 \sim \mathrm{T}_2(ts)$$
Representaciones topológicamente similares 72-9*c*.

$$\mathrm{T}_1 \sim \mathrm{T}_2(\mathrm{F})$$
Representaciones F-equivalentes, 72-9*c*.

$$\mathrm{N}_+ \mathrm{r}(u_0) \ , \ \mathrm{N}^+ \mathrm{r}(u_0) \ , \ \mathrm{N}_- \mathrm{r}(u_0) \ , \ \mathrm{N}^- \mathrm{r}(u_0)$$
Números derivonormados, 72-Ej. 6.

$$s = \mathrm{s}(u) = \int_a^u |\mathbf{r}'(t)| \mathrm{d}t$$
Abscisa curvilínea o parámetro intrínseco, 73-1.

$$\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(u)| \mathrm{d}u = + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}\right)^2} \mathrm{d}u$$
Diferencial de arco, 73-1.

$$\mathbf{ds} = \mathrm{d}x \cdot \mathbf{i} + \mathrm{d}y \cdot \mathbf{j} + \mathrm{d}z \cdot \mathbf{k}$$
Vector diferencial de arco, 73-1.

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}$$
Velocidad lineal, 73-1.

$$\mathbf{t} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}s = t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k}$$
Vector tangente, 73-1.

$$t_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \ , \ t_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \ , \ t_3 = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$$
Cosenos directores de la tangente, 73-1.

$$\dot{\mathbf{x}}$$
Vector derivado del $\mathbf{x}$, 73-1.

$$\dot{\mathrm{X}}$$
Matriz de un vector derivado, 73-1.

$$\mathbf{r}(\lambda, \mu) = \mathbf{r}(u_0) + \lambda \mathbf{r}'(u_0) + \mu \mathbf{r}''(u_0)$$
Ecuación paramétrica vectorial del plano osculador, 73-2.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0) = 0$$
Ecuación ortogonal del plano osculador, 73-2.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}_0^{(p)}) = 0$$
Ecuación ortogonal de un plano sobreosculador, 73-2.

$$\mathbf{n}$$
Vector normal principal, 73-3.

$$\mathbf{b}$$
Vector binormal, 73-3.

$$\mathrm{d}\sigma_1$$
Diferencial de arco de la indicatriz de flexión Γ_1, 73-4.

$$c_1 = \mathrm{d}\sigma_1/\mathrm{d}s$$
Curvatura de flexión, 73-4.

$$\varrho = 1/c_1$$
Radio de curvatura de flexión, 73-4.

$$\mathrm{d}\sigma_2$$
Diferencial de arco de la indicatriz de torsión Γ_2, 73-4.

$$c_2 = \mathrm{d}\sigma_2/\mathrm{d}s$$
Curvatura de torsión, 73-4.

$$\tau = 1/c_2$$
Radio de curvatura de torsión, 73-4.

$$\mathbf{d} = -\frac{1}{\tau}\mathbf{t} + \frac{1}{\varrho}\mathbf{b}$$
Vector de DARBOUX, 73-6.

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(s_0) + \lambda \mathbf{t}(s_0)$$
Ecuación paramétrica vectorial de la recta tangente, 73-7.

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}(s_0)] \wedge \mathbf{t}(s_0) = 0$$
Ecuación de la recta tangente, 73-7.

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{r}'(s_0) = x'_0 \mathbf{i} + y'_0 \mathbf{j} + z'_0 \mathbf{k}$$
Vector tangente, 73-7.

$$\mathbf{n}_0 = \varrho_0 \mathbf{r}''_0$$
Vector normal principal, 73-7.

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{t}_0 \wedge \mathbf{n}_0$$
Vector binormal, 73-7.

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}(s_0)] \cdot \mathbf{t}(s_0) = 0$$
Ecuación ortogonal del plano normal, 73-7.

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}(s_0)] \cdot \mathbf{n}(s_0) = 0$$
Ecuación ortogonal del plano rectificante, 73-7.

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}(s_0)] \cdot [\mathbf{t}(s_0) \wedge \mathbf{n}(s_0)] = 0$$
Ecuación ortogonal del plano osculador, 73-7.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}u \quad ; \quad \mathbf{r}' = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}s$$
Derivadas vectoriales, 73-7.

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}}| \quad ; \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|} \ ;$$

$$\mathbf{n} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \wedge \dot{\mathbf{r}}}{|(\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \wedge \dot{\mathbf{r}}|} \ ;$$

$$c_1 = 1/\varrho = |\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|/|\dot{\mathbf{r}}|^3 \ ;$$

$$c_2 = 1/\tau = -(\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}) \dddot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|^2$$
Expresiones explícitas de los elementos del triedro intrínseco, 73-7.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\mathbf{t} + \frac{v^2}{\varrho}\mathbf{n}$$
Vector aceleración, 73-8.

$$\mathbf{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\mathbf{t}$$
Aceleración tangencial, 73-8.

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\varrho}\mathbf{n}$$
Accleración normal o centrípeta, 73-8.

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_0 + \varrho_0 \mathbf{n}_0$$
Vector de posición del centro de curvatura, 73-10.

$$r_c = \varrho_0$$
Radio de la circunferencia osculatriz, 73-10.

$$\mathbf{c}_e = \mathbf{r}_0 + \varrho_0 \mathbf{n}_0 - \tau_0 \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}s_0} \mathbf{b}_0$$
Vector de posición del centro de la esfera osculatriz, 73-10.

$$r_e = \sqrt{\varrho_0^2 + \tau_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}s_0}\right)^2}$$
Radio de la esfera osculatriz, 73-10.

$$\mathbf{r}(\mu) = \mathbf{r}(s_0) + \varrho_0 \mathbf{n}(s_0) + \mu \mathbf{b}(s_0)$$
Ecuación paramétrica vectorial del eje do curvatura, 73-10.

$$\{\mathrm{C}_t\}$$
Familia monoparamétrica o haz de curvas planas, 74-1*a*; en el espacio, 74-4*a*.

$$\mathrm{C}_{t_0}$$
Curva del haz $\{\mathrm{C}_t\}$, para $t = t_0$, 74-1*b*.

$$\mathrm{E}$$
Envolvente de un haz $\{\mathrm{C}_t\}$, 74-1*b*; 74-4*a*.

$$\Psi(x, y) = 0$$
Curva discriminante de un haz de curvas, 74-1*b*; Ecuación discriminante de un haz de curvas, 74-1*b*.

$$\Gamma$$
Evoluta de su evolvente C, 74-2; 75-Ej. 7.

$$\{\mathrm{S}_t\}$$
Familia monoparamétrica o haz de superficies, 74-3*a*.

$$\mathrm{E}$$
Envolvente de un haz $\{\mathrm{S}_t\}$, 74-3*a*.

$$\mathrm{C}_t$$
Curva característica de cada involuta S_t, 74-3*a*.

$$\Psi(x, y, z) = 0$$
Superficie discriminante de un haz de superficies, 74-3*a*.

$$\{\mathrm{S}_{u,v}\}$$
Familia de superficies de dos parámetros, 74-3*b*.

$$\mathrm{E}$$
Envolvente de una familia $\{\mathrm{S}_{u,v}\}$, 74-3*b*.

$$\Gamma$$
Arista de retroceso de la reglada desarrollable E, 74-5.

$$\mathrm{E}$$
Reglada desarrollable, envolvente del plano móvil S_t y superficie tangencial o desarrollable circunscrita de su arista de retroceso Γ, 74-5.

$$i$$
Ángulo de incidencia, 74-Ej. 11.

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(s)$$
Directriz de una superficie reglada, 75-1.

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + u\mathbf{q}(s) \ , \quad \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}s}\right| = 1 \ , \quad |\mathbf{q}| = 1$$
Ecuación paramétrica vectorial de una superficie reglada, 75-1.

$$[\mathbf{r} - \mathbf{p}(s)] \cdot [(\mathbf{p}'(s) + u\mathbf{q}'(s)) \wedge \mathbf{q}(s)] = 0$$
Ecuación normal del plano tangente a una superficie reglada, 75-2.

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\,\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g_{22}\,\mathrm{d}v^2$$
Primera forma fundamental de las superficies, 76-1.

$$\mathrm{X}_3 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}$$
Distancia del punto P del entorno de P_0 al plano tangente en éste, 76-2*a*.

$$\mathbf{r}_{tt}(t_0) \cdot \mathbf{n} = \mathrm{D}_{11}(u_0, v_0)\,\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{D}_{12}(u_0, v_0)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \mathrm{D}_{22}(u_0, v_0)\,\mathrm{d}v^2;$$
$$\mathrm{D}_{11} = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}; \quad \mathrm{D}_{12} = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}; \quad \mathrm{D}_{22} = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}$$
Segunda forma fundamental de las superficies, 76-2*a*.

$$x_3 = \tfrac{1}{2}\sum D_{ij}(u_0, v_0)\, x_i x_j$$
Paraboloide osculador referido a los ejes $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{n}$ en P_0, 76-2*a*.

$$\sum D_{ij}(u_0, v_0)\, x_i x_j = +1, \text{ resp. } -1$$
Indicatriz de DUPIN, 76-3*b*.

$$K = \tfrac{1}{2} J_1$$
Curvatura media, invariante del tensor de curvatura, 76-3*b*.

$$H = J_2$$
Curvatura total, invariante del tensor de curvatura, 76-3*b*.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\varrho_2}$$
Curvatura de una sección normal en función de las curvaturas principales $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ (EULER), 76-3*b*.

$$\frac{1}{\varrho}\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \frac{D_{11}\, du^2 + 2D_{12}\, du\, dv + D_{22}\, dv^2}{g_{11}\, du^2 + 2g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2}$$
Curvatura $1/\rho$ de una curva de normal principal **m** en una superficie de normal **n**, 76-4.

$$\varrho = \varrho_n \cos \theta$$
Radio de curvatura de la sección que según la tangente común forma ángulo θ con la sección normal de radio de curvatura ρ_n (MEUSNIER), 76-4.

$$C_g$$
Centro de curvatura geodésica, 76-5*a*.

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{\varrho} \operatorname{sen} \theta$$
Curvatura geodésica, 76-5*a*.

$$\Omega$$
Recinto de definición en el plano paramétrico (u, v) de una superficie S, 77-2*a*.

$$\varphi$$
Latitud, 77-2*b*, 84-2.

$$\lambda$$
Longitud, 77-2*b*, 84-2.

$$a = 6\,378\,388 \pm 18 \text{ m}$$
Radio ecuatorial del elipsoide terrestre, 77-2*c*.

$$b = 6\,356\,912 \text{ m}$$
Semieje de rotación del elipsoide terrestre, 77-2*c*.

$$e_1 = +\sqrt{a^2 - b^2}/a \quad ; \quad e' = +\sqrt{a^2 - b^2}/b$$
Excentricidades del elipsoide terrestre, 77-2*c*.

$$a/(a - b) = 297{,}0 \pm 0{,}5$$
Recíproca del achatamiento del elipsoide terrestre, 77-2*c*.

$$\Delta = (1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}$$
En 77-2*c*.

$$M = a(1 - e_1^2)/\Delta^3$$
Radio de curvatura del meridiano del elipsoide terrestre, 77-2*c*.

$$r = N \cos \varphi$$
Radio del paralelo del elipsoide terrestre, 77-2*c*.

$$N = a/\Delta$$
Radio de curvatura de la sección normal al elipsoide terrestre que contiene la tangente al paralelo, 77-2*c*.

$$m = ds'/ds$$
Dilatación lineal en una representación plana de una superficie, 77-3.

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi$$
Colatitud, 77-4*c*, 84-2.

$$l = \lambda - \lambda_0$$
Longitud contada a partir del meridiano principal, 77-5.

$$\gamma$$
Convergencia del meridiano, 77-Ej. 5.

$$a' \;,\; b'$$
Dilataciones lineales según las direcciones principales de la elipse indicatriz de TISSOT, XX-I.

$$2\omega = 2(U - U')$$
Máxima alteración angular, XX-I.

$$\sigma = a'b'$$
Dilatación areolar, XX-I.

$$d\mu$$
Elemento de arco de la imagen del meridiano, XX-I.

$$d\tau$$
Elemento de arco de la imagen del paralelo, XX-I.

$$h = d\mu/(M\, d\varphi)$$
Dilatación lineal del meridiano, XX-I.

$$k = d\tau/(r\, d\lambda)$$
Dilatación lineal del paralelo, XX-I.

$$\varepsilon_0$$
Alteración del ángulo recto que forman meridiano y paralelo, XX-I.

$$q = \int_0^{\varphi} \frac{M}{r} d\varphi = \ln \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)$$
Latitud ampliada o función lambda de φ, XX-II.

$$\zeta = \int_0^{\varphi} M r\, d\varphi = a^2 \operatorname{sen} \varphi$$
Función de latitud en una representación equivalente, XX-II.

$$\eta = e' \cos \varphi$$
En [XX-107], XX-IV.

$$t = \operatorname{tg} \varphi$$
En [XX-111], XX-IV.

$$S$$
Abscisa sobre el meridiano principal contada desde el polo Sur, XX-IV.

$$g(x)$$
Función de repartición (o de distribución) en una integral de STIELTJES, 78-1 y 2.

$$\delta_r = g(x_r) - g(x_{r-1}) \geqslant 0$$
Incremento de la función de repartición en un subintervalo de partición π: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 78-1.

$$h = \text{máx}_r (x_r - x_{r-1})$$
Norma de la partición π, 78-1.

$$\omega_r = M_r - m_r$$
Oscilación de $f(x)$ en $[x_{r-1}, x_r]$ con m_r, M_r extremos inferior y superior de $f(x)$, 78-3.

$$s = \sum m_r \delta_r \leqslant S = \sum M_r \delta_r$$
Sumas inferior y superior correspondientes a una partición, 78-1.

$$(g) \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dg(x) = \lim_{\pi} \sum \eta_r \delta_r \;, \quad \text{con } m_r \leqslant \eta_r \leqslant M_r$$
Integral (generalizada) de RIEMANN-STIELTJES, 78-1, 78-6.

$$\{u_\alpha\}$$
Conjunto de números reales dirigidos según sus índices, 78-1.

$$l$$
Límite de un conjunto dirigido según sus índices, 78-1.

$$(\text{R-St}) \int_a^b f(x)\, dg(x) = \lim_{h \to 0} \sum \eta_r \delta_r$$
Integral (restringida) de RIEMANN-STIELTJES, 78-1.

Integral (St)
Integral de tipo STIELTJES, 78-2.

$$\sigma$$
Salto de $g(x)$ en un punto, 78-2.

$$\alpha(x)$$
Densidad lineal, tal que $g(x) = \int_c^x \alpha(x)\, dx$, 78-2.

$$V(x) = V_a^x g(t)$$
Variación total de $g(t)$ en $[a, x]$, 78-6*b*.

$$\int_a^b |f(x)|\, dV(x) = \int_a^b |f(x)|\, |dg(x)|$$
En 78-6*b*.

$$V_F(x) = V_a^x F(t)$$
Variación total de $F(t)$ en $[a, x]$, 78-6*b*.

$$g^*(x)$$
Normalizada de la función de variación acotada $g(x)$, 78-6*c*.

$$\Phi[f]$$
Funcional, 78-7.

$$\int_a^b = \lim_{x \uparrow b} \int_a^x f(x)\, dx \;, \quad b \leqslant +\infty$$
$$\int_a^b = \lim_{x \downarrow a} \int_x^b f(x)\, dx \;, \quad a \geqslant -\infty$$
Integral (R-C) para extremo singular único, 80-1.

$$\int_a^b = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^c + \lim_{\beta \uparrow b} \int_c^\beta = \int_a^c + \int_c^b \;,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^c + \int_c^{+\infty} = \lim_{\alpha \downarrow -\infty} \int_\alpha^c + \lim_{\beta \uparrow +\infty} \int_c^\beta$$
Integral (R-C) con ambos extremos singulares, 80-3*a*.

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \lim_{x \uparrow c} \int_a^x + \lim_{x \downarrow c} \int_x^b$$
Integral (R-C) con punto singular interior, 80-3*b*.

$$(\text{VP}) \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{h \to 0} \left[\int_a^{c-h} + \int_{c+h}^b \right],$$
$$(\text{VP}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\, dx$$
Valor principal de una integral (R-C), 80-4.

$$\ldots + b_2 + b_1 + a_1 + a_2 + \ldots = \lim_{n\to\infty} (b_n + \ldots + b_1 + a_1 + \ldots + a_n)$$

Valor principal de series biláteras, 80-4.

$$\mathrm{I}_\rho$$

Conjunto de intervalos que queda al suprimir los entornos de radio ρ que en número finito cubren los puntos singulares, 80-9.

$$(\text{R-Ha}) \int_{\mathrm{I}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\rho\to 0} \int_{\mathrm{I}\rho} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

Integral de RIEMANN-HARNACK, 80-9.

$$\int_a^b = \lim_{\beta\uparrow b} (\text{R-Ha}) \int_a^\beta$$

Generalización de DIRICHLET de la integral de RIEMANN-HARNACK, 80-9*a*.

$$\mathrm{S}_{mn}$$

Elemento general de una sucesión indefinida doble, 81-1.

$$\mathrm{S} = \lim_{m,\,n\to\infty} \mathrm{S}_{mn}$$

Límite doble de una sucesión indefinida doble, 81-1.

$$\lim_{m,\,n\to\infty} \mathrm{S}_{mn} = \infty$$

Límite doble infinito de una sucesión indefinida doble, 81-1.

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_{m,n}) \quad \text{(por filas)}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} \mathrm{S}_{mn}) \quad \text{(por columnas)}$$

Límites sucesivos de una sucesión doble, 81-1.

$$u_{mn}$$

Término general de una serie doble, 81-2.

$$\mathrm{S}_{mn} = \sum_{i=1,\, j=1}^{m,\, n} u_{ij}$$

Suma parcial de una serie doble, 81-2.

$$\mathrm{S} = \sum_{i,\, j=1}^{\infty} u_{ij}$$

Suma de una serie doble convergente, 81-2.

$$q_n = u_{1n} + u_{2n} + \ldots + u_{n-1,\,n} + u_{nn} + u_{n,\,n-1} + \ldots + u_{n2} + u_{n1}$$

Término general de la serie por cuadrados, 81-2b_1.

$$t_n = u_{1n} + u_{2,\,n-1} + \ldots + u_{n-1,\,2} + u_{n1}$$

Término general de la serie por triángulos, 81-2b_1.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}$$

ó

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{f}_m \quad \text{con} \quad \mathrm{f}_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}$$

Suma por filas de una serie doble, 81-2b_2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$$

Suma por columnas de una serie doble, 81-2b_2.

$$R(a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant b)$$

Rectángulo de definición de una integral doble, 82-1*a*.

$$\delta_r = \Delta x \,.\, \Delta y$$

Área de una subdivisión en una partición de R, 82-1*a*.

$$\omega_r = \mathrm{M}_r - m_r$$

Oscilación de $\mathrm{f}(x)$ en δ_r con m_r, M_r, extremos inferior y superior de $\mathrm{f}(x)$, 82-3.

$$s = \sum m_r \delta_r \quad . \quad \mathrm{S} = \sum \mathrm{M}_r \delta_r$$

Sumas inferior y superior correspondientes a una partición de R, 82-1*a*.

$$\int\!\!\int_R \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Integral doble (R) en R, 82-1*a*.

$$\underline{\int\!\!\int}_R \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{extr. inf. S}$$

Integral inferior, 82-1*a*.

$$\overline{\int\!\!\int}_R \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{extr. sup. } s$$

Integral superior, 82-1*a*.

$$\int\!\!\int_{\mathrm{D}} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Integral doble (R) en un dominio D, 82-3.

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}y \ ; \qquad \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x$$

Integrales reiteradas, 82-4.

$$\mathrm{A}(x) = \int_c^d \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}y \ ;$$

$$\mathrm{B}(y) = \int_a^b \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x$$

Integrales interiores de las integrales reiteradas precedentes, 82-4.

$$\mathrm{Y}(x)$$

Conjunto de intervalos intersecados en un recinto cerrado D por una sección de abscisa x, 82-4.

$$\mathrm{X}(y)$$

Conjunto de intervalos intersecados en un recinto cerrado D por una sección de ordenada y, 82-4.

$$\int\!\!\int_{\mathrm{D}} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\mathrm{Y}(x)} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\mathrm{X}(y)} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x$$

Cálculo de una integral doble por integrales reiteradas, 82-4.

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left\{ \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x \ ;$$

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y$$

Integrales reiteradas, 82-4.

$$\overline{\mathrm{G}}(y)$$

Función superior de $\mathrm{G}(y)$, 82-5.

$$\underline{\mathrm{G}}(y)$$

Función inferior de $\mathrm{G}(y)$, 82-5.

$$\mathrm{I}^n(a_k \leqslant x_k \leqslant b_k) \ , \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Intervalo n-dimensional, 83-1.

$$\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Función de n variables reales, 83-1.

$$\mathrm{I}^n{}_r$$

Intervalos parciales de una partición de I^n, 83-1.

$$\delta_r = \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$$

Volumen de $\mathrm{I}^n{}_r$, 83-1.

$$\omega_r = \mathrm{M}_r - m_r$$

Oscilación de $\mathrm{f}(\mathbf{x})$ en $\mathrm{I}^n{}_r$ con extremos inferior m_r y superior M_r de $\mathrm{f}(\mathbf{x})$, 83-1.

$$s = \sum m_r \delta_r \quad , \quad \mathrm{S} = \sum \mathrm{M}_r \delta_r$$

Sumas inferior y superior correspondientes a una partición de $\mathrm{I}^n{}_r$, 83-1.

$$\int_{\mathrm{I}^n} \mathrm{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{I}^n} \mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Integral n-ple de $\mathrm{f}(\mathbf{x})$ sobre I^n, 83-1.

$$\int_{\mathrm{I}^n} \mathrm{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{a_n}^{b_n} \mathrm{d}x_n \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \mathrm{d}x_{n-1} \ldots \ldots \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}x_2 \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \ldots \ldots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Cálculo de una integral múltiple por una integral reiterada, 83-1.

$$\int_{\mathrm{D}} \mathrm{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} \mathrm{d}y \int_{z_0(x,\,y)}^{z_1(x,\,y)} \mathrm{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

Integral triple, 83-1.

$$\mathrm{d}S$$

Elemento de área, 83-2.

$$\mathrm{d}V$$

Elemento de volumen, 83-2.

$$\int\!\!\int_{\mathrm{D}} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}S$$

Integral doble, 83-2.

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{D}} \mathrm{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}V$$

Integral triple, 83-2.

$$|\mathrm{D}| = (\mathrm{R}) \int_{\mathrm{D}} \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Extensión o medida de PEANO-JORDAN n-dimensional o hipervolumen, 83-3.

$$\mathrm{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Coeficiente de dilatación areolar en un cambio de variables, 83-4.

$$\int_{\mathrm{D}} \mathrm{f(x)dx} = \int_{\Omega} \mathrm{J(u)f[x(u)]du}$$

Cambio de variables en una integral múltiple, 83-5.

$$|\mathrm{D}| = \int\int\int_{\Omega} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w$$

Volumen de un dominio tridimensional en coordenadas curvilíneas, 83-6*a*.

$$g$$

Discriminante de la forma cuadrática ds^2 en coordenadas curvilíneas, 83-6*a*.

$$V = \int\int\int \sqrt{g}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w$$

Volumen de un dominio tridimensional en coordenadas curvilíneas, 83-6*a*.

$$M = \int\int\int_{\mathrm{D}} \varrho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

Masa de un cuerpo de densidad ρ, 84-1*a*.

$$V = \int\int_{\mathrm{D}} \mathrm{f}_2(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \int\int_{\mathrm{D}} \mathrm{f}_1(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Volumen orientado de un cuerpo limitado por las superficies $z = \mathrm{f}_2(x, y)$, $z = \mathrm{f}_1(x, y)$, 84-1*b*.

$$r$$

Radio, primera coordenada esférica, 84-2.

$$r$$

Radio, primera coordenada cilíndrica, 84-3.

$$S = \int\int_{\mathrm{A}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y / \cos \mathbf{n}z = \int\int_{\mathrm{A}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int\int_{R} \mathrm{W}(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

Área de una superficie alabeada, 84-4.

$$\mathrm{M}_{yz} = \int \varrho \,.\, x \,\mathrm{d}s$$

Momento estático de un arco respecto del plano yz, 84-5.

$$\mathrm{M}_{yz} = \int \varrho \,.\, x \,.\, \mathrm{d}S \;,\quad \mathrm{M}_{zx} = \int \varrho \,.\, y \,.\, \mathrm{d}S \;,\quad \mathrm{M}_{xy} = \int \varrho \,.\, z \,.\, \mathrm{d}S$$

Momentos estáticos de una superficie respecto de los planos coordenados, 84-5.

$$\mathrm{M}_{yz} = \int \varrho \,.\, x \,.\, \mathrm{d}V \;,\quad \mathrm{M}_{zx} = \int \varrho \,.\, y \,.\, \mathrm{d}V \;,\quad \mathrm{M}_{xy} = \int \varrho \,.\, z \,.\, \mathrm{d}V$$

Momentos estáticos de un cuerpo respecto de los planos coordenados, 84-5.

$$\mathrm{M}_{\pi} = \alpha_1 \mathrm{M}_{yz} + \alpha_2 \mathrm{M}_{zx} + \alpha_3 \mathrm{M}_{xy}$$

Momento estático respecto del plano $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$ con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, 84-5.

$$\mathbf{M}_0 = \int\int\int_{V} \mathbf{r}\, \mathrm{d}m$$

Momento estático respecto de un plano, 84-5.

$$\int\int\int_{V} \mathbf{f}(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V = \lim \sum \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) \Delta V_i$$

$$\mathrm{d}m = \varrho\, \mathrm{d}V \quad (\text{ó } \varrho\, \mathrm{d}S \text{ ó } \varrho\, \mathrm{d}s)$$

Elemento de masa, 84-5.

$$\mathrm{G}(\xi, \eta, \zeta)$$

Baricentro de un cuerpo, 84-6.

$$\mathrm{I} = mr^2$$

Momento de inercia de una masa m respecto de un eje a distancia r, 84-7.

$$\mathrm{I}_0$$

Momento de inercia respecto de un punto O, 84-7.

$$\mathrm{I}_y$$

Momento de inercia respecto de un eje y, 84-7.

$$\varrho = \sqrt{\mathrm{I}/m}$$

Radio de giro, 84-7.

$$\mathrm{A(S)} = S = \int\int_{\mathrm{D}} \mathrm{W}(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

Área de la superficie S, XXI-I.

$$\mu_n(t) = \int_a^t \mathrm{f}(x)(t - x)^n\, \mathrm{d}x$$

Momento de orden n del área del trapezoide determinado por $\mathrm{f}(x)$ en $[a, t]$ respecto de $x = t$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, 86-2*b*.

$$\mathrm{J}_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1 - t^2}}\, \mathrm{d}t$$

Función de BESSEL, 86-Ej. 6.

$$\mathrm{J}_r(x) = \frac{x^r}{1 . 3 \ldots (2r - 1)\pi} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{r - \frac{1}{2}} \cos(xt)\, \mathrm{d}t$$

Función de BESSEL, 86-Ej. 7.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

Función Gamma, 86-Ej. 10.

$$m!!$$

Producto de factores decrecientes de dos en dos unidades, 86-Ej. 12.

$$\mathrm{I} = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathrm{D}_n} \mathrm{f(x)dx}$$

Integral múltiple impropia, 87-1.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Integral de POISSON, 87-3.

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \mathrm{sen}(x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\, y}{\sqrt{y}}\, \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \,,$$

$$\mathrm{J} = \int_0^{\infty} \cos(x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\, \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Integrales de FRESNEL, 87-4.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathrm{f}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lim \int_0^b \int_0^a \mathrm{f}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \quad \textit{para} \quad (a, b) \to \infty$$

Definición rectangular de integral múltiple impropia, 87-5.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathrm{sen}(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Integral de CAYLEY, 87-5.

$$(h/\sqrt{\pi})\, e^{-h^2 x^2}$$

Frecuencia en una distribución normal, 87-Ej. 8.

$$\mu = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 . ke^{-h^2 x^2}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{con} \quad k = h/\sqrt{\pi}$$

Error medio cuadrático en distribución normal, 87-Ej. 9.

$$\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$

Función error, 87-Ej. 10.

$$\varepsilon$$

Error probable, 87-Ej. 10.

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}(x, y)\,;\quad \mathrm{U}_x = \mathrm{P},\quad \mathrm{U}_y = \mathrm{Q}$$

Función primitiva potencial de P y Q, 88-1.

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}(x, y)\, \mathrm{d}x \;,\quad \int_{\mathrm{C}} \mathrm{Q}(x, y)\, \mathrm{d}y \;,\quad \int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}(x, y)\, \mathrm{d}s$$

Integrales curvilíneas a lo largo del camino de integración C, 88-1*a*; 88-4*b*.

$$\int_{\mathrm{AB}} \mathrm{P}(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{P}(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} \mathrm{P}(x, y)\, \mathrm{d}x$$

Integral curvilínea desde $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ hasta $\mathrm{B}(b_1, b_2)$, 88-1*a*.

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}\, \mathrm{d}x + \mathrm{Q}\, \mathrm{d}y = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}\, \mathrm{d}x + \int_{\mathrm{C}} \mathrm{Q}\, \mathrm{d}y \;;$$

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}\, \mathrm{d}x + \mathrm{Q}\, \mathrm{d}y + \mathrm{R}\, \mathrm{d}z = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}\, \mathrm{d}x + \int_{\mathrm{C}} \mathrm{Q}\, \mathrm{d}y + \int_{\mathrm{C}} \mathrm{R}\, \mathrm{d}z$$

Integrales curvilíneas completas en el plano (x, y) o en el espacio (x, y, z), 88-4*a*, *c*.

$$\mathrm{C}$$

Contorno orientado, 88-5*a*.

$$\mathrm{A} = -\int_{\mathrm{C}} y\, \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{C}} x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{C}} x\, \mathrm{d}y - y\, \mathrm{d}x$$

Área orientada, 88-5*a*.

$$\int_{-C} = -\int_C$$

Signo de una integral a lo largo de un contorno orientado, 88-5*b*.

$$\iint_{-A} f(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_A f(x, y)\,dx\,dy \quad , (A > 0) \quad ;$$

$$\iint_A f(x, y)\,dy\,dx =$$

$$= -\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$$

Integral doble sobre un área orientada, 88-5*c*.

$$[dx\,dy] = -[dy\,dx] = dx\,dy$$

Convención de signo de la integración doble, 88-5*c*.

$$M_x = -\frac{1}{2}\int_C y^2\,dx \quad ;$$

$$I_x = -\frac{1}{3}\int_C y^3\,dx$$

Momentos de 1º y 2º orden respecto del eje *x*, 88-5*d*.

$$M_y = \frac{1}{2}\int_C x^2\,dy \quad ;$$

$$I_y = \frac{1}{3}\int_C x^3\,dy$$

Momentos de 1º y 2º orden respecto del eje *y*, 88-5*d*.

$$\iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_C P\,dx + Q\,dy$$

Fórmula de RIEMANN, 88-6.

$$\iint_R uv_x\,dx\,dy =$$

$$= \int_C uv\,dy - \iint_R vu_x\,dx\,dy \quad ,$$

$$\iint_R uv_y\,dx\,dy =$$

$$= -\int_C uv\,dx - \iint_R vu_y\,dx\,dy$$

Integración por partes para integrales dobles, 88-6.

$$C_P$$

Ciclo orientado, 90-1.

$$S \quad , -S$$

Superficies orientadas, 90-1.

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS$$

Integral de f sobre una cara de la superficie orientada S, 90-2*a*.

$$-\iint_{-S_1} = \iint_{S_1} =$$

$$= -\iint_{S_2} = \iint_{-S_2}$$

Relación entre las integrales de superficies sobre las dos caras $-S_1 = S_2$, $-S_2 = S_1$ de una superficie, 90-2*a*.

$$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D R[x, y, \varphi(x, y)]\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_S R\,dy\,dx$$

Integral de superficie de R extendida al trozo de superficie S dada por $z = \varphi(x, y)$ definida en D, 90-2*d*.

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \iint_S [P\cos(\mathbf{n}x) + Q\cos(\mathbf{n}y) +$$

$$+ R\cos(\mathbf{n}z)]\,dS$$

Integral completa de superficie, 90-2*d*.

$$\mathbf{n}_e$$

Normal exterior a una superficie cerrada, 90-3*a*.

$$S_e$$

Cara exterior de una superficie cerrada, 90-3*a*.

$$V = \iint_{S_e} z\cos(\mathbf{n}_e z)\,dS$$

Volumen orientado dado por una integral sobre su superficie cerrada de contorno, 90-3*b*.

$$\mathbf{n}_i$$

Normal interior a una superficie cerrada 90-3*b*.

$$S_i$$

Cara interior de una superficie cerrada, 90-3*b*.

$$V = |V| =$$

$$= \iint_{S_e} z\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_{S_i} z\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_{S_i} z\cos(\mathbf{n}_i, z)\,dS > 0$$

Volumen orientado positivamente, 90-3*b*.

$$V = \frac{1}{3}\iint_{S_e} |\mathbf{r}|\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_e)\,dS$$

Volumen orientado de contorno S dado por **r**, 90-3*b*.

$$\iint_{S_e} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_e} [P\cos(\mathbf{n}_e, x) +$$

$$+ Q\cos(\mathbf{n}_e, y) + R\cos(\mathbf{n}_e, z)]\,dS$$

Integral completa sobre una superficie cerrada orientada positivamente, 90-3*c*.

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

Vector diferencial de **r**, vector de posición de $M(x, y, z)$, 91-1*a*.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k};$$
$$P = P(x, y, z)\,;\quad Q = Q(x, y, z)\,;$$
$$R = R(x, y, z)$$

Campo de fuerzas o campo vectorial, 91-2*a*.

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergencia de $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, 91-3.

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_{AB} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$$

Circulación del vector $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ a lo largo del arco AB, 91-4*a*.

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v})_n = \operatorname{rot}_n\mathbf{v} = \lim\frac{1}{S}\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}$$

Componente según **n**, normal a S, del rot **v**, 91-5.

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Expresión del rotor del campo vectorial $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, 91-5.

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Operador simbólico nabla, delta invertida o del, 91-6*a*.

$$\nabla U = \operatorname{grad} U =$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}$$

Gradiente del escalar U, 91-6a_1.

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \operatorname{div}\mathbf{f} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergencia del vector $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, 91-6$a_2$.

$$\nabla\wedge\mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{f} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Rotor del vector $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, 91-6$a_3$.

$$(\nabla\Phi)\mathbf{u} = \begin{Vmatrix} \Phi_x u_1 & \Phi_x u_2 & \Phi_x u_3 \\ \Phi_y u_1 & \Phi_y u_2 & \Phi_y u_3 \\ \Phi_z u_1 & \Phi_z u_2 & \Phi_z u_3 \end{Vmatrix}$$

Producto tensorial del vector $\nabla\Phi = \Phi_x\mathbf{i} + \Phi_y\mathbf{j} + \Phi_z\mathbf{k}$ por el vector $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, 91-6$c_2$.

$$(\nabla\mathbf{u})\wedge\mathbf{v} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (\mathbf{u}_x\wedge\mathbf{v})_1 & (\mathbf{u}_x\wedge\mathbf{v})_2 & (\mathbf{u}_x\wedge\mathbf{v})_3 \\ (\mathbf{u}_y\wedge\mathbf{v})_1 & (\mathbf{u}_y\wedge\mathbf{v})_2 & (\mathbf{u}_y\wedge\mathbf{v})_3 \\ (\mathbf{u}_z\wedge\mathbf{v})_1 & (\mathbf{u}_z\wedge\mathbf{v})_2 & (\mathbf{u}_z\wedge\mathbf{v})_3 \end{Vmatrix}$$

Tensor de coeficientes vectoriales $\mathbf{u}_x\wedge\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_y\wedge\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_z\wedge\mathbf{v}$, 91-6$c_2$.

$$\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u}) = v_1\mathbf{u}_x + v_2\mathbf{u}_y + v_3\mathbf{u}_z =$$

$$= (v_1u_{x1} + v_2u_{y1} + v_3u_{z1})\mathbf{i} +$$

$$+ (v_1u_{x2} + v_2u_{y2} + v_3u_{z2})\mathbf{j} +$$

$$+ (v_1u_{x3} + v_2u_{y3} + v_3u_{z3})\mathbf{k}$$

Producto del tensor $\nabla\mathbf{u}$ por el vector **v**, 91-6c_2.

$$(\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = (v_1u_{x1} + v_2u_{x2} + v_3u_{x3})\mathbf{i} +$$

$$+ (v_1u_{y1} + v_2u_{y2} + v_3u_{y3})\mathbf{j} +$$

$$+ (v_1u_{z1} + v_2u_{z2} + v_3u_{z3})\mathbf{k}$$

Producto del tensor conjugado al $\nabla\mathbf{u}$ por el vector **v**, 91-6c_2.

$$\Delta = \nabla^2 = \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Operador delta de LAPLACE, 91-6*d*.

$$\Delta U = \nabla^2 U = \nabla \cdot (\nabla U) = \text{div grad } U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplaciano del escalar U, 91-6*d*.

$$\int\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}\, dS = \int\int_S [X \cos(\mathbf{n}, x) + Y \cos(\mathbf{n}, y) + Z \cos(\mathbf{n}, z)]\, dS = \int\int_S X\, dy\, dz + Y\, dz\, dx + Z\, dx\, dy$$

Flujo de $\mathbf{w} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ a través de S, 92-1*a*.

$$\int\int\int_R \text{div } \mathbf{v}\, dV$$

Divergencia total del campo vectorial $\mathbf{v}$ en *R*, 92-1*b*.

$$\int\int\int_R \text{div } \mathbf{v}\, dV = \int\int_{S_e} \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{v}\, dS$$

Fórmula de la divergencia, 92-1*b*.

$$\int\int\int_R \text{grad } U\, dV = \int\int_S \mathbf{n}\, U\, dS$$

Fórmula del gradiente, 92-1*d*.

$$\int\int\int_R \text{rot } \mathbf{f}\, dV = \int\int_S \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}\, dS$$

Fórmula del rotor, 92-1*d*.

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int\int_S \text{rot}_n\, \mathbf{v}\, dS$$

Fórmula de Stokes, 92-3.

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

Flujo del campo plano $\mathbf{v} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ a través de la curva C, 92-3.

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2 h_3 v_{u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_3 h_1 v_{u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1 h_2 v_{u_3}\right)\right],$$

$$(h_i = g_{ii})$$

Expresión de la divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales, 92-4*b*.

$$\text{grad}_{u_i} \Phi = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

Componentes del gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales, 92-4*c*.

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right] + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right] + \frac{\partial}{\partial u_3}\left[\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right]\right\}$$

Laplaciano de Φ en coordenadas curvilíneas ortogonales, 92-4*c*.

$$\text{rot}_{u_3}\, \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2 v_{u_2}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1 v_{u_1}\right)\right]$$

Componente del rotor en coordenadas curvilíneas ortogonales, 92-4*d*.

$$U = \int_C \frac{\mu}{r}\, ds, \quad U = \int\int_S \frac{\sigma}{r}\, dS, \quad U = \int\int\int_V \frac{\tau}{r}\, dV$$

Potenciales gravitatorios de distribuciones de masas, lineal, superficial y de volumen, 93-1*a*.

$$\int\int_S v_n\, dS = -4\pi M$$

Integral de Gauss, 93-1*c*.

$$\Delta U = -4\pi\tau$$

Ecuación de Poisson, 93-1*d*.

$$\frac{\partial w}{\partial t}$$

Derivada local, 93-2.

$$w = \frac{dw}{dt}$$

Derivada sustancial, 93-2.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } w,$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}$$

Relación entre las derivadas sustancial y local de un escalar y de un vector, 93-2.

$$p = p_x = p_y = p_z$$

Presión interior en un flúido, 93-3*a*.

$$\mathbf{f}^*$$

Fuerzas exteriores en un flúido, 93-3*c*.

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right] = \mathbf{f}^* - \text{grad } p,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}^* - \text{grad } p$$

Ecuación del movimiento, en formas euleriana y lagrangiana, 93-4*a*.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Ecuación de continuidad en formas euleriana y lagrangiana, 93-4*b*.

$$v_t$$

Componente tangencial de la velocidad $\mathbf{v}$, normal al plano meridiano, 93-Ej. 15.

$$v_r$$

Componente radial de la velocidad $\mathbf{v}$, en el meridiano y normal al eje, 93-Ej. 15.

$$v_z$$

Componente axial de la velocidad $\mathbf{v}$, paralela al eje, 93-Ej. 15.

$$P_n(t)$$

Polinomio de Legendre de grado *n*, 93-Ej. 17.

$$H_n = H_n(x, y, z) = P_n(t)\, \rho^n / \rho'^{n+1}$$

Función armónica esférica sólida de grado *n*, 93-Ej. 19.

$$Y_n(\lambda, \theta) = H_n(x, y, z) / \rho^n$$

Función armónica esférica de superficie, 93-Ej. 20.

$$\mu(u, v)$$

Momento de un potencial de doble capa, XXIII-I.

$$U = \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

Potencial de doble capa de momento μ, XXIII-I.

$$\int\int\int_D [U\Delta V + \nabla U \cdot \nabla V]\, dx\, dy\, dz = \int\int_S U \frac{\partial V}{\partial n}\, dS$$

Primera fórmula de Green, XXIII-II*a*.

$$\int\int\int_D (U\Delta V - V\Delta U)\, dx\, dy\, dz = \int_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS$$

Segunda fórmula de Green, XXIII-II*a*.

$$U_P = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right\} dS$$

Tercera fórmula de Green, XXIII-IIb_2.

$$x^1, \quad x^2, \quad x^3$$

Sistema de coordenadas ortogonales, XXIII-IIIa_1.

$$x'^1, \quad x'^2, \quad x'^3$$

Nuevo sistema de coordenadas ortógonales, XXIII-IIIa_1.

$$\lambda^i_k = \cos(x'^i, x^k)$$

Cosenos de los ángulos de los ejes de dos sistemas de coordenadas, XXIII-IIIa_1.

$$x'^i = \lambda^i_k x^k$$

Fórmulas de rotación para la transformación del sistema antiguo al nuevo, XXIII-IIIa_1.

$$\{\lambda'^i_k\} = \{\lambda^k_i\} = \{\cos(x'^k, x^i)\}$$

Matriz de la transformación inversa, XXIII-IIIa_1.

$$x^i = \lambda'^i_k x'^k$$

Transformación del sistema nuevo al antiguo, XXIII-IIIa_1.

$$v'^i = \lambda^i_k v^k$$

Definición del vector velocidad $dx^k/dt = v^k$ como tensor simple contravariante, XXIII-III*a*.

$$u_i = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}, \quad u'_i = \frac{\partial\Phi'}{\partial x'^i}$$

Derivadas de un campo escalar, $\Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x'^1, x'^2, x'^3)$, XXIII-III$a_2$.

$$u'_k = u_i \lambda'^i_k \; ; \; u_k = u'_i \lambda^i_k$$

Definición del gradiente como tensor simple covariante, XXIII-III*a*.

$$a^i_k = \partial a^i / dx^k$$

Derivadas de las componentes a^i de un vector, XXIII-IIIa_4.

$$a^1 = u_1, \quad a^2 = u_2, \quad a^3 = u_3$$

Componentes del gradiente **a** de un escalar *u*, XXIII-IIIa_{41}.

$$a^h_k = a^k_h = u_{hk} = \partial^2 u / \partial x^h \partial x^k$$

Coordenadas del tensor derivado de un gradiente **a** en coordenadas ortogonales, XXIII-IIIa_{41}.

$$\text{div } \mathbf{a} = a^1_1 + a^2_2 + a^3_3$$

Divergencia del vector variable **a** en coordenadas ortogonales, XXIII-IIIa_{42}.

$$d_i = a^{i1}{}_i + a^{i2}{}_i + a^{i3}{}_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

Componentes del vector divergencia de un tensor doble $\mathbf{A} = (a^{ij})$ de coordenadas variables en un sistema ortogonal, XXIII-IIIa_{42}.

$$a^2{}_3 - a^3{}_2 \quad , \quad a^3{}_1 - a^1{}_3 \quad , \quad a^1{}_2 - a^2{}_1$$

Componentes de rot **a**, XXIII-IIIa_{43}.

$$u'^i = \lambda^i(u^1, \dots, u^n) \quad ; \quad u^i = \lambda'^i(u'^1, \dots, u'^n)$$

Transformación directa e inversa de un sistema de coordenadas oblicuas $(u^1, \dots, u^n)$ a otro $(u'^1, \dots, u'^n)$ en $\mathbf{E}_n$, XXIII-IIIb_1.

$$\mathrm{J} = \frac{\partial(u'^1, \dots, u'^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)} \neq 0$$

Jacobiano de una transformación invertible entre sistemas de coordenadas curvilíneas, XXIII-IIIb_1.

$$\frac{\partial u'^i}{\partial u^k} = \lambda^i{}_k(u^1, \dots, u^n) \quad , \quad \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} = \lambda'^i{}_k(u'^1, \dots, u'^n)$$

Derivadas de las fórmulas de transformación de coordenadas curvilíneas, XXIII-IIIb_1.

$$du^i = \lambda'^i{}_k \, du'^k \quad , \quad du'^i = \lambda^i{}_k \, du^k$$

Transformación del vector diferencial como tensor simple contravariante, XXIII-IIIb.

$$\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial u^i}, \quad \Phi'_i = \frac{\partial \Phi'}{\partial u'^i}$$

Derivadas de un campo escalar $\Phi(u^1, \dots, u^n) = \Phi'(u'^1, \dots, u'^n)$, XXIII-III$b_1$.

$$\Phi_k = \Phi'_i \, \lambda'^i{}_k \quad , \quad \Phi'_k = \Phi_i \, \lambda^i{}_k$$

Vector derivado de un campo escalar como tensor simple covariante, XXIII-IIIb.

$$\mathrm{T}'^r{}_{st} = \mathrm{T}^i{}_{jk} \, \lambda^r{}_i \, \lambda'^j{}_s \, \lambda'^k{}_t$$

Ley de transformación de un tensor triple, contravariante respecto de un índice y covariante respecto de los otros dos, XXIII-IIIb_3.

$$\{ g_{ik} \}$$

Tensor fundamental correspondiente a la primera forma fundamental en $\mathbf{E}_n$: $dS^2 = g_{ik} \, du^i \, du^k$, XXIII-III$b_3$.

$$v_i = g_{ik} \, v^k$$

Componentes covariantes de un vector, dado por sus componentes contravariantes v^k, XXIII-IIIb_3.

$$du^1 \, du^2 = - \, du^2 \, du^1 \quad , \quad dx^1 \, dx^2 = - \, dx^2 \, dx^1$$

Expresiones simbólicas apropiadas al cambio de variables, XXIII-IVa.

$$\alpha_0 = \mathrm{a}(x^1, x^2)$$

Forma diferencial de grado cero o escalar, XXIII-IVa.

$$\alpha_1 = \mathrm{a}_1(x^1, x^2)\,\mathrm{d}x^1 + \mathrm{a}_2(x^1, x^2)\,\mathrm{d}x^2$$

Forma diferencial de grado uno o pfaffiano, XXIII-IVa.

$$\alpha_2 = \mathrm{a}(x^1, x^2)\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 = - \, \mathrm{a}(x^1, x^2)\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^1 = \mathrm{a}(x^1, x^2)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$$

Forma diferencial de grado dos, XXIII-IVa.

$$\alpha_1 + \beta_1 = (a_1 + b_1)\,\mathrm{d}x^1 + (a_2 + b_2)\,\mathrm{d}x^2$$

Suma de formas diferenciales en $\mathbf{E}_2$, XXIII-IVa.

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 = - \, \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 \quad ; \quad \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^2 = 0$$

Convenciones para el producto exterior $\wedge$ de formas diferenciales exteriores, XXIII-IVa.

$$\mathrm{d}\alpha_1 = \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}a_2 \wedge \mathrm{d}x^2 = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$$

Diferencial exterior de una forma diferencial, XXIII-IVa.

$$\mathrm{CA}_2$$

Contorno de un recinto orientado $\mathbf{A}_2$ de $\mathbf{E}_2$, XXIII-IVb.

$$\int\!\!\int_{\mathrm{A}_2} \mathrm{d}\alpha_1 = \int_{\mathrm{CA}_2} \alpha_1$$

Fórmula de Stokes en $\mathbf{E}_2$, XXIII-IVb.

$$\mathrm{D} = \begin{Bmatrix} \mathrm{d}x^1{}_{(1)} & \mathrm{d}x^2{}_{(1)} & \dots & \mathrm{d}x^n{}_{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{d}x^1{}_{(r)} & \mathrm{d}x^2{}_{(r)} & \dots & \mathrm{d}x^n{}_{(r)} \end{Bmatrix}$$

Matriz de característica r de los r vectores infinitésimos $\mathrm{d}\mathbf{x}_{(h)} = \mathrm{d}x^1{}_{(h)}\mathbf{e}_1 + \dots + \mathrm{d}x^{(n)}{}_{(h)}\mathbf{e}_n$, $(h = 1, \dots, r)$, XXIII-IVc_1.

$$\left[\mathrm{d}\left(x^{h_1}, \dots, x^{h_r} \right) \right]$$

Tensor r-diferencial de las diferenciales de grado r, XXIII-IVc_1.

$$\alpha_r = \sum_{h_1, \dots, h_r = 1}^{n} \alpha_{h_1, \dots, h_r} \, \mathrm{d}\left(x^{h_1}, \dots, x^{h_r} \right)$$

Forma diferencial de grado r *en* $\mathbf{E}_n$, XXIII-IVc_1.

$$\alpha_r + \beta_r = \sum_{h_1, \dots, h_r = 1}^{n} \left(a_{h_1, \dots, h_r} + b_{h_1, \dots, h_r} \right) \mathrm{d}\left(x^{h_1}, \dots, x^{h_r} \right)$$

Suma de formas diferenciales del mismo grado r en $\mathbf{E}_n$, XXIII-IVc_1.

$$\alpha_r \wedge \gamma_s = \sum_{h, k = 1}^{n} a_{h_1, \dots, h_r} \, c_{k_1, \dots, k_s} \, \mathrm{d}\left(x^{h_1}, \dots, x^{h_r} \, x^{k_1}, \dots, x^{k_s} \right)$$

Producto exterior de formas diferenciales, XXIII-IVc_1

$$\mathrm{d}\left(x^{h_1}, \dots, x^{h_r} \right) = \mathrm{d}x^{h_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{h_r}$$

Diferencial de grado r expresada como producto exterior de diferenciales de grado 1, XXIII-IVc_1.

$$\mathrm{d}a(x^1, \dots, x^n) = \Sigma_k (\partial a / \partial x^k)\,\mathrm{d}x^k$$

Diferencial de escalar, XXIII-IVc_1.

$$\mathrm{d}\alpha_r = \sum_{h_i = 1}^{n} \mathrm{d}a_{h_1, \dots, h_r}(x^1, \dots, x^n) \wedge \mathrm{d}\left(x^{h_1}, \dots, x^{h_r} \right) = \sum_{h_i, k = 1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^k} \mathrm{d}\left(x^k, x^{h_1}, \dots, x^{h_r} \right)$$

Diferencial exterior de una forma diferencial, XXIII-IVc_1.

$$\mathrm{CA}_n$$

Contorno del recinto orientado $\mathbf{A}_n$ de $\mathbf{E}_n$, XXIII-IVc_2.

$$\int\!\!\int \dots \int_{\mathrm{A}_n} \mathrm{d}\alpha_{n-1} = \int \dots \int_{\mathrm{CA}_n} \alpha_{n-1}$$

Fórmula de Stokes en $\mathbf{E}_n$, XXIII-IVc_2.



ÍNDICE ALFABÉTICO

A

B

CH

D

G

H

I

J

K

L

M

T

V

La EDITORIAL KAPELUSZ S.A. dio término a la presente tirada de la séptima edición de esta obra, que consta de 2.000 ejemplares, en el mes de febrero de 1980, en los Talleres Gráficos La Prensa Médica Argentina, Junín 845, Buenos Aires.

K — 17.327